



**Министерство образования и науки Украины**  
**Севастопольский национальный технический университет**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

**Лабораторный практикум по дисциплине**

**«ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ»**

**для студентов направления 0907 — радиотехника**

**дневной и заочной форм обучения**

**Севастополь**

**2006**

Методические указания «Лабораторный практикум по дисциплине «Основы теории передачи информации» для студентов направления 0907 — радиотехника дневной и заочной форм обучения / Сост. А.А.Савочкин. — Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2006. — 88 с.

Целью методических указаний является оказание помощи студентам в подготовке и выполнении лабораторного практикума по дисциплине «Основы теории передачи информации», а также в получении ими теоретических знаний и практических навыков выбора методов кодирования сообщений.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры радиотехники (протокол № 6 от 17 ноября 2005 г.)

Допущено учебно-методическим центром и НТС СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: кандидат технических наук, доцент Зиборов С.Р.

Ответственный за выпуск: доктор технических наук, заведующий кафедрой радиотехники Гимпилевич Ю.Б.

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                              |    |
|--------------------------------------------------------------|----|
| Введение.....                                                | 4  |
| 1. Лабораторная работа                                       |    |
| Исследование системы дискретизации, квантования и восстанов- |    |
| ления непрерывных сообщений .....                            | 5  |
| 2. Лабораторная работа                                       |    |
| Исследование помехоустойчивости оптимальных приемников де-   |    |
| терминированных радиосигналов.....                           | 21 |
| 3. Лабораторная работа                                       |    |
| Исследование методов кодирования текстовых сообщений .....   | 33 |
| 4. Лабораторная работа                                       |    |
| Исследование методов помехоустойчивого кодирования .....     | 48 |
| 5. Лабораторная работа                                       |    |
| Исследование циклического кода БЧХ .....                     | 63 |
| Библиографический список .....                               | 82 |
| Приложение А Методика измерения спектральных характеристик   |    |
| сигналов .....                                               | 83 |
| Приложение Б Таблица значений интеграла вероятности .....    | 88 |

## ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Основы теории передачи информации» изучается студентами направления 0907 — радиотехника в 8-ом семестре (дневная форма обучения) в 9-ом семестре (заочная форма обучения). В данную методическую разработку включены пять лабораторных работ, выполняемых студентами в соответствии с рабочей программой дисциплины.

Методические рекомендации по выполнению каждой лабораторной работы содержат следующие разделы: цель лабораторной работы; теоретическая часть; описание лабораторной установки; порядок выполнения лабораторной работы; содержание отчета по лабораторной работе; контрольные вопросы.

В основу лабораторного практикума положен индивидуальный метод выполнения лабораторных работ каждым студентом на персональном рабочем месте, что позволяет самостоятельно производить выполнение лабораторных работ каждым студентом. Исключением является лабораторная работа №1, которая выполняется на специализированном макете бригадой, состоящей из 2...3 студентов. В процессе выполнения работы студенты должны вести протокол выполнения работы. После завершения экспериментальной части работы, преподаватель просматривает полученные данные и подписывает протокол исследований. На основании протокола каждый студент оформляет отчет, который должен содержать титульный лист установленной формы и следующие разделы: цель работы; схему лабораторной установки; экспериментальные данные (таблицы или графики результатов); результаты теоретического исследования и выводы по работе. Каждая из работ рассчитана на выполнение в течении двух академических часов. Защита лабораторных работ производится на следующем занятии после выполнения экспериментальной части очередной работы. Для подготовки к защите рекомендуется использовать контрольные вопросы, приведенные для каждой лабораторной работы.

# **1. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА**

## **ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ ДИСКРЕТИЗАЦИИ, КВАНТОВАНИЯ И ВОССТАНОВЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СООБЩЕНИЙ**

### **1.1. Цель лабораторной работы**

Целью лабораторной работы является изучение принципов дискретизации, квантования и восстановления непрерывных сообщений, исследование основных параметров процессов дискретизации и восстановления непрерывных сообщений, овладение навыками измерения спектральных характеристик сигналов.

### **1.2. Теоретическая часть**

#### *1.2.1. Дискретизация непрерывных сообщений по времени*

В технике связи часто возникает необходимость представления детерминированных и случайных функций непрерывного аргумента (например, времени) совокупностью их значений в дискретных точках (сечениях). Такое представление называется дискретизацией функции по аргументу.

Наиболее распространенным преобразованием непрерывных сообщений является их дискретизация по времени. Это преобразование применяется при импульсных методах передачи сообщений, многоканальной передаче с временными методами уплотнения каналов, а также как промежуточная операция при преобразовании непрерывных сообщений в цифровую форму.

При дискретизации по времени возникают задачи, связанные с выбором интервала дискретизации  $T_d$  и восстановлением исходного сообщения на выходе по его отсчетам. При этом необходимо связать свойства исходных непрерывных сообщений, способы их восстановления по отсчетам

и требуемую точность восстановления. Принцип технической реализации процесса дискретизации по времени показан на рис.1.1. В качестве исходного, входного сообщения обычно используют модель сообщения с ограниченным спектром.

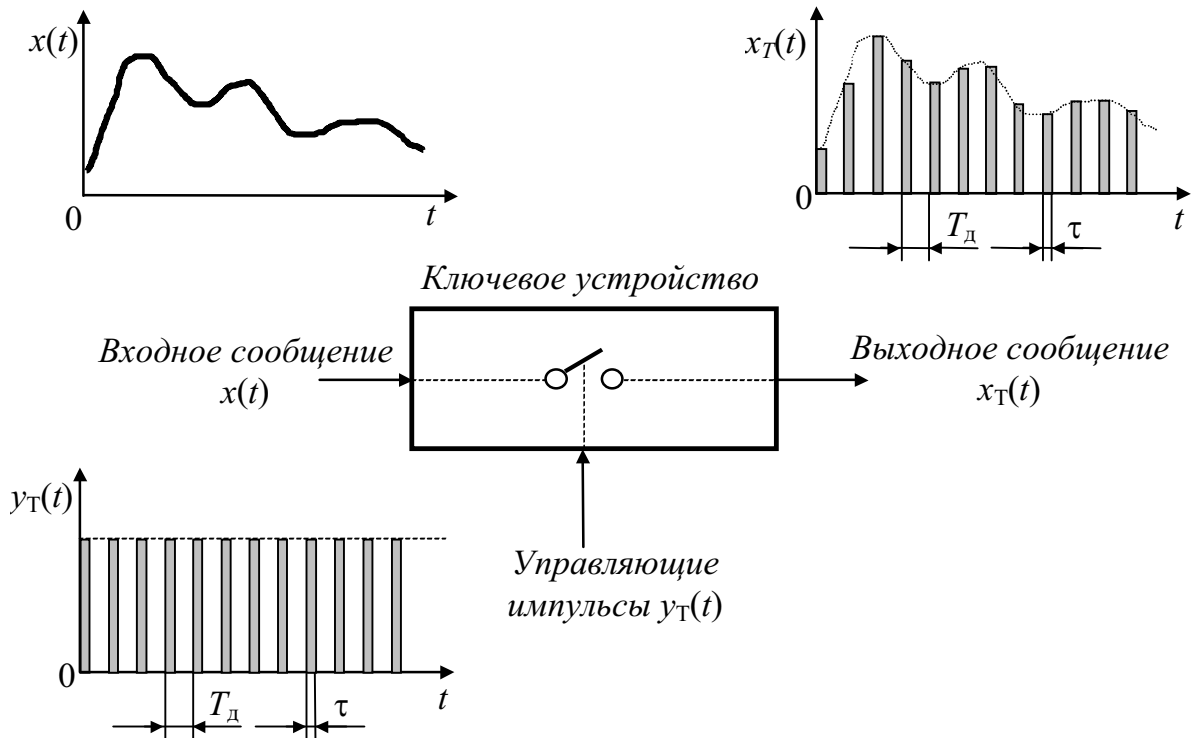


Рисунок 1.1 — Принцип технической реализации процесса дискретизации сообщений по времени

Такая идеализация допустима, поскольку при передаче сообщений по каналам связи всегда возникают неизбежные помехи и искажения. Поскольку спектральная плотность мощности  $G_X(F)$  любого реального сообщения уменьшается с ростом частоты, то, начиная с некоторого значения частоты

$$F > F_B = \Omega_B / 2\pi,$$

её величина оказывается меньше спектральной плотности мощности помех  $G_\epsilon$  на выходе канала. Поэтому вклад таких составляющих спектра в полезную информацию оказывается незначительным по сравнению с основной частью спектра (рис.1.2).

Ограничение спектра сообщения частотой  $F_B$  приводит к ошибке, относительная величина среднего квадрата которой равна

$$\delta_F^2 = \frac{\int_{F_B}^{\infty} G_x(F) dF}{\int_0^{\infty} G_x(F) dF} = \frac{\Delta P_x}{P_x}, \quad (1.1)$$

где  $\Delta P_x$  — средняя мощность отброшенной части спектра сообщения;  $P_x$  — средняя мощность всего сообщения.

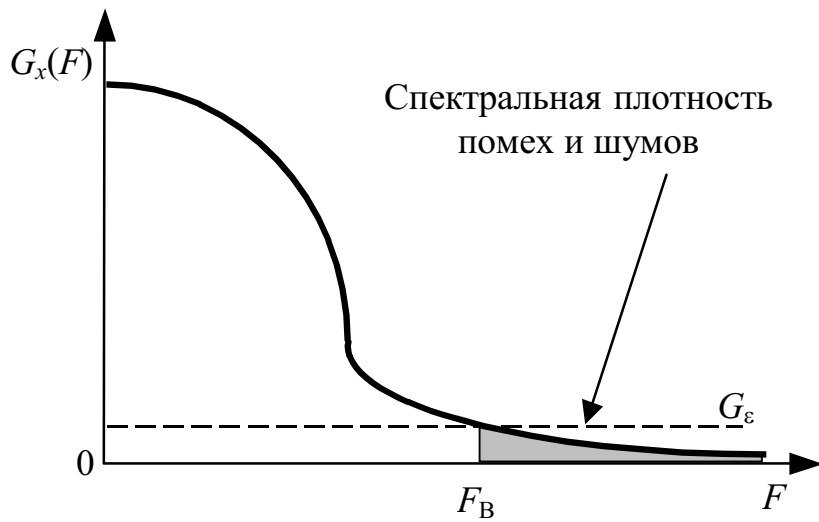


Рисунок 1.2 — Спектральная плотность сообщения

Для непрерывных сообщений с ограниченным спектром справедлива теорема Котельникова, согласно которой функция  $x(t)$ , спектральная плотность которой ограничена полосой частот от нуля до  $F_B$ , полностью определяется своими значениями, взятыми в моменты времени, отсчитываемые через интервалы [1, 2, 6]

$$T_d = \frac{1}{2 F_B}. \quad (1.2)$$

Тогда частота дискретизации определяется как  $F_d = 1 / T_d$ , а значения функции  $x(t)$  в любой точке  $t$  выражаются формулой, называемой рядом Котельникова,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k T_d) \varphi_k(t), \quad (1.3)$$

где  $\varphi_k(t) = \frac{\sin \Omega_B (t - k T_d)}{\Omega_B (t - k T_d)}$  — функция отсчетов, которая равна единице в

точке отсчета  $t = k T_d$ , а в других точках отсчета обращается в ноль.

Если в соответствии с (1.2) выполнить дискретизацию функции  $x(t)$  конечной длительности  $T_c$ , то число отсчетов будет конечным и равно

$$B = 2 F_B T_c.$$

Число  $B$  называют базой сигнала или числом степеней свободы функции  $x(t)$ . В рассматриваемом случае ряд Котельникова содержит конечное число членов, т. е. дискретизация сопровождается ошибкой, средний квадрат которой определяется формулой

$$\delta_d^2 = \frac{\int_0^{T_c} \left[ x(t) - \sum_{k=0}^{N-1} x(k T_d) \varphi_k(t) \right]^2 dt}{\int_0^T x^2(t) dt}. \quad (1.4)$$

Дискретизированное по времени сообщение представляет собой амплитудно - импульсно модулированный (АИМ) сигнал. Спектр такого сигнала неограничен, имея в своем составе полосы частот

$[k F_d - F_B; k F_d + F_B]$ , где  $k = 0, 1; 2; 3 \dots$ . Из рис 1.3 видно, что в состав спектра входит и полоса частот исходного сообщения  $x(t)$ , ограниченная диапазоном частот  $[0; F_B]$ .

Следовательно, восстановление непрерывного сигнала на приемной стороне может производиться идеальным фильтром нижних частот (ФНЧ), полоса пропускания которого равна  $F_B$ . В случае использования сигнала с широтно-импульсной модуляцией (ШИМ) спектр имеет более сложную структуру, чем спектр АИМ сигнала, поскольку содержит бесконечное число частотных полос  $[k F_d - n F_B; k F_d + n F_B]$ , где  $k$  и  $n$  — целые числа.

Сигнал может быть восстановлен с помощью ФНЧ. Однако для устранения влияния боковых частот на составляющие исходного спектра, необходимо значительно увеличить частоту дискретизации  $F_D \gg 2F_B$ .

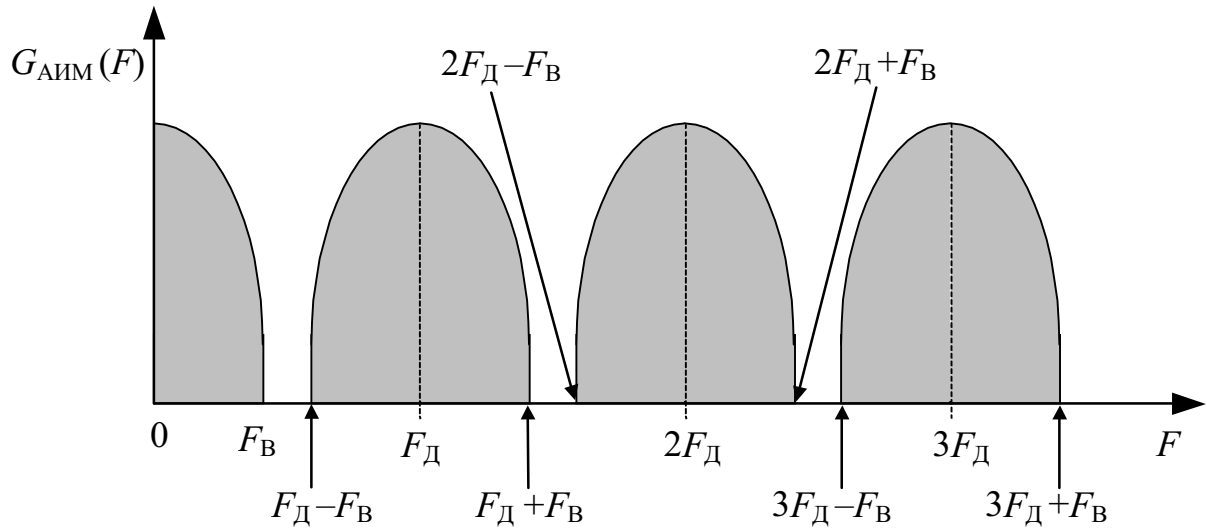


Рисунок 1.3 — Частотный спектр АИМ сигнала

Спектр сигнала с фазо - импульсной модуляцией (ФИМ) аналогичен спектру ШИМ сигнала, но амплитуды частотных составляющих исходного сигнала пропорциональны соответствующим частотам. В этом случае восстановление сигнала может производиться фильтром, частотная характеристика которого должна изменяться с учетом этой зависимости.

При этом восстановленный сигнал  $x(t)$  будет отличаться от исходного, поскольку в нем отсутствуют составляющие с частотами выше  $F_B$ . Кроме того, в полосу пропускания ФНЧ попадают перекрывающиеся части спектров высших составляющих дискретизированного сигнала.

Установлено [1, 2], что среднеквадратическое значение ошибки дискретизации  $\delta_D$  заключено в пределах

$$\delta_F < \delta_D < \sqrt{3} \delta_F. \quad (1.5)$$

Если исходный сигнал  $x(t)$  не имеет в своем спектре составляющих выше  $F_B$ , то дополнительная ошибка обусловленная перекрытием спектров не возникает и  $\delta_D \approx \delta_F$ .

На практике часто применяют предварительную фильтрацию исходного сигнала с целью ограничения спектра сигнала частотой  $F_B$  на входе системы временной дискретизации. Искажения в этом случае характеризуются величиной среднеквадратической ошибкой, вносимой входным корректирующим ФНЧ,

$$\delta_{\text{ВХ.ФНЧ}}^2 = \delta_{\text{ВХ.ВЧ}}^2 + 2\delta_{\text{ВХ.НЧ}}^2 + \delta_F^2, \quad (1.6)$$

где  $\delta_{\text{ВХ.ВЧ}}$  — среднеквадратическая ошибка из-за недостаточного подавления составляющих верхних частот, превышающих  $F_B$ ;  $\delta_{\text{ВХ.НЧ}}$  — среднеквадратическая ошибка из-за неравномерности амплитудно-частотной характеристики (АЧХ)  $K_{\text{ВХ.Ф}}(F)$  корректирующего ФНЧ.

Составляющие формулы (1.6) определяются следующими выражениями:

$$\delta_{\text{ВХ.НЧ}}^2 = \frac{\int_0^{F_B} [1 - K_{\text{ВХ.Ф}}(F)]^2 G_x(F) dF}{P_x},$$

$$\delta_{\text{ВХ.ВЧ}}^2 = \frac{\int_{F_B}^{\infty} K_{\text{ВХ.Ф}}^2(F) G_x(F) dF}{P_x}.$$

Вид амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) для ФНЧ в предположении применения фильтра Баттерворта определяется известным выражением

$$K_{\text{ВХ.Ф}}^2(F) = \frac{1}{1 + \left(\frac{F}{F_{\text{СР}}}\right)^{2N_{\Phi}}},$$

где  $F_{\text{СР}}$  — частота среза ФНЧ;  $N_{\Phi}$  — порядок фильтра.

Восстановление непрерывного сигнала из АИМ сигнала с помощью реального ФНЧ также сопровождается ошибкой, средний квадрат которой определяется выражением

$$\delta_{\text{ВЫХ.ФНЧ}}^2 = \delta_{\text{ВЫХ.НЧ}}^2 + \delta_{\text{ВЫХ.ВЧ}}^2, \quad (1.7)$$

где  $\delta_{\text{ВЫХ.НЧ}}$  — среднеквадратическая ошибка, обусловленная искажениями спектра внутри полосы частот сигнала;  $\delta_{\text{ВЫХ.ВЧ}}$  — среднеквадратическая ошибка, обусловленная неполным подавлением высших частотных составляющих АИМ сигнала.

Составляющие выражения (1.7) имеют вид:

$$\delta_{\text{ВЫХ.НЧ}}^2 = \frac{\int_0^{F_B} [1 - K_{\text{ВЫХ.Ф}}(F)]^2 G_x(F) dF}{P_x};$$

$$\delta_{\text{ВЫХ.ВЧ}}^2 = \frac{\int_{F_B}^{\infty} K_{\text{ВЫХ.Ф}}^2(F) G_x(F) dF}{P_x}.$$

Предположим, что при входном гармоническом сигнале, частотные спектры сигналов на входе и выходе восстанавливающего ФНЧ имеют вид, показанный на рис. 1.4.

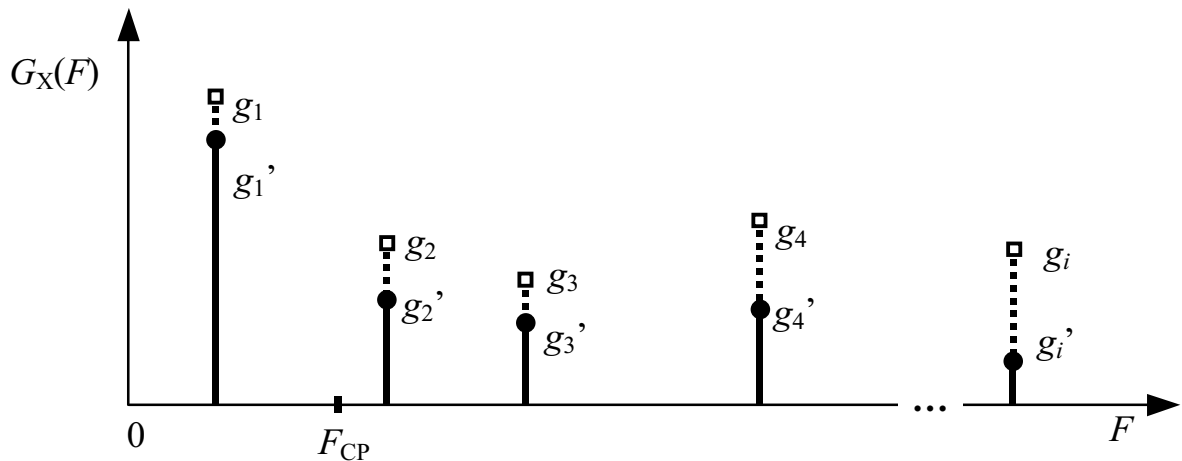


Рисунок 1.4 — Частотный спектр восстановленного сигнала ( — на выходе восстанавливающего фильтра; ----- на входе восстанавливающего фильтра)

Тогда среднеквадратическая ошибка, обусловленная паразитными искажениями спектра внутри полосы частот сигнала, рассчитывается по формуле

$$\delta_{\text{ВЫХ.НЧ}}^2 = \frac{|g_1 - g_1'| \Delta F_1}{g_1 \Delta F_1 + g_2 \Delta F_2 + g_3 \Delta F_3 + g_4 \Delta F_4 + \dots + g_i \Delta F_i}, \quad (1.8)$$

где  $g_1, g_2, g_3, g_4, \dots, g_i$  — относительные амплитуды составляющих частотного спектра для сигнала на входе восстанавливающего ФНЧ;  $g_1', g_2', g_3', g_4', \dots, g_i'$  — относительные амплитуды составляющих частотного спектра для сигнала на выходе восстанавливающего ФНЧ;  $\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3, \Delta F_4, \dots, \Delta F_i$  — полосы частот для соответствующих составляющих спектра.

Однако в предположении равенства частотных полос для различных составляющих спектра ( $\Delta F_1 = \Delta F_2 = \Delta F_3 = \Delta F_4 = \dots = \Delta F_i$ ), из формулы (1.8) получаем, что

$$\delta_{\text{ВЫХ.НЧ}}^2 = \frac{|g_1 - g_1'|}{g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + \dots + g_i}. \quad (1.9)$$

Среднеквадратическая ошибка, обусловленная неполным подавлением высших частотных составляющих, рассчитывается аналогично (1.9)

$$\delta_{\text{ВЫХ.ВЧ}}^2 = \frac{g_2 \Delta F_2 + g_3 \Delta F_3 + g_4 \Delta F_4 + \dots + g_i \Delta F_i}{g_1 \Delta F_1 + g_2 \Delta F_2 + g_3 \Delta F_3 + g_4 \Delta F_4 + \dots + g_i \Delta F_i}. \quad (1.10)$$

В случае равенства частотных полос для различных составляющих спектра ( $\Delta F_1 = \Delta F_2 = \Delta F_3 = \Delta F_4 = \dots = \Delta F_i$ ) формула (1.10) принимает вид

$$\delta_{\text{ВЫХ.ВЧ}}^2 = \frac{g_2 + g_3 + g_4 + \dots + g_i}{g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + \dots + g_i}.$$

Если допустить, что восстановление сигнала осуществляется формированием ступенчатой функции (ФНЧ не используется), то погрешность восстановления определяется выражением [3]

$$\delta_{\text{В}} = 2 [ 1 - R_x ( T_{\text{В}} ) ],$$

где  $R_x(T_{\text{В}})$  — коэффициент корреляции процесса  $x(t)$ ;  $T_{\text{В}}$  — интервал воспроизведения.

В общем случае в системе интервал воспроизведения может быть не равен интервалу дискретизации входного сигнала.

В технических приложениях выбор интервала дискретизации непрерывных сообщений часто определяется применяемым методом восстановления сообщения по его отсчетам, который отличается от метода восстановления Котельникова. При этом приходится увеличивать число отсчетов по сравнению с предельной дискретизацией по Котельникову. Фактически используется интервал дискретизации

$$T_d = \frac{1}{\mu F_B},$$

где  $\mu$  — коэффициент, удовлетворяющий условию  $\mu > 2$ .

Практика показывает, что достаточно выбирать значения  $\mu \cong 2,5 \dots 5$ .

### 1.2.2. Квантование непрерывных сообщений по уровню

При амплитудном квантовании непрерывный диапазон значений аналогового сигнала заменяется конечным множеством разрешенных для передачи значений — уровней квантования. Интервал  $\Delta x$  между соседними уровнями квантования называют шагом квантования. Квантование является равномерным при постоянном шаге квантования  $\Delta x$  и неравномерным при изменении шага от уровня к уровню по некоторому правилу.

На рис 1.5 показана часть шкалы квантования (три уровня) и введены следующие обозначения:  $x_{i-1}$ ,  $x_i$ ,  $x_{i+1}$  — уровни квантования;  $\Delta x_i$  — шаг квантования;  $\Delta \varepsilon_i(t)$  — текущая ошибка квантования на  $i$ -ом шаге квантования.

В результате квантования непрерывное сообщение  $x(t)$  заменяется дискретным сообщением  $x_{KB}(t)$ , которое имеет ступенчатую форму и может принимать только конечное число мгновенных значений, равное числу уровней квантования  $N_{KB}$ . Текущая ошибка квантования  $\varepsilon_{KB}(t)$  представляет собой разность между  $x(t)$  и  $x_{KB}(t)$

$$\varepsilon_{KB}(t) = x_{KB}(t) - x(t),$$

которая в пределах одного шага для  $i$  - го уровня

$$-\frac{\Delta x_i}{2} \leq \Delta \varepsilon_i(t) \leq \frac{\Delta x_i}{2}.$$

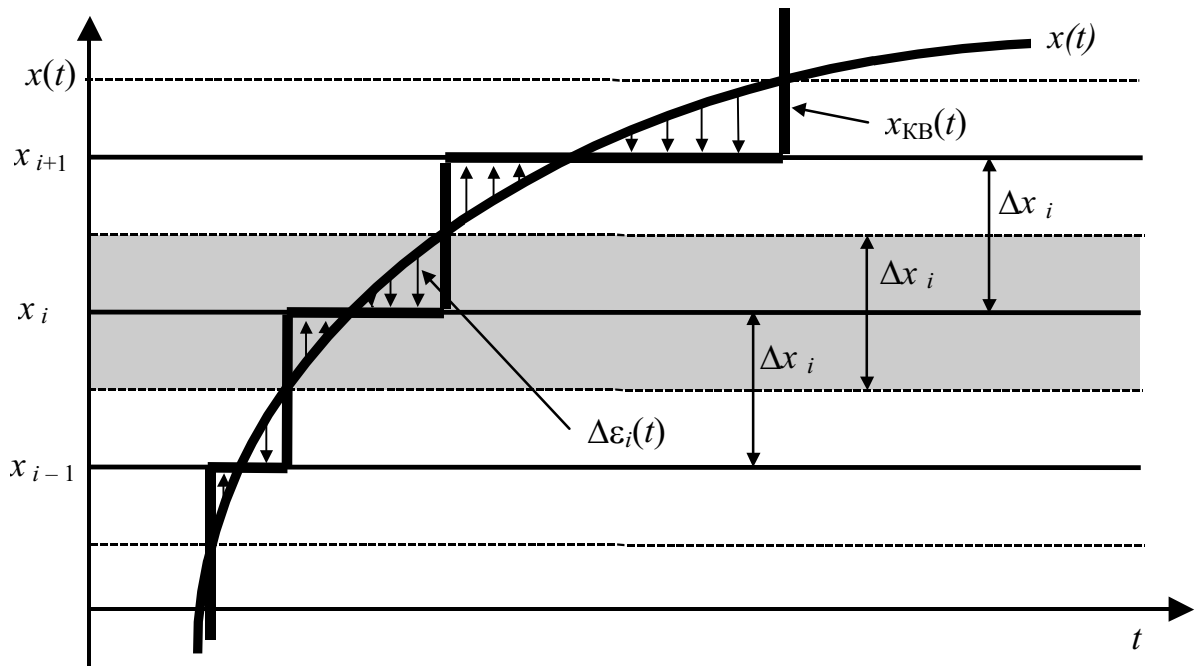


Рисунок 1.5 — Принцип квантования непрерывного сообщения по уровню

Практически для различных классов непрерывных сообщений при равномерном квантовании используется оценка ошибки квантования

$$\delta_{\text{KB}} = (1..2) / N_{\text{KB}},$$

где  $N_{\text{KB}}$  — число уровней квантования.

Следует отметить также, что квантование непрерывных сообщений по уровню как отдельная самостоятельная операция практически не применяется. Обычно эта операция является частью преобразования непрерывного сообщения в цифровую форму и выполняется с помощью аналого-цифровых преобразователей (АЦП).

### 1.3. Описание лабораторной установки

Лабораторная установка для проведения лабораторной работы содержит:

- лабораторный макет для исследования системы дискретизации, квантования и восстановления непрерывных сообщений;
- электронный осциллограф С1 - 93;
- низкочастотный анализатор спектра на основе персональной ЭВМ;
- низкочастотный генератор ГЗ - 102.

Упрощенная структура лабораторной установки представлена на рис. 1.6. Установка построена на основе специализированного макета. Входной синусоидальный сигнал, вырабатываемый генератором низкой частоты (ГНЧ), подается на вход АЦП. В макете используется 10-ти разрядный АЦП и 10-ти разрядный цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП). Макет позволяет установить следующие значения частоты дискретизации:  $F_d = 4; 5; 6; 8; 10; 12; 16; 20; 24$  кГц. Частота дискретизации задается кварцевым генератором, который входит в состав синтезатора частоты (СЧ) с электронным управлением. Управление частотой СЧ осуществляется с передней панели макета, на которой установлен светодиодный индикатор частоты дискретизации.

Выходной параллельный код АЦП через ограничитель разрядности кода (ОРК) поступает на формирующий ЦАП. ОРК позволяет изменять разрядность двоичного кода от 1 до 10 разрядов, для чего используется линейка переключателей «9», «8»... «1», «0». В нижнем положении переключателей соответствующие разряды АЦП-ЦАП отключаются. Например, для использования семиразрядного кода следует переключатели «2», «1», «0» поставить в нижнее положение, а все остальные переключатели в верхнее.

На выходе ЦАП формируется ступенчатый непрерывный сигнал, который подается на восстанавливающий ФНЧ. В макете используется четыре различных ФНЧ: один фильтр второго порядка, два фильтра четвертого порядка и один фильтр восьмого порядка. Такой набор фильтров позволяет при необходимости установить требуемый порядок восстанавли-

вающего фильтра (от второго до восемнадцатого включительно). Например, для установки ФНЧ десятого порядка необходимо включить фильтры «2» и «8» либо «2», «4», «4». Частот среза всех используемых ФНЧ  $F_{\text{ср}} = 3400$  Гц. В состав лабораторной установки входят: электронный осциллограф (ЭО) и анализатор спектра (АС), на входы, которых подается сигнал с выхода ФНЧ.

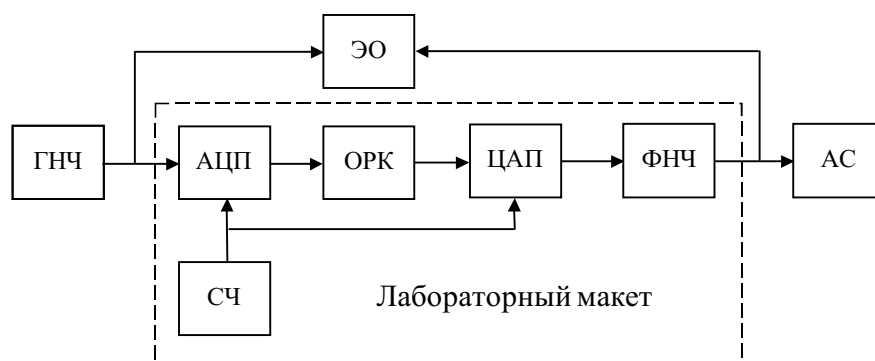


Рисунок 1.6 — Структурная схема лабораторной установки

#### 1.4. Порядок выполнения лабораторной работы

1.4.1. Номер варианта определяется двумя последними цифрами зачетной книжки. Для заданного варианта, выбранного в соответствии с табл.1.1, получить спектр восстановленного сигнала, при входном синусоидальном сигнале частотой  $F_{\text{с}}$ . Разрядность АЦП и ЦАП выбрать равной 10. Измерения выполнить при включенном фильтре порядка  $N_{\text{ф}}$ . Методика измерения спектральных характеристик представлена в Приложении А.

1.4.2. Проанализировать влияние порядка восстанавливающего ФНЧ на погрешность дискретизации и восстановления. Для этого измерить спектры восстановленного сигнала, при входном синусоидальном сигнале частотой  $F_{\text{с}}$ . Измерения провести для ФНЧ порядков  $N_{\text{ф}-4}$ ,  $N_{\text{ф}-2}$ ,  $N_{\text{ф}}$ ,  $N_{\text{ф}+2}$ ,  $N_{\text{ф}+4}$ . Разрядность АЦП-ЦАП выбрать равной 10. Частота дискретизации  $F_{\text{д}}$  указана в табл.1.1.

1.4.3. Проанализировать влияние разрядности АЦП-ЦАП на ошибку дискретизации и восстановления. Для этого получить спектры восстановленного сигнала, при входном синусоидальном сигнале частотой  $F_C$ . Измерения провести при числе разрядов АЦП и ЦАП: 2, 3, 4, 5, 6. При этом установить порядок ФНЧ  $N_\Phi=2$ . Частота дискретизации указана в табл.1.1.

Таблица 1.1 — Исходные данные для выполнения лабораторной работы

| $m$ - предпоследняя цифра зачетной книжки | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5    | 6    | 7    | 8   | 9   |
|-------------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|------|-----|-----|
| $N_\Phi$                                  | 2   | 4   | 6   | 8   | 10  | 2    | 4    | 6    | 8   | 10  |
|                                           |     |     |     |     |     |      |      |      |     |     |
| $n$ - последняя цифра зачетной книжки     | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5    | 6    | 7    | 8   | 9   |
| $F_C$ , кГц                               | 0,5 | 1,2 | 2   | 2,2 | 2,7 | 2,8  | 2,5  | 3,1  | 2,5 | 3,2 |
| $F_D$ , кГц                               | 4   | 5   | 6   | 8   | 10  | 12   | 16   | 20   | 24  | 10  |
| $F_{\text{ПОМ}}$ , кГц                    | 3,5 | 3,8 | 4,1 | 5,2 | 8,1 | 10,5 | 13,6 | 18,6 | 22  | 8,3 |

1.4.4. Проанализировать влияние частоты дискретизации на погрешность дискретизации и восстановления. Для этого измерить спектры восстановленного сигнала, при входном синусоидальном сигнале частотой  $F_C$ . Измерения провести для трех значений частоты дискретизации (одно возможное значение меньше указанного в табл.1.1, заданное  $F_D$  и одно возможное значение больше указанного в табл.1.1). Число разрядов АЦП и ЦАП выбрать равным 10.

1.4.5. По результатам измерений, полученных при выполнении п.п. 1.4.2, 1.4.3, 1.4.4 рассчитать погрешности дискретизации, квантования

и восстановления. Результаты расчетов представить в виде таблиц по форме табл.1.2. и графиков зависимостей составляющих среднеквадратической ошибки ( $\delta_{\text{ВЫХ.НЧ}}^2$ ,  $\delta_{\text{ВЫХ.ВЧ}}^2$ ,  $\delta_{\text{ВЫХ.ФНЧ}}^2$ ,  $\delta_{\text{КВ}}^2$ ) от исследуемых параметров (по п. 1.4.2 — зависимостей от порядка восстанавливающего ФНЧ; по п. 1.4.3 — зависимостей от разрядности АЦП и ЦАП; по п. 1.4.4 — зависимостей от частоты дискретизации).

Таблица 1.2 — Результаты экспериментальных исследований

| Исследуемый параметр      | Уровень амплитуд составляющих спектра, дБ |        |        |     | Среднеквадратическая ошибка, % |                            |                             |                        |
|---------------------------|-------------------------------------------|--------|--------|-----|--------------------------------|----------------------------|-----------------------------|------------------------|
|                           |                                           |        |        |     | $\delta_{\text{ВЫХ.НЧ}}^2$     | $\delta_{\text{ВЫХ.ВЧ}}^2$ | $\delta_{\text{ВЫХ.ФНЧ}}^2$ | $\delta_{\text{КВ}}^2$ |
| Например,<br>$N_{\Phi-4}$ | $g_1$                                     | $g_2$  | $g_3$  | ... |                                |                            |                             |                        |
|                           |                                           |        |        |     |                                |                            |                             |                        |
|                           |                                           |        |        |     |                                |                            |                             |                        |
|                           | $g_1'$                                    | $g_2'$ | $g_3'$ | ... |                                |                            |                             |                        |
| Например,<br>$N_{\Phi-2}$ | $g_1$                                     | $g_2$  | $g_3$  | ... |                                |                            |                             |                        |
|                           |                                           |        |        |     |                                |                            |                             |                        |
|                           |                                           |        |        |     |                                |                            |                             |                        |
|                           | $g_1'$                                    | $g_2'$ | $g_3'$ | ... |                                |                            |                             |                        |
| ...                       | $g_1$                                     | $g_2$  | $g_3$  | ... |                                |                            |                             |                        |
|                           |                                           |        |        |     |                                |                            |                             |                        |
|                           |                                           |        |        |     |                                |                            |                             |                        |
|                           | $g_1'$                                    | $g_2'$ | $g_3'$ | ... |                                |                            |                             |                        |
| Например,<br>$N_{\Phi+4}$ | $g_1$                                     | $g_2$  | $g_3$  | ... |                                |                            |                             |                        |
|                           |                                           |        |        |     |                                |                            |                             |                        |
|                           |                                           |        |        |     |                                |                            |                             |                        |
|                           | $g_1'$                                    | $g_2'$ | $g_3'$ | ... |                                |                            |                             |                        |

1.4.6. Исследовать спектр восстановленного сигнала при включении на выходе восстанавливающего ФНЧ четвертого порядка и подаче на вход макета синусоидального сигнала частотой  $F_{\text{ПОМ}}$ . Значение частоты помехи  $F_{\text{ПОМ}}$  указано в табл.1.1. Число разрядов АЦП и ЦАП установить равным 8. Изобразить осциллограммы входного и выходного сигналов. Пояснить полученные результаты.

### **1.5. Содержание отчета по лабораторной работе**

1.5.1. Сформулировать цель лабораторной работы, в которой указать какие зависимости и параметры исследуются в лабораторной работе.

1.5.2. Представить упрощенную структурную схему лабораторной установки.

1.5.3. Представить результаты исследования спектральных характеристик в виде таблиц и графических зависимостей. Допускается однотипные графики приводить совместно или друг под другом в одном и том же масштабе.

1.5.4. Привести временные зависимости (осциллограммы) по п. 1.4.6.

1.5.5. Выводы по работе должны содержать подробный анализ и сопоставление экспериментальных данных, подробное обсуждение результатов и возможных путей совершенствования лабораторной установки.

### **1.6. Контрольные вопросы**

1.6.1. Охарактеризуйте области применения дискретизации непрерывных сообщений по времени и квантования по уровню.

1.6.2. Сформулируйте теорему Котельникова.

1.6.3. Охарактеризуйте источники погрешности дискретизации функций конечной длительности и имеющих ограниченный спектр.

1.6.4. Охарактеризуйте спектральные характеристики АИМ, ШИМ, ФИМ сигналов и основные принципы выбора параметров системы восстановления сообщения, содержащегося в этих сигналах.

1.6.5. Охарактеризуйте назначение входного ФНЧ системы дискретизации по времени и определите, каким образом рассчитывается

среднеквадратическая ошибка, обусловленная использованием входного ФНЧ.

1.6.6. Определите погрешность восстановления непрерывного сигнала. Поясните, как рассчитываются составляющие погрешности.

1.6.7. Охарактеризуйте принцип квантования непрерывных сообщений по уровню. Опишите, как определяется среднеквадратическая ошибка квантования.

1.6.8. Энергетический спектр непрерывного сообщения определяется выражением

$$G_x(F) = \frac{1}{1 + (F \cdot \tau)^2}.$$

Допустимая величина полной среднеквадратической ошибки преобразования  $\delta = 10^{-2}$ . Определить число уровней квантования и минимально возможную частоту дискретизации по времени.

1.6.9. Определить базу сигнала, представляющего собой комбинацию из 15 элементарных прямоугольных двоичных импульсов длительностью  $\tau_{\text{и}} = 20$  мс.

1.6.10. Выберите порядок восстанавливающего фильтра для системы, если требуется обеспечить подавление внеполосных сигналов  $\Delta = -80$  дБ. Частота дискретизации сигнала  $F_{\text{д}} = 8$  кГц, спектр телефонного сообщения занимает полосу частот 300...3400 Гц.

1.6.11. Перечислите и охарактеризуйте методы анализа спектральных характеристик реальных сигналов.

1.6.12. Коэффициент корреляции случайного стационарного процесса, подлежащего дискретизации,  $R_x(\tau) = \exp(-0,1|\tau|)$ . Определите интервал воспроизведения процесса по времени  $T_{\text{д}}$ , при котором относительная погрешность восстановления  $\delta_{\text{в}} = 1\%$ .

## 2. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

### ИССЛЕДОВАНИЕ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРИЕМНИКОВ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ РАДИОСИГНАЛОВ

#### 2.1. Цель лабораторной работы

Целью лабораторной работы является закрепление теоретических сведений о принципах различения радиосигналов и исследование помехоустойчивости оптимальных приемников детерминированных радиосигналов.

#### 2.2. Теоретическая часть

Основная задача радиотехнических систем передачи информации (РТСПИ) — наиболее достоверное воспроизведение сообщений, заключенных в принимаемом радиосигнале, искаженном помехами. Задача различения — это процесс принятия решения относительно того, какой из семейства возможных радиосигналов присутствует на входе приемника РТСПИ на основе анализа выходного напряжения приемника РТСПИ.

На вход приемного устройства любой РТСПИ поступает колебание, отличающееся от переданного сигнала из-за действия помех и шумов. При этом для канала с известными параметрами сигнал на входе приемника представим в виде аддитивной смеси

$$x(t) = s_i(t) + n(t),$$

где  $s_i(t)$  — передаваемый сигнал;  $n(t)$  — аддитивный шум, в качестве модели которого принимается гауссовский белый шум с нулевым средним и со спектральной плотностью  $N_0$ .

Задача приема дискретных сообщений на фоне шумов решается на основе статистического подхода, согласно которому при передаче дискретных сообщений используется реализация сигнала  $s_i(t)$  на интервале времени  $(0, T)$ .

Приемное устройство должно выбрать одну из  $M$  возможных гипотез, среди которых только одна является истинной, а остальные ошибочными. Выбор гипотезы основывается на некотором заранее установленном правиле, которое вырабатывается в соответствии с критерием качества приема.

Помехи в случае бинарной системы могут привести к ошибкам двух видов: приему  $S_1$  при передаче  $S_2$  и наоборот. Следовательно, существуют ненулевые условные вероятности  $P(\hat{s}_1/s_2)$  и  $P(\hat{s}_2/s_1)$ , где  $\hat{s}_1$  и  $\hat{s}_2$  — гипотезы или оценки принимаемых сигналов. Тогда полная вероятность искажения сигнала  $s_1$  (вероятность ошибки первого рода)

$$P_{\text{ОШ1}} = P(s_1) \cdot P(\hat{s}_2/s_1),$$

где  $P(s_1)$  — априорная вероятность появления сигнала  $s_1$  на передающей стороне РТСПИ.

Полная вероятность искажения сигнала  $s_2$  (вероятность ошибки второго рода)

$$P_{\text{ОШ2}} = P(s_2) \cdot P(\hat{s}_1/s_2),$$

где  $P(s_2)$  — априорная вероятность появления сигнала  $s_2$  на передающей стороне РТСПИ.

Тогда качество всей РТСПИ целесообразно оценивать по величине полной вероятности ошибки

$$P_{\text{полн.ош}} = P_{\text{ОШ1}} + P_{\text{ОШ2}}.$$

В системах связи часто критерием качества различения считается критерий идеального наблюдателя, согласно которому минимизируется величина вероятности полной ошибки  $P_{\text{полн.ош}} \rightarrow \min$ .

Однако ошибки могут иметь разную степень нежелательности (различный «вес»). В этом случае вводят понятие среднего риска

$$r_{\text{ср}} = r_1 P_{\text{ОШ1}} + r_2 P_{\text{ОШ2}},$$

где  $r_1, r_2$  — риск («цена») ошибки первого и второго рода.

В качестве критерия качества различения в этом случае служит критерий минимума среднего риска  $r_{cp} \rightarrow \min$ .

В случае различения сигналов с полностью известными параметрами для простейшего канала связи, в котором случайным является только гауссовский белый шум  $n(t)$ , алгоритм различения имеет вид [4, 5]

$$P(s_1) \cdot \exp\left(\frac{2Z_1}{N_0} - \frac{E_{C1}}{N_0}\right) \underset{\hat{s}_2}{\overset{\hat{s}_1}{>}} P(s_2) \cdot \exp\left(\frac{2Z_2}{N_0} - \frac{E_{C2}}{N_0}\right), \quad (2.1)$$

где  $Z_1 = \int_0^T x(t) \cdot s_1(t) dt$ ;  $Z_2 = \int_0^T x(t) \cdot s_2(t) dt$  — корреляционные интегралы

для сигналов  $s_1$  и  $s_2$  соответственно;  $E_{C1} = \int_0^T S_1^2(t) dt$ ,  $E_{C2} = \int_0^T S_2^2(t) dt$  —

энергии сигналов  $S_1$  и  $S_2$ .

Исходя из формулы (2.1), оптимальное правило различения можно свести к следующему:

$$\frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) \cdot [s_1(t) - s_2(t)] dt \underset{\hat{s}_2}{\overset{\hat{s}_1}{>}} \ln \frac{P(s_1)}{P(s_2)} + \frac{E_{C1} - E_{C2}}{N_0} = h, \quad (2.2)$$

где  $h$  — пороговый уровень.

При превышении порога величиной, стоящей в левой части неравенства (2.2), принимается решение о правильности гипотезы  $\hat{s}_1$  (т.е. в реализации присутствует сигнал  $s_1$ ). Если значение разностного интеграла в (2.2) меньше порога  $h$ , принимается решение о правильности гипотезы  $\hat{s}_2$  (т. е. в реализации присутствует сигнал  $s_2$ ). Таким образом, задача различения сигналов может трактоваться как задача проверки статистических гипотез.

Представленный алгоритм (2.1) и (2.2) учитывает несимметрию системы связи относительно вероятностей появления сигналов  $s_1$  и  $s_2$ .

Если сигналы  $s_i(t)$  выбраны таким образом, что все их реализации имеют одинаковые энергии ( $E_{C1} = E_{C2} = E$ ) и равные вероятности появления ( $P(s_1) = P(s_2) = 0,5$ ), то алгоритм различения сводится к виду:

$$\begin{array}{c} \hat{s}_1 \\ > \\ Z_1 < \\ \hat{s}_2 \end{array} Z_2. \quad (2.3)$$

Формирование корреляционного интеграла может быть выполнено методом оптимальной фильтрации или корреляционным методом, т. е. прямым вычислением. Для оценки полной ошибки  $P_{\text{полн.ош}}$  различителя двух детерминированных сигналов рассмотрим симметричную систему передачи, в которой  $E_{C1} = E_{C2} = E$ . Тогда при наличии в смеси  $x(t)$  сигнала  $s_1(t)$  выражение в левой части неравенства (2.2) можно представить в виде

$$Z_1 = \int_0^T [s_1(t) + n(t)][s_1(t) - s_2(t)] dt.$$

Характеристики случайной гауссовской величины  $Z_1$  следующие:

- среднее значение  $\bar{Z}_1 = E(1 - p_s)$ ;
- дисперсия  $\sigma_Z^2 = EN_0(1 - p_s)$ ,

где  $p_s = \frac{1}{E} \int_0^T S_1(t)S_2(t)dt$  — коэффициент взаимной корреляции между сигналами  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ .

При наличии в смеси  $x(t)$  сигнала  $s_2(t)$  случайная величина  $Z_2$ , образующаяся на выходе коррелятора или согласованного фильтра, определяется выражением

$$Z_2 = \int_0^T [s_2(t) + n(t)][s_1(t) - s_2(t)] dt.$$

Характеристики случайной гауссовской величины  $Z_2$  следующие:

- среднее значение  $\bar{Z}_2 = -E(1 - p_s)$ ;
- дисперсия  $\sigma_Z^2 = EN_0(1 - p_s)$ .

Плотности вероятности  $w(Z_1)$  и  $w(Z_2)$  определяются при условии присутствия в смеси сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  соответственно. Вид этих функций показан на рис.2.1.

Качество различения определяется вероятностью полной ошибки  $P_{\text{полн.ош}}$ , которая для симметричной системы имеет вид

$$P_{\text{полн.ош}} = 0,5 \left[ \int_0^{\infty} w(Z_2) dZ_2 + \int_{-\infty}^0 w(Z_1) dZ_1 \right],$$

или сводится к вычислению интеграла вероятности  $\Phi(x)$

$$P_{\text{полн.ош}} = 1 - \Phi \left( q \sqrt{\frac{1 - p_s}{2}} \right), \quad (2.4)$$

где  $q = \sqrt{\frac{2E}{N_0}}$  — энергетический параметр;  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$  —

интеграл вероятности.

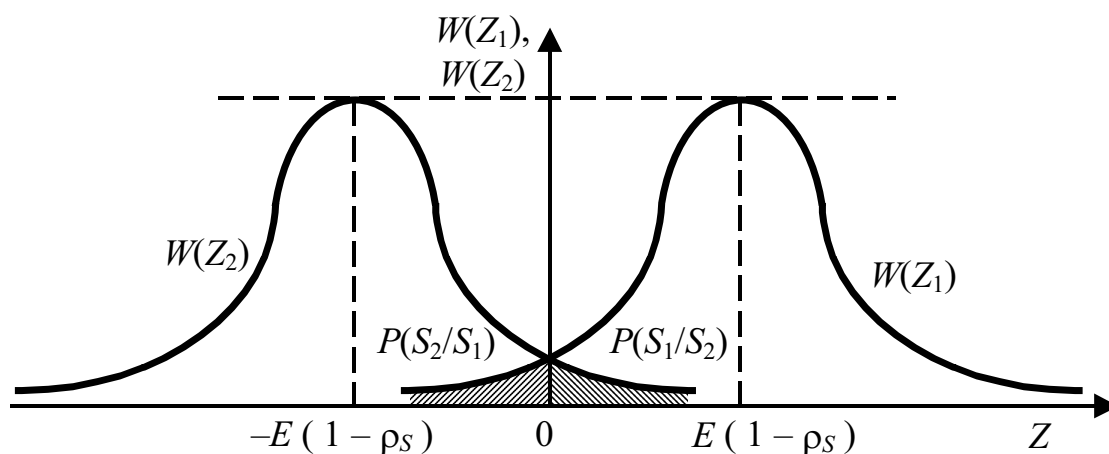


Рисунок 2.1 — Плотности вероятности для оптимального приемника

Таблицы интеграла вероятности  $\Phi(x)$  представлены в Приложении Б. Выражение (2.4) позволяет сравнить помехоустойчивость опти-

мальных различителей при различных видах манипуляции для сигналов с активной паузой:

$$S_1(t) = U_{m1} \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1); \quad S_2(t) = U_{m2} \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2).$$

При **частотной манипуляции** (ЧМн):  $U_{m1}=U_{m2}; f_1 - f_2 = \Delta f; \varphi_1 = \varphi_2$ .

На практике используют  $\Delta f \gg \frac{1}{T}$  и в этом случае сигналы можно считать ортогональными, т. е.  $p_s = 0$ . Вероятность полной ошибки в этом случае [5]

$$P_{\text{полн.ош}} = 1 - \Phi\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right).$$

При **фазовой манипуляции** (ФМн):  $U_{m1} = U_{m2}; f_1 = f_2; \varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi$ . Наиболее интересен случай противоположных сигналов, при котором  $\Delta\varphi=180^\circ$ ,

$S_1(t) = -S_2(t)$  и  $p_s = -1$ . Вероятность полной ошибки в этом случае

$$P_{\text{полн.ош}} = 1 - \Phi(q).$$

При **амплитудной манипуляции** (АМн) в общем случае:  $U_{m1} \neq U_{m2}; f_1 = f_2; \varphi_1 = \varphi_2$  и сигналы имеют различные энергии. При вычислении  $P_{\text{полн.ош}}$ ,  $q$  и  $p_s$  следует использовать значение средней энергии сигнала

$$E_{\text{ср}} = \frac{E_{C1} + E_{C2}}{2}.$$

В частности для системы с пассивной паузой:  $E_{C1}=0; E_{C2} = E; p_s = 0$ ;  
 $E_{\text{ср}} = \frac{E}{2}$ . Вероятность полной ошибки в этом случае

$$P_{\text{полн.ош}} = 1 - \Phi\left(\frac{q}{2}\right),$$

где  $q = \sqrt{\frac{2E}{N_0}}$ .

Графики зависимостей  $P_{\text{полн.ош}}$  от  $q$  для различных видов манипуляции приведены на рис.2.2. Из представленных зависимостей следует,

что при заданном энергетическом потенциале РТСПИ противоположные сигналы обеспечивают наименьшую вероятность ошибки  $P_{\text{полн.ош}}$ .

Следует отметить независимость помехоустойчивости рассмотренного алгоритма приема от формы огибающих отдельных посылок используемых сигналов. Важна лишь энергия сигнала, приходящаяся на один бит информации, и вид используемых сигналов.

К. Шенноном установлен предел при передаче сигналов по гауссовскому каналу : в идеальной системе для обеспечения  $P_{\text{полн.ош}} = 0$  достаточно иметь отношение  $q^2 = \ln 2 = 0,7$ . Однако такая система нереализуема, поскольку требует кодирования, приводящего к неограниченному возрастанию времени задержки.

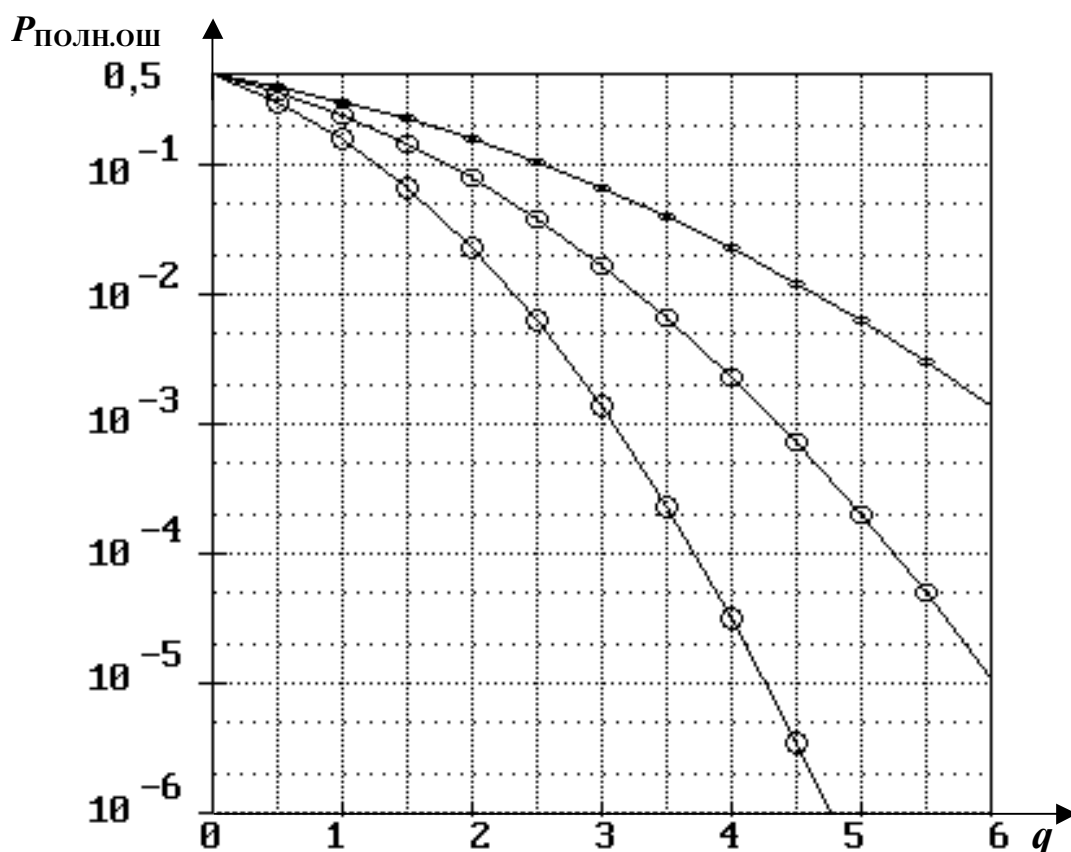


Рисунок 2.2 — Характеристики помехоустойчивости:

- — амплитудная манипуляция с пассивной паузой;
- — частотная манипуляция (ортогональные сигналы);
- — фазовая манипуляция при  $\Delta\varphi = 180^\circ$  (противоположные сигналы).

### 2.3. Порядок выполнения лабораторной работы

2.3.1. Задание к лабораторной работе выполняется в соответствии с вариантом и данными табл.2.1., табл.2.2. и табл. 2.3. Номер варианта определяется двумя последними цифрами зачетной книжки (ЗК).

2.3.2. Используя специализированную программу анализа особенностей различения двоичных сигналов, рассчитать зависимости полной вероятности ошибки  $P_{\text{полн.ош}}$  в РТСПИ при изменении величины энергетического параметра обнаружения  $q$  для указанного в табл. 2.1. вида манипуляции (АМн, ЧМн или ФМн). Результаты представить в виде семейства графиков для всех возможных значений параметра манипуляции (см. табл. 2.2). В результате исследований необходимо получить семейство зависимостей в виде четырех графиков и таблиц значений полной вероятности ошибки  $P_{\text{полн.ош}}$  при изменении величины энергетического параметра обнаружения  $q$ .

Таблица 2.1 — Исходные данные для выбора вида модуляции

| $N$ последняя цифра ЗК | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   |
|------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $q_{\text{ср}}$        | 1,7 | 1,9 | 2,1 | 2,4 | 2,6 | 2,8 | 3   | 3,2 | 3,4 | 3,6 |
| Вид манипуляции        | АМн |     |     | ЧМн |     |     | ФМн |     |     |     |

Таблица 2.2 — Условные типы сигналов и их параметры

| Условный тип сигнала | 1                 | 2   | 3   | 4   | 5              | 6              | 7              | 8               | 9                | 10              | 11               | 12    |
|----------------------|-------------------|-----|-----|-----|----------------|----------------|----------------|-----------------|------------------|-----------------|------------------|-------|
| Вид манипуляции      | АМн               |     |     |     | ЧМн            |                |                |                 | ФМн              |                 |                  |       |
| Параметр манипуляции | $U_{m1} / U_{m2}$ |     |     |     | $\Delta f$     |                |                |                 | $\Delta \varphi$ |                 |                  |       |
|                      | 0                 | 0,2 | 0,4 | 0,8 | $\frac{1}{4T}$ | $\frac{1}{2T}$ | $\frac{3}{4T}$ | $> \frac{1}{T}$ | $\frac{\pi}{3}$  | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$ |

2.3.3. Используя специализированную программу анализа особенностей различения двоичных сигналов, рассчитать зависимости полной вероятности ошибки  $P_{\text{полн.ош}}$  в РТСПИ при изменении величины энергетического параметра обнаружения  $q$  для указанных в табл. 2.3. сигналов.

В результате исследований необходимо получить семейство зависимостей в виде трех графиков и таблиц значений полной вероятности ошибки  $P_{\text{полн.ош}}$  при изменении величины энергетического параметра обнаружения  $q$ .

2.3.4. Провести модельный эксперимент для указанного в табл.2.2 вида манипуляции и всех возможных значений параметра манипуляции. Результаты представить в виде таблицы результатов и графика зависимости вероятности ошибки от значения параметра модуляции. Построить в отчете качественную зависимость для гистограммы одного из вариантов модельного эксперимента.

Таблица 2.3 — Типы сигналов для исследования

| М предпо-<br>следняя<br>цифра ЗК                             | 0 | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
|--------------------------------------------------------------|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Условный<br>тип сигнала<br>в соответст-<br>вии<br>с табл.2.2 | 1 | 2  | 3  | 4  | 1  | 2  | 3  | 4  | 1  | 2  |
|                                                              | 5 | 6  | 7  | 8  | 6  | 7  | 8  | 7  | 8  | 5  |
|                                                              | 9 | 10 | 11 | 12 | 11 | 12 | 10 | 10 | 11 | 12 |

2.3.4. Разработать структурную схему оптимального различителя для указанного в табл. 2.2 вида манипуляции. Изобразить временные диаграммы, иллюстрирующие работу корреляционного различителя при данном виде манипуляции.

## 2.4. Содержание отчета по лабораторной работе

2.4.1. Привести цель лабораторной работы, в которой сформулировать какие зависимости и параметры исследуются в лабораторной работе.

2.4.2. Произвести вывод выражения для коэффициента корреляции  $\rho$  при указанном типе модуляции сигналов. В отчете по работе необходимо представить все выкладки и промежуточные результаты.

2.4.3. Представить результаты исследований по п.п. 2.3.2. — 2.3.5. в виде таблиц и графиков.

2.4.4. Сделать выводы по работе, в которых оценить помехоустойчивость различных видов манипуляции при передаче сообщений в двоичном канале связи.

## 2.5. Контрольные вопросы

2.5.1. Сформулируйте задачу различения бинарных сигналов на фоне помех и назовите основные допущения при решении классической задачи различения сигналов.

2.5.2. Охарактеризуйте основные критерии различения сигналов и приведите их сравнительную характеристику.

2.5.3. Определите структуру оптимального приемника сигналов с активной паузой для следующих условий:

$$\text{а) } E_{C1} \neq E_{C2}, P(s_1) = P(s_2) = 0,5; \quad \text{б) } E_{C1} = E_{C2}, P(s_1) \neq P(s_2).$$

2.5.4. Выведите выражение для коэффициента взаимной корреляции простых сигналов с частотной манипуляцией

$$s_1(t) = s_0 \sin(\omega_1 t + \varphi_1), s_2(t) = s_0 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \text{ при } 0 \leq t \leq T.$$

Определите условия, при которых помехоустойчивость оптимального приемника таких сигналов достигает максимального значения.

2.5.5. Какие сигналы обеспечивают максимальную потенциальную помехоустойчивость в случае бинарных сигналов, известных точно?

2.5.6. Охарактеризуйте, что представляет собой система связи идеальная в смысле К. Шеннона? Приведите причины нереализуемости такой системы.

2.5.7. Назовите и охарактеризуйте основные этапы решения задачи различения.

2.5.8. Охарактеризуйте оптимальный прием на основе согласованной линейной фильтрации. Опишите принципы и особенности реализации.

2.5.9. Оцените помехоустойчивость оптимального приема сигналов с известными параметрами на примере частотной и фазовой манипуляций.

2.5.10. Разработайте структурную схему оптимального приемника для системы передачи информации с числом возможных сигналов  $M_c = 4$ . Используемые сигналы имеют равную энергию.

2.5.11. Сравните помехоустойчивость сигналов с АМн при пассивной паузе и с ЧМн при  $\Delta f \gg \frac{1}{T}$  и объясните отличие на примере зависимостей  $P_{\text{полн.ош}}$  от  $q$ .

2.5.12. Объясните практическую важность анализа помехоустойчивости сигналов с известными параметрами.

2.5.13. Объясните принципы проведения модельного эксперимента на ЭВМ. Охарактеризуйте, почему в общем случае аналитические зависимости  $P_{\text{полн.ош}}$  от  $q$  отличаются от аналогичных результатов, полученных в модельном эксперименте.

2.5.14. Изложите методику анализа помехоустойчивости реальной системы передачи информации с построением гистограммы для экспериментальных результатов при двоичных сигналах известных точно.

2.5.15. Проанализируйте возможен ли прием сигналов с малой вероятностью ошибки в случае, если мощность помехи  $P_{\Pi}$  превышает мощ-

ность сигнала  $P_C$ . Определите возможность приема ЧМн сигналов с вероятностью  $P_{\text{полн.ош}} = 10^{-6}$  при отношении  $\frac{P_C}{P_{\Pi}} = 0,5$ .

2.5.16. Назовите и охарактеризуйте основные способы формирования опорного сигнала при ФМн с  $\Delta\varphi = 180^\circ$ . Представьте структурные схемы формирователей опорного сигнала.

2.5.17. Постройте график переходной характеристики фильтра, согласованного с сигналом  $S(t)$ , если сигнал задан функцией

$$S(t) = \begin{cases} kt, & \text{при } 0 \leq t \leq T; \\ 0, & \text{при } t < 0 \text{ и } t > T. \end{cases}$$

2.6.18. Определите выражение для комплексного коэффициента передачи  $K(f)$  фильтра, согласованного с сигналом

$$S(t) = \begin{cases} S_0, & \text{при } 0 \leq t \leq T; \\ 0, & \text{при } t < 0 \text{ и } t > T. \end{cases}$$

Постройте графики модуля и аргумента комплексного коэффициента передачи  $K(f)$ .

### 3. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

#### ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ КОДИРОВАНИЯ ТЕКСТОВЫХ СООБЩЕНИЙ

##### 3.1. Цель лабораторной работы

Целью лабораторной работы является закрепление теоретических сведений о принципах кодирования дискретных сообщений (на примере текстовых сообщений), исследование информационных характеристик сообщений при кодировании натуральным двоичным кодом и оптимальным кодом типа Шеннона-Фано.

##### 3.2. Теоретическая часть

###### 3.2.1. Виды первичных кодов их свойства и особенности

Кодирование — сопоставление дискретному сообщению  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, K$  где  $K$  — объём алфавита) определённой последовательности кодовых символов, выбираемых из конечного множества элементарных символов  $\{b_j\}$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, m$ , где  $m$  — основание кода). Если число разрядов  $n$  во всех кодовых комбинациях постоянно ( $n = \text{const}$ ), то код называют равномерным [6]. Число кодовых комбинаций равномерного кода

$$N = m^n.$$

Каждую букву из ансамбля  $\{a_i\}$  с объёмом  $K$  можно закодировать при

$$N \geq K.$$

Код, у которого основание равно двум, называют двоичным или бинарным. Код, для которого выполняется условие

$$m^{n-1} < K \leq m^n, \quad (3.1)$$

называют простым, или первичным кодом. Для равномерных первичных двоичных кодов условие (3.1) принимает вид

$$0,5 < \frac{K}{N} \leq 1.$$

Из этого условия следует, что в двоичном первичном коде неиспользуемая часть кодовых комбинаций всегда меньше половины общего числа кодируемых дискретных величин.

Код, у которого используются все кодовые комбинации или  $m^n = K$ , называют примитивным (этот код не имеет избыточности).

Первичные коды предназначены для представления заданного множества дискретных сообщений кодовыми комбинациями. Помимо первичных кодов при передаче информации находят применение и другой класс кодов - корректирующие коды. Такие коды позволяют обнаруживать и исправлять ошибки, возникающие при передаче дискретной информации.

Все первичные коды в зависимости от того, присваивается или не присваивается каждому разряду кодовой комбинации некоторый весовой коэффициент, разделяют на взвешенные и невзвешенные. Обычно значения весовых коэффициентов берут кратными целым степеням основания кода.

Основной формой представления дискретных сообщений, дискретных величин и целых чисел в цифровых системах связи является истинная двоичная форма, а соответствующий ей код называется натуральным двоичным кодом.

Натуральному двоичному коду присущ существенный недостаток. При передаче информации по каналам связи под действием помех отдельные элементы кода могут так исказиться, что окажутся принятыми неверно. Если неверно принят элемент, соответствующий позиции старшего разряда, ошибка в передаче числа значительно больше, чем при неверном приёме элемента младшего разряда. С этой точки зрения лучше применять

невзвешенный код, у которого ошибки, вызванные помехами, были бы одинаковыми для любого разряда.

Свободны от указанных недостатков рефлексные коды, которые относятся к группе невзвешенных кодов. В невзвешенных кодах позициям (разрядам) кодовой комбинации не ставится в соответствие определенный вес. Вес имеет лишь вся кодовая комбинация в совокупности. Характерной особенностью рефлексных кодов является то, что любые две соседние кодовые комбинации отличаются друг от друга лишь в одной позиции. Наиболее часто применяется двоичный рефлексный код Грея (см. таблицу 3.1).

Таблица 3.1 – Принципы организации двоичных кодов

| Десятичное число | Натуральный двоичный код | Код Грея |
|------------------|--------------------------|----------|
| 0                | 0 0 0 0                  | 0 0 0 0  |
| 1                | 0 0 0 1                  | 0 0 0 1  |
| 2                | 0 0 1 0                  | 0 0 1 1  |
| 3                | 0 0 1 1                  | 0 0 1 0  |
| 4                | 0 1 0 0                  | 0 1 1 0  |
| 5                | 0 1 0 1                  | 0 1 1 1  |
| 6                | 0 1 1 0                  | 0 1 0 1  |
| 7                | 0 1 1 1                  | 0 1 0 0  |
| 8                | 1 0 0 0                  | 1 1 0 0  |
| 9                | 1 0 0 1                  | 1 1 0 1  |
| 10               | 1 0 1 0                  | 1 1 1 1  |
| 11               | 1 0 1 1                  | 1 1 1 0  |
| 12               | 1 1 0 0                  | 1 0 1 0  |
| 13               | 1 1 0 1                  | 1 0 1 1  |
| 14               | 1 1 1 0                  | 1 0 0 1  |
| 15               | 1 1 1 1                  | 1 0 0 0  |

Особый класс образуют статистические коды. Эти коды являются неравномерными. Длина кодовой комбинации таких кодов зависит от вероятности появления той или иной буквы алфавита: наиболее вероятным буквам сопоставляются короткие кодовые комбинации, а менее вероятным

— более длинные. Такое кодирование часто называют оптимальным или экономным.

Примерами статистических (оптимальных) кодов являются код Шеннона - Фано и код Хаффмера. Для ознакомления с принципами построения оптимальных кодов рассмотрим в качестве примера источник сообщений, вырабатывающий четыре сообщения  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  с вероятностями:

$$P(a_1) = 0,3 ; P(a_2) = 0,22; P(a_3) = 0,18 ; P(a_4) = P(a_5) = 0,15.$$

При кодировании методом Шеннона - Фано все сообщения выписывают в кодовую таблицу (см. таблицу 3.2) в порядке убывания их вероятностей. Затем их разделяют на две группы так, чтобы суммы их вероятностей по возможности были одинаковыми. В данном примере в первую группу входят сообщения  $a_1$  и  $a_2$  с суммарной вероятностью  $P(a_1) + P(a_2) = 0,52$  и во вторую — сообщения  $a_3, a_4$  и  $a_5$  с суммарной вероятностью, равной 0,48.

Таблица 3.2 — Пример получения оптимального кода Шеннона - Фано

| $a_i$ | $P(a_i)$                                                                  | Группы |    |     | Комбинации |
|-------|---------------------------------------------------------------------------|--------|----|-----|------------|
|       |                                                                           | I      | II | III |            |
| $a_1$ | $\left. \begin{matrix} 0,3 \\ 0,22 \end{matrix} \right\} = 0,52$          | 0      | 0  |     | 0 0        |
| $a_2$ |                                                                           | 0      | 1  |     | 0 1        |
| $a_3$ | $\left. \begin{matrix} 0,18 \\ 0,15 \\ 0,15 \end{matrix} \right\} = 0,48$ | 1      | 0  |     | 1 0        |
| $a_4$ |                                                                           | 1      | 1  | 0   | 1 1 0      |
| $a_5$ |                                                                           | 1      | 1  | 1   | 1 1 1      |

Комбинациям, которые соответствуют сообщениям первой группы, присваивают в качестве первого символа кода 0, а комбинациям второй

группы символ 1. Каждую из двух групп опять делят на две группы с применением того же правила присвоения символов 0 и 1. В идеальном случае после первого деления вероятности каждой группы должны быть равны 0,5, после второго деления 0,25 и т. д. Процесс деления продолжают до тех пор, пока в группах не останется по одному сообщению.

При кодировании по методу Хаффмена все символы источника располагают в порядке убывания вероятностей. Если несколько букв имеют одинаковые вероятности, их располагают рядом в произвольном порядке. Затем выбирают две буквы с наименьшими вероятностями и одной из них приписывают символ 0, а другой — символ 1 в качестве первого символа двоичного кода. Выбранные буквы объединяют в «промежуточную» букву, имеющую вероятность, равную сумме вероятностей выбранных букв. Затем в ансамбле оставшихся букв (вместе с промежуточной) вновь находят две с наименьшими вероятностями и поступают так же, как и на первом шаге. Эту процедуру осуществляют до тех пор, пока не будет исчерпан весь алфавит.

Общий недостаток неравномерных кодов — это трудности в определении границ между комбинациями. Для устранения возможных ошибок применяют специальные разделительные знаки.

Однако код Шеннона - Фано не требует разделительных знаков. Это обусловлено тем, что короткие комбинации не являются началом более длинных комбинаций.

Следует отметить, что при оптимальном способе кодирования в сигналах, содержащих сообщение источника, совершенно отсутствует какая-либо избыточность. Устранение избыточности приводит к тому, что процесс декодирования становится весьма чувствительным к воздействию помех. Поэтому оптимальные коды применимы только для каналов, в которых влияние помех незначительно.

### 3.2.2. Информационные характеристики дискретных сообщений

Количество информации  $I(a_i)$ , содержащееся в символе  $a_i$ , выбираемом из ансамбля  $\{a_i\}$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, K$ ) с вероятностью  $P(a_i)$ , причём  $\sum_{i=1}^K P(a_i) = 1$ , определяется как

$$I(a_i) = -\log P(a_i). \quad (3.2)$$

Основание логарифма в (3.2) может быть произвольным, оно определяет лишь систему единиц измерения количества информации. В теории информации обычно используется логарифм по основанию два

$$I(a_i) = -\log_2 P(a_i).$$

При этом количество информации измеряется в двоичных единицах (битах). Следовательно, одна двоичная единица информации — это количество информации, содержащееся в одном из двух выбираемых с равной вероятностью символов.

Важно, что  $I(a_i)$  определяет информативность выбора символа  $a_i$  для «неподготовленного» получателя и совершенно не учитывает как смыслового содержания, так и субъективную ценность передаваемых сообщений.

Энтропией источника независимых сообщений называется среднее количество информации  $H(a)$ , приходящееся на один символ, выдаваемый дискретным источником независимых сообщений с объёмом алфавита  $K$ . Энтропию можно определить, как математическое ожидание величины  $I(a_i)$

$$H(a) = \overline{I(a_i)} = \sum_{i=1}^K P(a_i) I(a_i) = -\sum_{i=1}^K P(a_i) \log P(a_i).$$

Энтропия измеряется в битах на символ или в битах на сообщение. Чем больше энтропия, тем сильнее неопределённость и тем большую ин-

формацию в среднем несет одно сообщение источника. Энтропия максимальна при равновероятных сообщениях, когда  $P(a_1) = \dots = P(a_K) = \frac{1}{K}$ . В этом случае энтропия равна

$$H_{max}(a) = \sum_{i=1}^K \frac{1}{K} \log K = \log K .$$

Одной из информационных характеристик дискретного источника является избыточность

$$\rho = 1 - \frac{H(a)}{H_{max}(a)} = 1 - \frac{H(a)}{\log K} .$$

Избыточность источника зависит как от статистических связей последовательно выбираемых символов источника, так и от степени неравновероятности отдельных символов.

Если в единицу времени источник создает в среднем  $V_{\text{и}}$  символов (скорость источника  $V_{\text{и}}$ ), то среднее количество информации в единицу времени,

$$H'(a) = V_{\text{и}} H(a) = \frac{1}{T_{\text{ср}}} H(a) ,$$

где  $T_{\text{ср}}$  — средняя длительность одного символа.

Характеристика  $H'(a)$  называется производительностью дискретного источника. Источник называется стационарным, если его вероятностные характеристики не изменяются во времени.

### 3.3. Описание лабораторной установки

Лабораторная работа выполняется на персональном компьютере с помощью специально разработанной программы. Вызов программы производится из основной программы «Лабораторные работы по ОТПИ», ярлык которой находится на «Рабочем столе». После вызова программы необходимо выбрать вариант текста для исследования в соответствии с зада-

нием на лабораторную работу. Внешний вид интерфейса программы показан на рисунке 3.1.

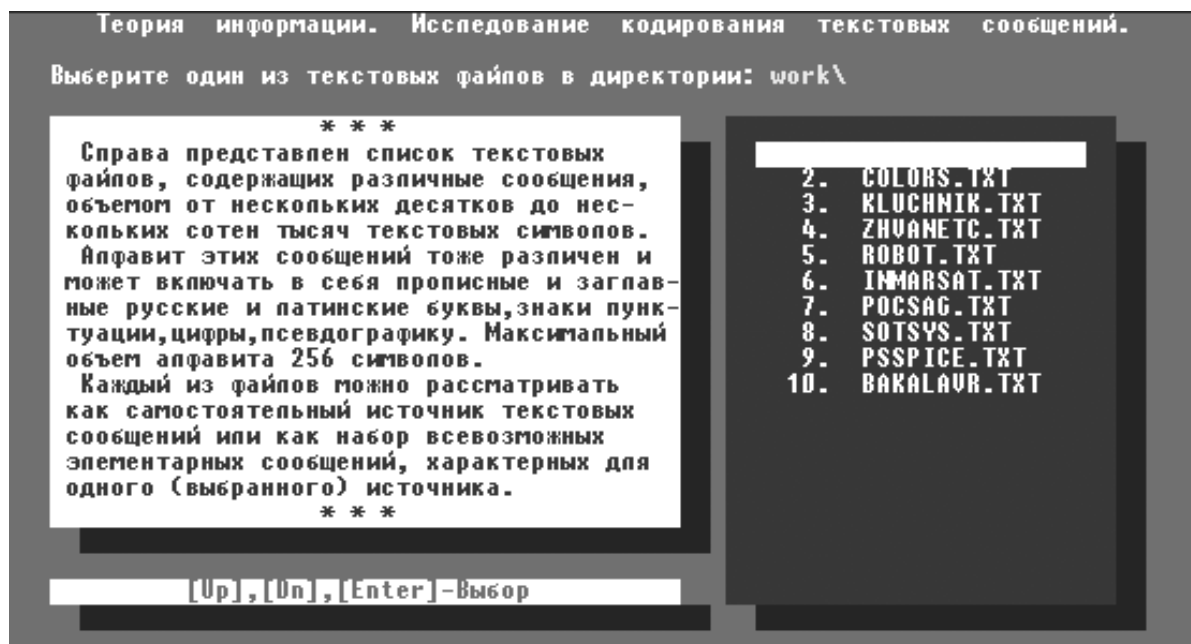


Рисунок 3.1 — Внешний вид интерфейса программы

Программа позволяет выполнять необходимые исследования, включая просмотр текста, его кодирование равномерным кодом или кодом Шеннона-Фано и имитацию передачи закодированного текста по каналу связи с заданной вероятностью ошибки.

При исследовании процесса передачи закодированного текста по каналу связи с помехами задается вероятность ошибки в диапазоне от 0 до 50 %. Результаты эксперимента приводятся для наихудшего и наилучшего случаев временного распределения ошибок в сообщении.

### 3.4. Порядок выполнения лабораторной работы

#### 3.4.1. Задание для теоретических исследований

Из таблицы 3.3 выбрать номер варианта расчетного задания по последней цифре номера зачетной книжки студента.

Таблица 3.3 — Варианты заданий для выполнения лабораторной работы

|                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|-------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| Посл. цифра<br>№ зачетной<br>книжки | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0  |
| Номер<br>варианта<br>задания        | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

1) Источник сообщений вырабатывает символы из ансамбля  $A = \{ a_i \}$  (здесь  $i = 1, 2, 3, 4$ ) с вероятностями  $P(a_1) = 0,2$ ;  $P(a_2) = 0,3$ ;  $P(a_3) = 0,4$ ;  $P(a_4) = 0,1$ . Определить количество информации, содержащееся в каждом из символов источника при их независимом выборе (источник без памяти). Вычислить энтропию и избыточность заданного источника.

2) Определить максимальное количество информации, которое содержится в квантованном телевизионном сигнале, соответствующем одному телевизионному кадру при 625 строках разложения. Отношение сторон кадра  $4 / 3$  соответствует 833 статистически независимым случайным по амплитуде импульсам в одной строке изображения. Число возможных градаций уровней яркости 16. Найти энтропию и избыточность реального телевизионного сигнала, если фактически кадр изображения с 16 градациями уровней содержит  $9,37 \cdot 10^5$  бит информации.

3) Дискретный источник вырабатывает символы из ансамбля  $\{ a_i \}$  с объемом  $K = 10$ . Какое минимальное число разрядов должны иметь кодовые комбинации равномерного двоичного кода, предназначенного для кодирования символов данного ансамбля? Записать кодовые комбинации и построить граф кода.

4) Первичный непрерывный сигнал путем дискретизации во времени и квантования по уровню превращается в импульсную последовательность с числом уровней  $M_y = 128$ . Каждый уровень кодируется равно-

мерным двоичным кодом. Найти число разрядов в кодовой комбинации, если отдельные отсчеты сигнала независимы. Чему будет равна избыточность кода, если число разрядов увеличить на три?

5) Некоторый дискретный источник вырабатывает символы из ансамбля  $\{a_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, 9$ ) с вероятностями, приведенными в таблице 3.4. Закодировать символы данного ансамбля кодом Хаффмена. Построить граф кода и определить среднюю длину кодовой комбинации.

Таблица 3.4 — Вероятностные характеристики источника сообщений

| Символ $a_i$      | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Вероятность $P_i$ | 0,2   | 0,15  | 0,15  | 0,12  | 0,1   | 0,1   | 0,08  | 0,06  | 0,04  |

6) Закодировать двоичным кодом Шеннона - Фано ансамбль  $\{a_i\}$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, 8$ ), если вероятность символов имеет значения, приведенные в таблице 3.5. Найти среднее число знаков в кодовой комбинации и построить граф кода.

Таблица 3.5 — Вероятностные характеристики источника сообщений

| Символ $a_i$      | $a_1$         | $a_2$         | $a_3$         | $a_4$         | $a_5$          | $a_6$          | $a_7$          | $a_8$          |
|-------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Вероятность $P_i$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |

7) Определить вероятность ошибочного приема любого уровня квантованного сигнала при использовании кодово - импульсной модуляции с семиразрядным примитивным кодом ( $n = 7$ ) в симметричном канале без памяти, если вероятность ошибочного приема одного кодового символа  $p_0 = 10^{-3}$ .

8) Определите избыточность алфавита двоичного источника, вырабатывающего сообщения «0» и «1» независимо, с вероятностями  $P(0) = 0,1$ ;  $P(1) = 0,9$ .

9) Сравнить производительность двух источников дискретной информации, если для первого источника основание кода  $m_1 = 2$ , а для второго источника  $m_2 = 8$ , и количество символов, передаваемых в секунду, для первого источника  $V_1 = 100$ , а для второго источника  $V_2 = 40$ .

10) При переводе русского текста на английский язык число букв в среднем уменьшается примерно в 1,3 раза. При переводе того же текста на финский язык число букв возрастает примерно в 1,4 раза. Что можно сказать на основании этого об энтропии данных языков?

### *3.4.2. Порядок выполнения экспериментальных исследований*

Для указанного в таблице 3.3 номера варианта текста с помощью специализированной программы исследовать кодирование текстового сообщения равномерным кодом и оптимальным кодом Шеннона - Фано.

1) Кратко охарактеризовать тип текстового сообщения (художественное произведение, документ, письмо, и т.д.)

2) Определить объём сообщения (число символов), объём алфавита, энтропию сообщения при допущении отсутствия взаимосвязи между символами и количество информации, содержащейся в исследуемом тексте без учёта взаимных вероятностей появления символов в тексте.

3) Провести кодирование текста равномерным кодом. Представить в отчёте вероятностные характеристики десяти наиболее вероятных символов и пяти менее вероятных символов и соответствующие им кодовые последовательности. Результаты представить в виде таблицы (по форме таблицы 3.6).

4) Определить число двоичных символов в сообщении, закодированном равномерным кодом, число нулей и единиц и вероятности появления нулевых и единичных значений.

Зафиксировать количество информации, содержащейся в созданном двоичном сообщении, без учета взаимных вероятностей появления символов и количества информации, приходящейся на один двоичный символ.

Таблица 3.6 — Форма представления результатов при исследовании равномерного кодирования

| № символа | Символ | Количество символов в тексте | Вероятность, % | Кодовая последовательность |
|-----------|--------|------------------------------|----------------|----------------------------|
| 1         |        |                              |                |                            |
| 2         |        |                              |                |                            |
| ...       | ...    | ...                          | ...            | ...                        |

5) Произвести анализ особенностей передачи текстового сообщения закодированного равномерным кодом по каналу связи с помехами для различных вероятностей ошибки (10, 20, 30, 40, 50 %).

Результаты представить в виде таблицы (по форме таблицы 3.7) и графиков зависимости минимальных и максимальных потерь информации (в % к количеству информации в сообщении) от вероятности ошибки в канале связи.

6) Провести кодирование текста оптимальным кодом. Представить в отчёте вероятностные характеристики десяти наиболее вероятных символов и пяти менее вероятных символов и соответствующие им кодовые последовательности. Результаты представить в виде таблицы (по форме таблицы 3.6).

7) Определить число двоичных символов в сообщении, закодированном оптимальным кодом, число нулей и единиц и вероятности появления нулевых и единичных значений.

Зафиксировать количество информации, содержащейся в созданном двоичном сообщении, без учета взаимных вероятностей появления символов и количества информации, приходящейся на один двоичный символ.

8) Произвести анализ особенностей передачи текстового сообщения закодированного оптимальным кодом по каналу связи с помехами для различных вероятностей ошибки (10, 20, 30, 40, 50 %).

Результаты представить в виде таблицы (по форме таблицы 3.7) и графиков зависимости минимальных и максимальных потерь информации (в % к количеству информации в сообщении) от вероятности ошибки в канале связи.

Таблица 3.7 — Форма представления результатов при исследовании помехоустойчивости кода

| Вероятность ошибки, % | Число искажённых двоичных символов | Число искажённых текстовых символов |              | Потери информации |   |              |   |
|-----------------------|------------------------------------|-------------------------------------|--------------|-------------------|---|--------------|---|
|                       |                                    |                                     |              | минимальные       |   | максимальные |   |
|                       |                                    | минимальное                         | максимальное | Бит               | % | Бит          | % |
| 10                    |                                    |                                     |              |                   |   |              |   |
| 20                    |                                    |                                     |              |                   |   |              |   |
| 30                    |                                    |                                     |              |                   |   |              |   |
| 40                    |                                    |                                     |              |                   |   |              |   |
| 50                    |                                    |                                     |              |                   |   |              |   |

9) Сравнить полученные для различных видов кодирования результаты. Объяснить различие информационных и вероятностных характеристик. Сделать выводы по работе.

### 3.5. Содержание отчета по лабораторной работе

3.5.1. Цель лабораторной работы, в которой необходимо указать какие именно зависимости и коды исследуются в лабораторной работе.

3.5.2. В расчетной части следует представить результаты решения задания для теоретического исследования (см. п. 3.4.1).

3.5.3. Кратко охарактеризовать тип текстового источника предложенного для исследований и привести информационные характеристики текста (объём сообщения, объём алфавита, энтропию сообщения при допущении отсутствия взаимосвязи между символами и количество информации, содержащейся в исследуемом тексте без учёта взаимных вероятностей появления символов в тексте).

3.5.4. Результаты исследования равномерного кода в виде таблиц и графиков.

3.5.5. Результаты исследования оптимального кода в виде таблиц и графиков.

3.5.6. Выводы по работе должны содержать подробный анализ и сопоставление экспериментальных данных, подробное обсуждение результатов.

### **3.6. Контрольные вопросы**

3.6.1. Поясните смысл выполнения операции «кодирование». Охарактеризуйте виды кодирования дискретных сообщений и их назначение.

3.6.2. Охарактеризуйте понятия: количество информации, энтропия и двоичная единица информации.

3.6.3. Дайте определение, первичного кода и охарактеризуйте, как определяется его максимальная избыточность.

3.6.4. Приведите сравнительную характеристику натурального двоичного кода и кода Грея.

3.6.5. Охарактеризуйте принцип оптимального кодирования методом Шеннона - Фано. Приведите свойства оптимальных кодов.

3.6.6. Поясните принципы кодирования кодом Шеннона - Фано. Сформулируйте, в чем заключается особенность кодового дерева для данного кода.

3.6.7. Охарактеризуйте избыточность источника дискретных сообщений.

3.6.8. Дайте определение рефлексным кодам, охарактеризуйте их основные свойства и область применения.

3.6.9. Охарактеризуйте, чем определяется количество информации, заключенное в конкретном сообщении.

3.6.10. Докажите, что мера количества информации должна зависеть от вероятности сообщения по логарифмическому закону.

3.6.11. Охарактеризуйте, чем определяются минимальные и максимальные потери информации при передаче сообщения по каналу связи с помехами.

## 4. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

### ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОГО КОДИРОВАНИЯ

#### 4.1. Цель лабораторной работы

Целью лабораторной работы является закрепление теоретических сведений о принципах помехоустойчивого кодирования дискретных сообщений (на примере сверточного кодирования) и исследование информационных характеристик сообщений при различных методах кодирования.

#### 4.2. Теоретическая часть

##### 4.2.1 Основные виды корректирующих кодов

Коды, исправляющие ошибки, часто называют корректирующими или помехоустойчивыми. В настоящее время чаще всего применяют равномерные двоичные корректирующие коды, так как они обладают хорошими исправляющими свойствами и их реализация сравнительно проста. Одна из особенностей таких кодов состоит в том, что все комбинации имеют одинаковое число разрядов  $n$  (одинаковую длительность). Равномерные двоичные коды делятся на блочные коды и свёрточные коды.

**Блочные коды.** При использовании блочных кодов цифровая информация передаётся в виде отдельных кодовых комбинаций (блоков) равной длины. Кодирование и декодирование каждого блока осуществляется независимо друг от друга.

Почти все блочные коды относятся к разделимым кодам, т. е. таким, комбинации которых состоят из двух различающихся частей: информационной и проверочной. Информационные и проверочные разряды во всех кодовых комбинациях разделимого кода всегда занимают одни и те же позиции. Разделимые коды обычно условно обозначают в виде  $(n, k)$ ,

где  $n$  указывает значность кода (общее число позиций в блоке),  $k$  — число информационных позиций. Таким образом, число проверочных символов в делимых кодах равно

$$r = n - k.$$

Среди делимых кодов различают систематические и несистематические коды. Систематические (линейные) коды представляют собой наиболее обширную группу делимых кодов. В таких кодах проверочные символы образуются различными линейными комбинациями информационных символов. Теоретической основой получения таких комбинаций является аппарат линейной алгебры, который позволяет формировать проверочные символы по определённым правилам (т. е. по определённой системе, отсюда и происхождение термина «систематические» коды). Использование аппарата линейной алгебры, в которой важное значение имеет понятие «группа», привело к тому, что в ряде работ рассматриваемые коды называют также «алгебраическими» или «групповыми».

Систематические коды хорошо изучены. Наиболее известны среди них циклические коды. Основное свойство циклических кодов состоит в том, что при циклическом сдвиге любой разрешенной кодовой комбинации получается также разрешённая комбинация. Циклические коды обладают хорошими корректирующими свойствами, а реализация кодирующих и декодирующих устройств для таких кодов оказывается проще, чем для других систематических кодов.

К циклическим кодам относятся коды Хэмминга, которые исторически появились раньше других кодов и сыграли большую роль в развитии теории корректирующих кодов, а также коды Боуза - Чоудхури - Хоквингема (БЧХ).

Коды, в которых операции кодирования и декодирования производятся непрерывно над последовательностью посылок без деления их на блоки, называются непрерывными или рекуррентными. К ним относятся

цепной и сверточный коды, которые позволяют обнаруживать и исправлять случайные ошибки и пачки ошибок.

В цепном коде после каждой информационной посылки следует проверочная посылка. Последние формируются путем сложения по модулю два двух информационных посылок, отстоящих одна от другой на шаг сложения  $k$ .

Шаг сложения — это «расстояние» между двумя информационными послылками, образующими проверочную посылку.

Пусть имеем последовательность информационных посылок:

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_{2k}, a_{2k+1}, \dots, a_{3k}, a_{3k+1}, \dots$$

Тогда последовательность проверочных посылок  $a_0 \oplus a_k = b_{0,k}$ ;  $a_1 \oplus a_{k+1} = b_{1,k+1}$ ;  $a_{k+1} \oplus a_{2k+1} = b_{k+1,2k+1}$ ;  $a_{2k+1} \oplus a_{3k+1} = b_{2k+1,3k+1}$ .

В связи с тем, что каждая информационная посылка участвует в формировании двух проверочных посылок, а каждая проверочная посылка формируется по двум информационным, число проверочных посылок, сформированных за некоторое время, будет равно числу информационных посылок, поступивших за то же время на вход кодирующего устройства. Поэтому избыточность цепного кода 50 %.

Процесс декодирования принимаемой последовательности определяется принципом формирования проверочных посылок.

Согласно принципу формирования проверочных посылок при шаге сложения  $k$  вся последовательность передаваемых в канал связи посылок разбивается как бы на  $k$  независимых цепей. В каждую цепь входят информационные и проверочные посылки, связанные друг с другом.

Корректирующие возможности цепного кода зависят от шага сложения  $k$ , изменяя который, можно построить кодирующие и декодирующие устройства для обнаружения и исправления пачек ошибок любой длительности до  $L$ :

$$L = 2k.$$

При шаге сложения  $k$  цепной код исправляет пачки ошибок длиной  $L$  при условии, что каждая проверочная посылка перед передачей в канал связи задерживается на время  $t$ , и рядом расположенные пачки ошибок разделены между собой защитным интервалом  $a$ , не содержащим ошибочных посылок. В этом случае

$$a = 6k + 1 ; t = (3k + 1) \tau_0 ,$$

где  $\tau_0$  — длительность одной посылки.

Для цепного кода существует понятие условной кодовой группы, длина которой равна сумме длительности пачки ошибок и защитного интервала:  $n = 4L + 1$ . За счет большой избыточности цепной код позволяет обнаруживать или исправлять пачки ошибок, возникающие в канале связи. Изменяя величину шага сложения, можно согласовать корректирующие возможности кода с характеристиками канала связи, т. е. увеличить или уменьшить допустимую частоту ошибок.

**Сверточные коды.** В основу построения сверточных кодов положен принцип, по которому проверочная последовательность символов, полученная на выходе кодирующего устройства (КУ), образует линейную комбинацию информационных символов, поступающих на вход КУ. В общем случае КУ таких кодов содержит  $k$  входов и  $n$  выходов. Если на вход КУ поступает информационная последовательность  $S_0, S_1, S_2, \dots$ , то на выходе получаем две последовательности: информационную  $S_0, S_1, S_2, \dots$ , совпадающую с входной, и проверочную  $C_0, C_1, C_2, \dots$ . Их можно представить в виде полиномов:

$$S(X) = S_0 + S_1 X + S_2 X^2 + \dots ; C(X) = C_0 + C_1 X + C_2 X^2 + \dots ,$$

где  $X$  — основание системы счисления.

Тогда  $C(X) = G(X) S(X)$ , где  $G(X) = G_0 + G_1 X + G_2 X^2 + \dots$  — образующий полином сверточного кода.

Следовательно, кодирование информации заключается в вычислении произведения  $G(X) S(X)$ , которое может быть реализовано с помощью линейных фильтров без обратных связей.

Принцип формирования простейшего сверточного кода можно пояснить с помощью рис.4.1, где  $\{a(i)\}$  — последовательность информационных символов, а  $\{b(i)\}$  — проверочных. Устройство задержки  $\tau_z$  обеспечивает запаздывание (сдвиг) входной последовательности  $\{a(i)\}$  на один разряд, а проверочные символы формируются по рекуррентному правилу

$$b(i) = a(i) \oplus a(i-1), \quad (4.1)$$

где знак  $\oplus$  означает суммирование по модулю два.

Ключ К переключается поочередно из положения 1 в положение 2 и обратно. В результате на выходе формируется последовательность символов вида

$$\dots \underline{a(i)}, \underline{b(i)}, \underline{a(i+1)}, \underline{b(i+1)}, \underline{a(i+2)}, \underline{b(i+2)}, \dots,$$

которая состоит из элементарных блоков (подчеркнутых снизу).

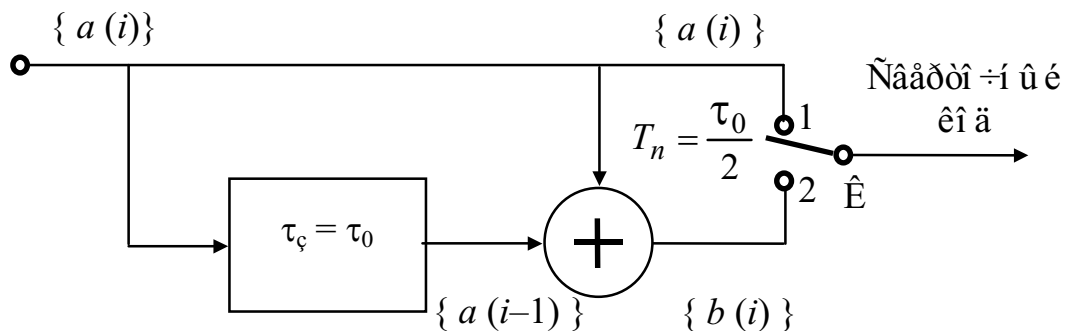


Рисунок 4.1 — Принцип формирования простейшего сверточного кода

При приеме правило (4.1) позволяет установить, какой из символов элементарного блока искажен, информационный или проверочный. Действительно, если искажен информационный символ  $a(i)$ , то его искажение приведет к невыполнению правила (4.1) дважды, на  $i$ -ом и  $(i+1)$ -ом так-

тах. Если же искажен проверочный символ  $b(i)$ , то уравнение (4.1) не будет выполняться только на  $i$ -ом такте.

Рассмотренный простейший сверточный код позволяет исправлять одиночные ошибки. При искажении обоих символов  $a(i)$  и  $b(i)$ , т. е. всего элементарного блока, для обнаружения ошибки следует формировать более сложный сверточный код.

#### 4.2.2. Основные характеристики корректирующих кодов

К основным характеристикам корректирующих кодов относят: избыточность кода, кодовое расстояние, число обнаруживаемых или исправляемых ошибок, корректирующие возможности кода.

**Избыточность корректирующего кода.** Избыточностью корректирующего кода называют величину

$$w = r / n = (n - k) / n = 1 - k / n. \quad (4.2)$$

Из выражения (4.2) следует, что

$$k / n = 1 - w. \quad (4.3)$$

Отношение (4.3) показывает, какую часть от общего числа символов кодовой комбинации составляют информационные символы. В теории кодирования величину  $k / n$  принято называть скоростью передачи. Необходимо иметь в виду, что величина  $k / n$  характеризует относительную скорость передачи информации. Если производительность источника информации равна  $H$  бит/с, то скорость передачи после кодирования этой информации окажется равной

$$R = H k / n, \quad (4.4)$$

поскольку в закодированной последовательности из каждых  $n$  символов только  $k$  являются информационными, т. е. увеличение избыточности приводит к уменьшению скорости передачи информации по каналу связи.

Для обнаружения или исправления значительного числа ошибок, необходимо иметь код с большим числом проверочных символов. Однако чем сложнее кодирование, тем больше временная задержка информации.

**Кодовое расстояние.** Расстоянием  $d$  между двумя кодовыми комбинациями называется число позиций, в которых эти комбинации имеют разные символы. Например, расстояние между комбинациями 0001101 и 1001010 равно четырём ( $d = 4$ ). Расстояние между различными комбинациями некоторого конкретного кода может быть различным. Например, в безызбыточном натуральном (первичном) коде это расстояние для различных комбинаций может изменяться от единицы до величины, равной значности кода. Особенно важной характеристикой корректирующих свойств кода является минимальное расстояние  $d_{min}$  между кодовыми комбинациями. Это расстояние называют хэмминговым.

В безызбыточном коде все комбинации являются разрешёнными и, следовательно, его кодовое расстояние равно единице. Поэтому при искажении хотя бы одного символа вместо переданной комбинации будет принята другая разрешённая комбинация. Чтобы код обладал корректирующими свойствами, необходимо ввести в него некоторую избыточность, которая обеспечивала бы минимальное расстояние между любыми двумя разрешёнными комбинациями  $d_{min} \geq 2$ .

**Число обнаруживаемых или исправляемых ошибок.** Кодовое расстояние является основной характеристикой корректирующей способности данного кода. Если код используется только для обнаружения ошибок кратности  $a_{ош}$ , то необходимо и достаточно, чтобы минимальное расстояние удовлетворяло условию

$$d_{min} \geq a_{ош} + 1 . \quad (4.5)$$

В этом случае никакая комбинация из  $a$  ошибок не может перевести одну разрешённую кодовую комбинацию в другую.

Таким образом, условие обнаружения всех ошибок кратностью  $a_{\text{обн}}$  можно записать в виде

$$a_{\text{обн}} \leq d_{\min} - 1 \quad (4.6)$$

Для исправления всех ошибок кратностью  $a_{\text{испр}}$  и менее необходимо, чтобы минимальное расстояние удовлетворяло условию

$$d_{\min} \geq 2a_{\text{испр}} + 1. \quad (4.7)$$

В этом случае любая кодовая комбинация отличается от каждой разрешённой комбинации не менее чем в  $(a_{\text{испр}} + 1)$  позициях. Если условие (4.7) не выполнено, возможен случай, когда ошибка кратности  $a$  исказит переданную комбинацию так, что последняя станет ближе к одной из разрешённых комбинаций, чем к переданной, или даже перейдёт в другую разрешённую комбинацию. Таким образом, условие исправления всех ошибок кратностью не более  $a$  можно записать в виде

$$a_{\text{испр}} \leq (d_{\min} - 1) / 2. \quad (4.8)$$

Корректирующие коды можно одновременно использовать как для обнаружения, так и для исправления ошибок. Минимальное расстояние, при котором можно исправить все ошибки кратностью  $a_{\text{испр}}$  или меньше и одновременно обнаружить все ошибки кратностью  $b_{\text{обнар}}$  или меньше, определяется условием

$$d_{\min} \geq a_{\text{испр}} + b_{\text{обнар}} + 1, \quad (4.9)$$

где, в свою очередь, всегда должно выполняться условие  $b_{\text{обнар}} > a_{\text{испр}}$ .

**Корректирующие возможности кодов.** Вопрос о минимально необходимой избыточности, при которой код обладает нужными корректирующими свойствами, является одним из важнейших в теории кодирования.

**Нижняя граница Варшамова - Гильберта.** Для больших значений  $n$  указанная граница определяется асимптотическим соотношением

$$\frac{r}{n} = 1 - \frac{k}{n} \geq H\left(\frac{d_{min} - 2}{n - 1}\right), \quad (4.10)$$

где  $H(X) = -X \log_2 X - (1 - X) \log_2 (1 - X)$ .

Из выражения (4.10) следует:

$$r \geq n H\left(\frac{d_{min} - 2}{n - 1}\right); \quad (4.11)$$

$$\frac{k}{n} \leq 1 - H\left(\frac{d_{min} - 2}{n - 1}\right). \quad (4.12)$$

Условия (4.11) и (4.12) позволяют оценить необходимое число проверочных символов  $r$  и относительную скорость передачи  $k / n$  при заданных (или выбранных) значениях  $n$  и  $d_{min}$ .

**Верхняя граница Хэмминга** для двоичного корректирующего кода записывается в виде [1]

$$\frac{r}{n} \geq H\left(\frac{d_{min} - 1}{2n}\right). \quad (4.13)$$

Откуда следуют выражения для оценки числа проверочных символов и относительной скорости передачи:

$$r \geq n H\left(\frac{d_{min} - 1}{2n}\right); \quad (4.14)$$

$$\frac{k}{n} \leq 1 - H\left(\frac{d_{min} - 1}{2n}\right). \quad (4.15)$$

Соотношение (4.15) известно в литературе как верхняя граница Хэмминга. Кроме рассмотренной оценки, известна также оценка, называемая **верхней границей Плоткина**. Для двоичного корректирующего кода эта граница определяется выражением

$$r \geq 2 (d_{min} - 1) - \log_2 d_{min}, \quad (4.16)$$

которое справедливо при  $n \geq 2 d_{min} - 1$ .

Для значений  $d_{min} / n \leq 0,3$  разница между границей Хэмминга и границей Плоткина сравнительно невелика.

Заметим, что для некоторых частных случаев Хэмминг указал более простые соотношения, позволяющие определить необходимое число проверочных символов [8]:

$$r \geq \log_2 (n + 1), \text{ если } d_{min} = 3; \quad (4.17)$$

$$r \geq \log_2 2n, \text{ если } d_{min} = 4. \quad (4.18)$$

Систематические коды с  $d_{min} = 3; 4$  в литературе обычно называют кодами Хэмминга.

### 4.3. Описание лабораторной установки

Лабораторная работа выполняется на персональном компьютере с помощью специально разработанной программы. Вызов программы производится из основной программы «Лабораторные работы по ОТПИ», ярлык которой находится на «Рабочем столе». После вызова основной программы необходимо выбрать лабораторную работу «Исследование методов помехоустойчивого кодирования».

### 4.4. Порядок выполнения лабораторной работы

4.4.1. В соответствии с таблицей 4.1 произвести кодирование любого слова из 5...7 букв (например, день недели, текущий месяц, имени или фамилии студента), равномерным двоичным кодом и кодом Шеннона - Фано.

Таблица 4.1 — Таблица кодировки текстовых символов

| знак | вероятн.<br>появл. | равномерн.<br>код | код<br>Шеннона | код<br>Морзе | знак | вероятн.<br>появл. | равномерн.<br>код | код<br>Шеннона | код<br>Морзе |
|------|--------------------|-------------------|----------------|--------------|------|--------------------|-------------------|----------------|--------------|
| [_]  | 0.145              | 00000             | 000            |              | я    | 0.019              | 10000             | 110110         | *--*         |
| о    | 0.095              | 00001             | 001            | ---          | ы    | 0.016              | 10001             | 110111         | --*          |
| е    | 0.074              | 00010             | 0100           | *            | э    | 0.015              | 10010             | 111000         | ---**        |
| а    | 0.064              | 00011             | 0101           | *--          | ь    | 0.015              | 10011             | 111001         | ---**        |
| и    | 0.064              | 00100             | 0110           | **           | б    | 0.015              | 10100             | 111010         | ---***       |
| т    | 0.056              | 00101             | 0111           | -            | г    | 0.014              | 10101             | 111011         | ---*         |
| н    | 0.056              | 00110             | 1000           | --*          | ч    | 0.013              | 10110             | 111100         | *---**       |
| с    | 0.047              | 00111             | 1001           | ***          | й    | 0.010              | 10111             | 111101         | *----        |
| р    | 0.041              | 01000             | 10100          | *--*         | х    | 0.009              | 11000             | 1111011        | *****        |
| в    | 0.039              | 01001             | 10101          | *---         | ж    | 0.008              | 11001             | 1111100        | ***--        |
| л    | 0.036              | 01010             | 10110          | *---*        | ю    | 0.007              | 11010             | 1111101        | **---        |
| к    | 0.029              | 01011             | 10111          | --*          | ш    | 0.006              | 11011             | 11111100       | -----        |
| м    | 0.026              | 01100             | 11000          | --           | ц    | 0.004              | 11100             | 11111101       | --**         |
| д    | 0.026              | 01101             | 110010         | ---*         | щ    | 0.003              | 11101             | 11111110       | ---*         |
| п    | 0.024              | 01110             | 110011         | *---*        | з    | 0.003              | 11110             | 11111111       | **---**      |
| у    | 0.021              | 01111             | 110100         | **--         | ф    | 0.002              | 11111             | 111111111      | **---*       |

4.4.2. Произвести свёрточное кодирование двоичных последовательностей, полученных в п. 4.3.1. Для этого в сообщение, состоящее из двоичных символов, добавить проверочные символы по алгоритму свёрточного кодирования. Свёрточный код имеет вид:

$$a(1), b(2), a(2), b(2)...a(m), b(m),$$

где  $a(1), a(2)...a(m)$  — символы исходного сообщения;  $b(1), b(2)...b(m)$  — проверочные символы, полученные по правилу  $b(i) = a(i-1) + a(i)$ , которое является решающим при приёме и декодировании.

4.4.3. С помощью специализированной программы проанализировать помехоустойчивость равномерного двоичного кода и оптимального кода Шеннона-Фано. Исследование производить с помощью тестовой фразы длиной 25...50 символов. В качестве тестового сообщения рекомендуется использовать фамилию, имя и отчество студента или текущий день недели и месяц. Результаты эксперимента для различных значений вероятности ошибки в канале связи представить в виде таблицы (по форме таблицы 4.2) для случая отсутствия помехоустойчивого кодирования (т. е.

при выполнении этой части работы не следует использовать помехоустойчивое кодирование).

Результаты эксперимента представить в виде таблицы сводных результатов (для случая без помехоустойчивого кодирования) по форме таблицы 4.3.

Таблица 4.2 — Форма представления результатов эксперимента

| Вероятность ошибки в канале связи | Равномерный код                   |                                    | Оптимальный код                   |                                    |
|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
|                                   | Число ошибок в двоичном сообщении | Число ошибок в текстовом сообщении | Число ошибок в двоичном сообщении | Число ошибок в текстовом сообщении |
| 0,001                             |                                   |                                    |                                   |                                    |
| 0,005                             |                                   |                                    |                                   |                                    |
| 0,01                              |                                   |                                    |                                   |                                    |
| 0,05                              |                                   |                                    |                                   |                                    |
| 0,1                               |                                   |                                    |                                   |                                    |

4.4.4. Проанализировать помехоустойчивости равномерного двоичного кода и оптимального кода Шеннона - Фано для случая помехоустойчивого свёрточного кодирования (т.е. при выполнении этой части работы следует обязательно использовать помехоустойчивое кодирование). Результаты представить в виде таблицы (по форме таблицы 4.2) для указанных значений вероятности ошибки в канале связи.

Представить в отчете таблицу сводных результатов эксперимента для случая помехоустойчивого кодирования (по форме таблицы 4.3).

Таблица 4.3 — Форма представления результатов эксперимента

|                                                                              |                 |  |
|------------------------------------------------------------------------------|-----------------|--|
| Число текстовых символов в сообщении                                         |                 |  |
| Число символов двоичного сообщения                                           | Равномерный код |  |
|                                                                              | Оптимальный код |  |
| Количество информации содержащейся в текстовом сообщении, бит                |                 |  |
| Количество информации в двоичном сообщении, бит                              | Равномерный код |  |
|                                                                              | Оптимальный код |  |
| Среднее количество информации содержащейся в текстовом сообщении, бит/символ |                 |  |
| Среднее количество информации содержащейся в двоичном сообщении, бит/символ  | Равномерный код |  |
|                                                                              | Оптимальный код |  |

#### 4.5. Содержание отчета по лабораторной работе

4.5.1. Цель лабораторной работы, в которой сформулировано какие именно коды и по каким параметрам исследуются в данной работе.

4.5.2. Процесс и результаты свёрточного кодирования слова из 5...7 букв по п. 4.4.1 и п. 4.4.2.

4.5.3. Результаты исследования помехоустойчивости равномерного двоичного кода и оптимального кода Шеннона – Фано без использования дополнительного помехоустойчивого кодирования по п. 4.4.3.

4.5.4. Результаты исследования помехоустойчивости равномерного двоичного кода и оптимального кода Шеннона – Фано использования дополнительного помехоустойчивого кодирования по п. 4.4.4.

4.5.5. Выводы по работе должны содержать подробный анализ и сопоставление полученных результатов, подробное обсуждение результатов.

## 4.6. Контрольные вопросы

### 4.6.1. Вопросы для подготовки к выполнению работы

- 1) Охарактеризуйте корректирующие коды и приведите их классификацию.
- 2) Объясните, от чего зависит длина пакета исправляемых ошибок в непрерывном цепном коде.
- 3) Приведите принципы непрерывного кодирования.
- 4) Дайте развернутое определение кодового расстояния.
- 5) Сформулируйте алгоритм декодирования для непрерывного цепного кода.
- 6) Сформулируйте алгоритм декодирования для непрерывного сверточного кода.
- 7) Объясните, каким образом в данной лабораторной работе исследуется принцип сверточного кодирования.
- 8) Сформулируйте общие принципы помехоустойчивого кодирования.
- 9) Перечислите, какие характеристики определяют корректирующие способности кода.
- 10) Определите, какие коды называются кодами Хэмминга.

### 4.6.2. Вопросы для подготовки к защите работы

- 1) Каждые 100 символов двоичного источника кодируются двоичной последовательностью, содержащей  $n = 125$  символов. Определите избыточность кода.
- 2) Двоичный код, предназначенный для кодирования восьми сообщений, содержит кодовые комбинации:

$$b_1 = 0\ 0\ 0\ 0\ 0; \quad b_2 = 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \quad ; \quad b_3 = 0\ 1\ 0\ 1\ 0; \quad b_4 = 1\ 1\ 0\ 0\ 1; \\ b_5 = 0\ 0\ 1\ 0\ 1; \quad b_6 = 1\ 0\ 1\ 1\ 0 \quad ; \quad b_7 = 0\ 1\ 1\ 1\ 1; \quad b_8 = 1\ 1\ 1\ 0\ 0.$$

Найдите избыточность кода и кодовое расстояние  $d_{min}$ .

3) Кодовое расстояние двоичного кода  $d_{min} = 6$ . Определите, в каких сочетаниях можно использовать его возможности по исправлению и обнаружению ошибок.

4) Объясните, каким образом осуществляется процедура кодирования в семизначном коде Хемминга.

5) Произведите построение блочного линейного кода типа (7,4), предназначенного для кодирования сообщений двоичного источника, имеющего объем  $K = 2^4$  символов. Покажите, что кодовое расстояние данного кода  $d_{min} = 3$ .

6) Составьте таблицу синдромов одиночных ошибок для кода типа (7,4) и показать, каким ошибочным разрядам они соответствуют.

7) Коды, в которых путем добавления двух проверочных элементов сумма всех элементов, полученная сложением по модулю 3, равна 0, называются кодами с числом единиц, кратным 3. Составьте кодовые комбинации такого кода построенного на базе пятиразрядного двоичного кода и найдите его избыточность.

8) Повышение эффективности кодов с обнаружением ошибок может быть достигнуто введением определенных зависимостей между элементами кодовых комбинаций. Примером таких кодов является корреляционный код, который строится по правилу: Элемент первичного кода преобразуется в два элемента, а именно 1 преобразуется в 10, а 0 в 01. Полагая, что первичный код является пятиразрядным, найдите избыточность корреляционного кода. Определите вероятность необнаруженной ошибки.

9) Охарактеризуйте помехоустойчивость равномерного двоичного кода по результатам экспериментального исследования.

10) Охарактеризуйте помехоустойчивость оптимального кода Шеннона – Фано по результатам экспериментального исследования.

## 5. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

### ИССЛЕДОВАНИЕ ЦИКЛИЧЕСКОГО КОДА БЧХ

#### 5.1. Цель лабораторной работы

Целью лабораторной работы является закрепление теоретических сведений о принципах помехоустойчивого кодирования дискретных сообщений (на примере циклического кода БЧХ) и исследование информационных характеристик кода при различных исходных параметрах.

#### 5.2. Теоретическая часть

##### 5.2.1. Принципы построения циклических кодов

Циклические коды являются разновидностью систематических кодов и поэтому обладают всеми их свойствами. Эффективность при обнаружении и исправлении ошибок обеспечивает широкое применение этих кодов на практике.

Циклические коды более удобно рассматривать, представляя комбинацию данного кода не в виде последовательности нулей и единиц, а в виде полинома некоторой степени

$$F(X) = a_{n-1} X^{n-1} + a_{n-2} X^{n-2} + \dots + a_1 X + a_0,$$

где  $X$  — основание системы счисления;  $a_i$  — цифры данной системы счисления,  $n$  — длина кодовой комбинации.

Например, двоичная последовательность 01001 может быть записана в виде полинома от переменной  $X$

$$F(X) = 0 \cdot X^4 + 1 \cdot X^3 + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^1 + 1 \cdot X^0 = X^3 + 1.$$

Представление кодовых комбинаций в виде полинома позволяет свести действия над ними к действиям над многочленами. В целом идея построения циклических кодов базируется на использовании неприводимых многочленов. Неприводимым называют многочлен, который не может быть представлен в виде произведения многочленов низших степеней,

т. е. такой многочлен делится на самого себя или на единицу и не делится ни на какой другой многочлен.

Построение комбинаций циклических кодов возможно путем умножения комбинаций первичного кода на порождающий полином  $G(X)$ , который используется при кодировании и декодировании кодовых комбинаций. Степень порождающего полинома определяет число проверочных символов в кодовой комбинации  $r$ .

Для любого циклического кода двучлен  $X^n + 1$  должен делиться без остатка на порождающий многочлен.

### 5.2.2. Матричное представление циклических кодов

Циклический код, как и всякий систематический код, однозначно определяется подобранными определенным образом  $k$  исходными кодовыми комбинациями. Эти комбинации записывают в виде производящей матрицы  $G_{n, k}$ , состоящей из  $n$  столбцов и  $k$  строк. Для циклических кодов обычно используют обозначение  $(n, k)$ , где  $n$  — длина кодовой комбинации,  $k$  — число проверочных символов,  $r = n - k$  — число проверочных символов [7].

Для формирования строк производящей матрицы по первому способу образования циклического кода берут не произвольные комбинации избыточного кода  $Q(X)$ , а лишь те из них, которые содержат единицу в одном разряде  $Q_i(X)$ , где  $i = 1 - k$ .

Именно эти комбинации умножаются на  $X^r$  и находится остаток от деления  $\frac{Q_i(X)X^r}{G(X)}$ , равный  $R_i(X)$ . Соответствующая строка производящей матрицы записывается в виде  $Q_i(X)X^r + R_i(X)$ . При этом вся матрица разбивается на две подматрицы  $G_{n, k} = [E_k^T, C_{r, k}]$ , где  $E_k^T$  — единичная транспонированная матрица;  $C_{r, k}$  — подматрица с числом столбцов  $r$  и строк  $k$ , образованная остатками от деления  $R_i(X)$ . В этом случае получа-

ют производящую матрицу в каноническом виде. В общем виде производящая матрица имеет вид

$$G_{n,k} = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kr} \end{array} \right].$$

Производящая матрица дает возможность получить первые  $k$  комбинаций кода. Остальные  $2^k - k - 1$  комбинаций получают суммированием по модулю два строк производящей матрицы во всех возможных сочетаниях.

**Пример 1.** Образующий полином имеет вид  $G(X) = X^3 + X + 1$  или  $G(0,1) = 1011$  при  $n = 7$  и  $k = 4$ . Необходимо получить производящую матрицу.

Поскольку  $k=4$ , единичные векторы имеют вид  $Q_1 = 0001$ ;  $Q_2 = 0010$ ;  $Q_3 = 0100$ ;  $Q_4 = 1000$ . Учитывая, что  $r = n - k = 3$ , проведем необходимые операции с вектором  $Q_1$ :

$$\frac{Q_1(X)X^r}{G(X)} = \frac{0001 \cdot 1000}{1011}.$$

Произведя деление, находим остаток  $R_1(X) = 011$ . Следовательно, первая строка производящей матрицы 0001011. После аналогичных операций с  $Q_2, Q_3, Q_4$  получаем  $R_2(X) = 110, R_3(X) = 111, R_4(X) = 101$ . Далее получаем производящую матрицу в каноническом виде

$$G_{7,4} = \left[ \begin{array}{c|c} \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \end{array} \right].$$

$E_k^T$ 
 $C_{r,k}$

Строки полученной матрицы  $G_{7,4}$  являются четырьмя первыми комбинациями кода. Остальные 12 комбинаций образуют путем суммиро-

вания по модулю два всевозможных сочетаний строк производящей матрицы. Полученные разрешенные кодовые комбинации приведены в таблице 5.1.

Таблица 5.1 — Кодовая таблица для циклического кода (7,4)

| Порядковый номер | Кодовая комбинация     |                     | Способ получения               |
|------------------|------------------------|---------------------|--------------------------------|
|                  | Информационные разряды | Проверочные разряды |                                |
| 1                | 0001                   | 011                 | 1                              |
| 2                | 0010                   | 110                 | 2                              |
| 3                | 0100                   | 111                 | 3                              |
| 4                | 1000                   | 101                 | 4                              |
| 5                | 0011                   | 101                 | $1 \oplus 2$                   |
| 6                | 0101                   | 100                 | $1 \oplus 3$                   |
| 7                | 1001                   | 110                 | $1 \oplus 4$                   |
| 8                | 0110                   | 001                 | $2 \oplus 3$                   |
| 9                | 1010                   | 011                 | $2 \oplus 4$                   |
| 10               | 1100                   | 010                 | $3 \oplus 4$                   |
| 11               | 0111                   | 010                 | $1 \oplus 2 \oplus 3$          |
| 12               | 1011                   | 000                 | $1 \oplus 2 \oplus 4$          |
| 13               | 1101                   | 001                 | $1 \oplus 3 \oplus 4$          |
| 14               | 1110                   | 100                 | $2 \oplus 3 \oplus 4$          |
| 15               | 1111                   | 111                 | $1 \oplus 2 \oplus 3 \oplus 4$ |
| 16               | 0000                   | 000                 | Сумма всех 15-ти комбинаций    |

Необходимо отметить, что при построении производящей матрицы циклического кода каждый код можно представить в  $k - 1$  различных вариантах, которые отличаются друг от друга длиной  $n$ , количеством информационных элементов  $k$ , а также пропускной способностью при одинаковых корректирующих характеристиках. Эти варианты укороченных циклических кодов получают вычеркиванием некоторого количества последних строк и такого же количества столбцов слева в образующей матрице  $G_{n, k}$ . При этом число проверочных элементов остается неизменным,

а длина кода и число информационных элементов уменьшается соответственно на количество, равное числу вычеркнутых строк и столбцов.

В циклических кодах, как и во всех систематических, процесс кодирования сводится к определению  $r$  проверочных разрядов на основании известных  $k$  информационных. Каждый проверочный разряд находится с помощью проверочных соотношений, а определение всех проверочных разрядов требует  $r$  проверочных соотношений, которые записывают одно под другим в виде проверочной матрицы  $H$ .

В общем случае проверочная матрица образуется следующим образом. Вначале составляют единичную матрицу

$$E_r = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

после чего к ней слева приписывают подматрицу  $D_{k,r}$ , содержащая  $k$  столбцов и  $r$  строк, причем каждая ее строка соответствует столбцу проверочных разрядов подматрицы  $C_{r,k}$  производящей матрицы  $G_{n,k}$ , т. е.  $D_{k,r} = G_{r,k}^T$ , т. е.

$$D_{k,r} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} & \dots & b_{k1} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} & \dots & b_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1r} & b_{2r} & b_{3r} & \dots & b_{kr} \end{vmatrix}.$$

Следовательно, проверочная матрица образуется из двух подматриц в следующем виде

$$H = [D_{k,r}; E_r] = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} & \dots & b_{k1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} & \dots & b_{k2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1r} & b_{2r} & b_{3r} & \dots & b_{kr} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

С помощью этой матрицы операцию кодирования осуществляют следующим образом. Позиции, занимаемые единицами в  $i$ -ой строке подматрицы  $D_{k,r}$ , определяют те информационные разряды, которые должны участвовать в формировании  $i$ -го проверочного разряда. Проверочная матрица удобна также для указания места ошибки в кодовой комбинации при декодировании.

**Пример 2.** Для исходных данных примера 1 построить проверочную матрицу кода (7,4). На первом этапе находим подматрицу  $D_{k,r}$ , которая является транспонированной по отношению к матрице  $C_{r,k}$

$$D_{k,r} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Затем к ней справа приписываем единичную матрицу  $E_r$  и получаем проверочную матрицу

$$H = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Проверочные символы, определяемые по матрице  $H$ :

$$b_1 = a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 ; b_2 = a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 ; b_3 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_4$$

и сообщение, например 0110, закодированное таким кодом, будет иметь вид 0110001, так как  $b_1 = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$ ;  $b_2 = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$ ;

$$b_3 = 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1.$$

В циклических кодах проверочная матрица  $H$  может быть найдена с помощью проверочного полинома

$$h(X) = \frac{X^n + 1}{G^{-1}(X)} = b_0 + b_1 X + \dots + b_k X^k,$$

где  $G^{-1}(X)$  — полином, сопряженный с образующим полиномом  $G(X)$ , или обратный ему.

Известно, что в сопряженных полиномах члены располагаются в обратном порядке. Так полиномы 1101 и 1011 являются сопряженными.

При таком построении проверочная матрица имеет вид

$$H = \begin{matrix} & \overbrace{\hspace{10em}}^n & \\ \begin{matrix} b_0 & b_1 & \dots & b_k & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & \dots & b_{k-1} & b_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & b_{k-2} & b_{k-1} & b_k & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \underbrace{b_0 \ b_1 \ \dots \ b_k}_{k+1} \end{matrix} \end{matrix}.$$

Первая строка матрицы представляет собой комбинацию полинома  $h(X)$ , дополненную  $(r - 1)$  нулями. Последующие  $r - 1$  строк матрицы составляют путем циклического сдвига первой строки. Проверочная матрица, построенная первым способом, внешне может отличаться от матрицы, построенной с помощью проверочного полинома. Однако обе матрицы всегда могут быть сведены к одному виду.

**Пример 3.** Дан образующий полином  $G(X) = X^3 + X + 1$  или в виде  $G(0,1) = 1011$ ,  $n = 7$ ,  $k = 4$ . Необходимо составить проверочную матрицу с помощью проверочного полинома.

Находим проверочный полином

$$h(X) = \frac{X^7 + 1}{(X^3 + X + 1)^{-1}} = \frac{10000001}{1101} = 11101.$$

Следовательно, проверочная матрица имеет вид

$$H = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

### 5.2.3. Коррекция ошибок при циклическом кодировании

Для исправления ошибок принятая комбинация после определенного числа циклических сдвигов «подгоняется» под остаток таким обра-

зом, чтобы в сумме с остатком она давала бы исправленную комбинацию. Остаток при этом представляет собой разницу между искаженными и правильными символами, а единицы в остатке стоят на местах искаженных разрядов в «подогнанной» циклическими сдвигами комбинации.

Таким образом, для обнаружения и исправления ошибочного разряда производят следующие операции:

- 1) принятую комбинацию делят на образующий полином;
- 2) подсчитывают количество единиц в остатке (вес остатка  $\omega$ ). Если  $t_{\text{и}} \geq \omega$ , где  $t_{\text{и}}$  — допустимое число исправляемых данным кодом ошибок, то принятую комбинацию складывают по модулю два с полученным остатком. Сумма дает исправленную комбинацию. Если  $t_{\text{и}} < \omega$ , то
- 3) производят циклический сдвиг принятой комбинации влево на один разряд. Комбинацию, полученную в результате циклического сдвига, делят на образующий полином  $G(X)$ . Если в результате повторного деления  $t_{\text{и}} \geq \omega$ , то делимое суммируют с остатком, затем
- 4) производят циклический сдвиг вправо на один разряд комбинации, полученной в результате суммирования последнего делимого с последним остатком. Полученная комбинация уже не содержит ошибок. Если после первого циклического сдвига и последующего деления остаток получается таким, что его вес  $t_{\text{и}} < \omega$ , то
- 5) повторяют операцию по п. 3 до тех пор, пока не будет достигнуто  $t_{\text{и}} \geq \omega$ . В этом случае комбинацию, полученную в результате последнего циклического сдвига, суммируют с остатком от деления этой комбинации на образующий многочлен, а затем
- 6) производят циклический сдвиг вправо на столько разрядов, на сколько сдвинута суммируемая с последним остатком комбинация относительно принятой комбинации. В результате образуется полученная комбинация.

**Пример 4.** При передаче комбинации 1001110 циклического кода, исправляющего одиночные ошибки ( $t_{\text{и}} = 1$ ), полученного с помощью образующего полинома 1011, произошла ошибка в четвертом разряде. Принятая комбинация имеет вид 1000110. Процесс исправления ошибки следующий:

1) Делим принятую комбинацию на образующий полином

$$\begin{array}{r}
 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0 \mid 1\ 0\ 1\ 1\ . \\
 \underline{1\ 0\ 1\ 1} \phantom{0000} \\
 1\ 1\ 1\ 1\phantom{00} \\
 \underline{1\ 0\ 1\ 1} \phantom{00} \\
 1\ 0\ 0\ 0\phantom{00} \\
 \underline{1\ 0\ 1\ 1} \phantom{00} \\
 1\ 1\phantom{00}
 \end{array}$$

2) Сравниваем вес полученного остатка  $\omega$  с числом исправляемых ошибок  $t_{\text{и}} = 1$ , т. е.  $t_{\text{и}} < \omega$ .

3) Производим циклический сдвиг принятой комбинации на один разряд влево и деление на  $G(X)$

$$\begin{array}{r}
 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \mid 1\ 0\ 1\ 1\ . \\
 \phantom{00} \underline{1\ 0\ 1\ 1} \phantom{0000} \mid 1 \\
 \phantom{00} 1\ 1\ 0
 \end{array}$$

4) Повторяем п. 3 до тех пор, пока не будет получено  $t_{\text{и}} \geq \omega$ :

$$\begin{array}{l}
 \text{а) } \begin{array}{r}
 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0 \mid 1\ 0\ 1\ 1 \\
 \underline{1\ 0\ 1\ 1} \phantom{0000} \mid 1\ 1 \\
 1\ 1\ 0\ 0\phantom{00} \\
 \phantom{00} \underline{1\ 0\ 1\ 1} \phantom{00} \\
 1\ 1\ 1
 \end{array} \quad t_{\text{и}} < \omega; \\
 \text{б) } \begin{array}{r}
 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0 \mid 1\ 0\ 1\ 1 \\
 \phantom{00} \underline{1\ 0\ 1\ 1} \phantom{0000} \mid 1\ 1\ 1 \\
 \phantom{00} 1\ 1\ 0\ 0\phantom{00} \\
 \phantom{00} \underline{1\ 0\ 1\ 1} \phantom{00} \\
 \phantom{00} 1\ 1\ 1\ 0 \\
 \phantom{00} \phantom{00} \underline{1\ 0\ 1\ 1} \\
 \phantom{00} \phantom{00} 1\ 0\ 1
 \end{array} \quad t_{\text{и}} < \omega;
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{в) } 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \mid 1\ 0\ 1\ 1 \\
 \underline{1\ 0\ 1\ 1} \mid 1\ 1\ 1\ 1 \\
 1\ 1\ 0\ 0 \mid \\
 1\ 0\ 1\ 1 \\
 \underline{1\ 1\ 1\ 0} \\
 1\ 0\ 1\ 1 \quad t_{\text{и}} = \omega. \\
 \underline{1\ 0\ 1\ 0} \\
 1\ 0\ 1\ 1 \\
 \underline{\phantom{1\ 0\ 1\ 1}} \\
 1
 \end{array}$$

5) Складываем по модулю два последнее делимое с последним остатком

$$\begin{array}{r}
 \oplus \quad 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\
 \phantom{\oplus} \phantom{1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0} 1 \\
 \hline
 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1
 \end{array}$$

6) Производим циклический сдвиг комбинации, полученной в результате суммирования последнего делимого с последним остатком, вправо на четыре разряда (так как принятая комбинация четырежды сдвигалась влево):  $1110100 \rightarrow 0111010 \rightarrow 0011101 \rightarrow 1001110$ . Полученная комбинация соответствует переданной, т. е. не содержит ошибки.

#### 5.2.4. Характеристика и основные свойства кодов

##### *Боуза – Чоудхури - Хоквингема (БЧХ)*

Коды БЧХ являются разновидностью циклических кодов. Образующий полином для кодов БЧХ может быть определен по заданному кодовому расстоянию  $d$  и длине кодовой комбинации  $n$ . Длина кодовой комбинации кодов БЧХ определяется выражением [7]

$$n = 2^m - 1,$$

где  $m$  — любое целое число. Таким образом, величина  $n$  может быть равна 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023 разрядам и т. д.

Количество проверочных разрядов кода

$$r \leq \frac{m(d-1)}{2}.$$

Следовательно, число информационных разрядов

$$k \geq (2^m - 1) - \frac{m(d-1)}{2}.$$

Параметры кодов БЧХ (до  $n = 63$ ), вычисленные по представленным выше формулам, приведены в таблице 5.2 с указанием кодового расстояния и числа информационных символов.

Таблица 5.2 — Параметры кодов БЧХ

| Длина кодовой комбинации $n$ | Число информационных символов $k$ | Число контрольных символов $r$ | Кодовое расстояние $d$ | $k/n$ |
|------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------|------------------------|-------|
| 7                            | 4                                 | 3                              | 3                      | 0,57  |
| 15                           | 11                                | 4                              | 3                      | 0,73  |
| 15                           | 7                                 | 8                              | 5                      | 0,47  |
| 15                           | 5                                 | 10                             | 7                      | 0,33  |
| 31                           | 26                                | 5                              | 3                      | 0,84  |
| 31                           | 21                                | 10                             | 5                      | 0,68  |
| 31                           | 16                                | 15                             | 7                      | 0,52  |
| 31                           | 11                                | 20                             | 11                     | 0,35  |
| 31                           | 6                                 | 25                             | 15                     | 0,19  |
| 63                           | 57                                | 6                              | 3                      | 0,9   |
| 63                           | 51                                | 12                             | 5                      | 0,81  |
| 63                           | 45                                | 18                             | 7                      | 0,72  |
| 63                           | 39                                | 24                             | 9                      | 0,62  |
| 63                           | 36                                | 27                             | 11                     | 0,57  |
| 63                           | 30                                | 33                             | 13                     | 0,48  |
| 63                           | 24                                | 39                             | 15                     | 0,37  |
| 63                           | 18                                | 45                             | 21                     | 0,29  |
| 63                           | 16                                | 47                             | 23                     | 0,25  |
| 63                           | 10                                | 53                             | 27                     | 0,16  |
| 63                           | 7                                 | 56                             | 31                     | 0,11  |

Образующий полином кода БЧХ является наименьшим общим кратным (НОК) для минимальных полиномов  $m_i(x)$ , где  $i = 1, 3, 5, \dots, d-2$  — порядок полинома  $G(X) = \text{НОК} \{m_1(X) m_3(X) \dots m_{d-2}(X)\}$ . Вычисленные значения минимальных полиномов для степени  $m = 2 \dots 7$  приведены в таблице 5.3.

Значения  $m_i(x)$  даны в таблице в восьмеричной системе счисления. Так полином одиннадцатого порядка для степени  $m = 7$ , записанный в таблице числом 325, представляет следующую двоичную последовательность

$$\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 5 \\ 011 & 010 & 101, \end{array}$$

а многочлен этого полинома имеет вид  $X^7 + X^6 + X^4 + X^2 + 1$ .

Для нахождения образующего полинома кода длиной  $n = 2^m - 1$  разрядов с кодовым расстоянием  $d$  необходимо выписать из таблицы все значения минимальных полиномов, соответствующих заданному  $m$ , до порядка  $d-2$  включительно. Если данный порядок в таблице отсутствует, следует взять ближайший меньший.

Таблица 5.3 — Коэффициенты минимальных полиномов

| Порядок полинома $i$ | Минимальные полиномы при величине степени $m$ |    |    |    |     |     |
|----------------------|-----------------------------------------------|----|----|----|-----|-----|
|                      | 2                                             | 3  | 4  | 5  | 6   | 7   |
| 1                    | 7                                             | 13 | 23 | 45 | 103 | 211 |
| 3                    | -                                             | -  | 37 | 75 | 127 | 217 |
| 5                    | -                                             | -  | 07 | 67 | 147 | 235 |
| 7                    | -                                             | -  | -  | -  | 111 | 367 |
| 9                    | -                                             | -  | -  | -  | 015 | 277 |
| 11                   | -                                             | -  | -  | -  | 155 | 325 |
| 13                   | -                                             | -  | -  | -  | -   | 203 |
| 15                   | -                                             | -  | -  | -  | -   | -   |
| 17                   | -                                             | -  | -  | -  | -   | -   |
| 19                   | -                                             | -  | -  | -  | -   | 313 |
| 21                   | -                                             | -  | -  | -  | 007 | 345 |

**Пример 4.** Пусть необходимо построить код длиной  $n = 15$  ( $m = 4$ ) с  $d = 7$ . Следовательно, образующий полином  $G(X) = m_1(X) m_3(X) m_5(X)$ . По таблице 5.3 находим минимальные полиномы :  $m_1(X)=23$  или  $10011 = X^4 + X + 1$ ;  $m_3(X)= 37$  или  $11111 = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ ;  $m_5(X)=07$  или  $111 = X^2 + X + 1$ .

Умножив полученные минимальные полиномы, определим образующий полином заданного кода БЧХ:  $G(X) = 10100110111$ .

Путем построения производящей матрицы можно убедиться в том, что полученный код действительно имеет кодовое расстояние равное семи.

Основные свойства кодов БЧХ:

- коды БЧХ обладают нечетным значением минимального кодового расстояния  $d_{min}$ ;
- все коды БЧХ строят с помощью образующего полинома  $G(X)$ ;
- для кодов БЧХ справедливо соотношение для максимального кодового расстояния  $d_{max}$  и числа  $m$

$$d_{max} = 2^{m-1} - 1.$$

### 5.3. Описание лабораторной установки

Лабораторная работа выполняется на персональном компьютере с помощью специально разработанной программы. Вызов программы производится из основной программы «Лабораторные работы по ОТПИ», ярлык которой находится на «Рабочем столе». После вызова основной программы необходимо выбрать лабораторную работу «Исследование циклического кода БЧХ».

### 5.4. Порядок выполнения лабораторной работы

5.4.1. Произвести исследование помехоустойчивости кода БЧХ указанного в таблице 5.4 порядка при значительном объеме передаваемых

данных. Для проведения исследований следует использовать специальную программу *ВСН*. В качестве источника данных использовать генератор псевдослучайной двоичной последовательности встроенный в программу.

Таблица 5.4 — Выбор варианта исходных данных для выполнения лабораторной работы

| Последняя цифра зачетной книжки | Тип кода БЧХ                 |                               |                                   | Объем двоичной последовательности |
|---------------------------------|------------------------------|-------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
|                                 | Длина кодовой комбинации $k$ | Число исправляемых ошибок $t$ | Число информационных символов $n$ |                                   |
| 0                               | 15                           | 1                             | 11                                | 220                               |
| 1                               | 15                           | 2                             | 7                                 | 700                               |
| 2                               | 15                           | 3                             | 5                                 | 550                               |
| 3                               | 31                           | 1                             | 26                                | 260                               |
| 4                               | 31                           | 2                             | 21                                | 840                               |
| 5                               | 31                           | 3                             | 16                                | 640                               |
| 6                               | 31                           | 4                             | 11                                | 770                               |
| 7                               | 31                           | 5                             | 11                                | 660                               |
| 8                               | 31                           | 6                             | 6                                 | 900                               |
| 9                               | 31                           | 7                             | 6                                 | 300                               |

Исследование провести для указанного в таблице 5.4 объема двоичной последовательности при изменении вероятности появления ошибки. Вероятность присутствия в последовательности нулей  $P(0)$  принять равной 50 %. Рассмотреть следующие значения вероятности ошибки 5; 10; 15; 20;... 35; 40 %.

Результаты исследований следует оформить в виде таблицы (в соответствии с формой таблицы 5.5) и графиков зависимостей числа ошибок в канале связи, количества принятой верно информации, вероятности ошибки в блоке от вероятности ошибки при передаче данных по каналу связи с помехами.

5.4.2. Исследовать помехоустойчивость кода БЧХ указанного в таблице 5.4 порядка на примере одного блока. В качестве источника данных использовать двоичную последовательность, задаваемую вручную. Составить кодовую комбинацию, соответствующую двум последним цифрам зачетной книжки студента, преобразованным в двоичную форму и повторенным нужное число раз (число повторений определяется количеством информационных символов кода). Исследование выполнить для указанного в таблице 5.4 кода при различных значениях вероятности появления ошибки. Вероятность присутствия в последовательности нулей  $P(0)$  принять равной 50 %. Рассмотреть следующие значения вероятности ошибки 5; 10; 15; 20;... 35; 40 %. Результаты исследований следует оформить в виде таблицы (в соответствии с формой таблицы 5.6). Построить графики зависимостей количества ошибок при передаче, числа ошибок после восстановления от вероятности ошибки при передаче данных по каналу связи с помехами.

Таблица 5.5 — Форма представления результатов экспериментальных исследований

| Вероятность ошибки (%) | Число ошибок в канале связи | Число ошибок |     | Количество принятой верно информации, бит | Число искаженных блоков БЧХ | Вероятность ошибки в блоке (%) |
|------------------------|-----------------------------|--------------|-----|-------------------------------------------|-----------------------------|--------------------------------|
|                        |                             | «0»          | «1» |                                           |                             |                                |
| 5                      |                             |              |     |                                           |                             |                                |
| 10                     |                             |              |     |                                           |                             |                                |
| 15                     |                             |              |     |                                           |                             |                                |
|                        |                             |              |     |                                           |                             |                                |
| 35                     |                             |              |     |                                           |                             |                                |
| 40                     |                             |              |     |                                           |                             |                                |

Таблица 5.6 — Форма представления результатов  
экспериментальных исследований

| Вероят-<br>ность<br>ошибки (%) | Количество<br>ошибок при<br>передаче | Число ошибок<br>после восста-<br>новления | Принятая<br>последователь<br>ность | Комбинация<br>после вос-<br>становления |
|--------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------------|
| 5                              |                                      |                                           |                                    |                                         |
| 10                             |                                      |                                           |                                    |                                         |
| 15                             |                                      |                                           |                                    |                                         |
| ...                            |                                      |                                           |                                    |                                         |
| ...                            |                                      |                                           |                                    |                                         |
| 35                             |                                      |                                           |                                    |                                         |
| 40                             |                                      |                                           |                                    |                                         |

5.4.3. Исследовать код БЧХ на примере реальной текстовой последовательности. В качестве тестовой последовательности можно использовать фамилию, имя и отчество студента. В качестве источника данных использовать текстовую последовательность, задаваемую вручную. Исследование провести для указанного в таблице 5.4 кода при изменении вероятности появления ошибки. Вероятность присутствия в последовательности нулей  $P(0)$  принять равной 50 %. Рассмотреть следующие значения вероятности ошибки 5; 10; 15; 20;... 35; 40 %. Результаты исследований следует оформить в виде таблицы (в соответствии с формой таблицы 5.7). Построить графики зависимостей количества числа ошибочных двоичных символов, числа ошибочных текстовых символов от вероятности ошибки при передаче данных по каналу связи с помехами.

5.4.4. Составить код БЧХ в соответствии с указанными в таблице 5.4 параметрами. Номер варианта определяется последней цифрой зачетной книжки студента. Для этого вычислить образующий полином  $G(X)$  и произвести построение производящей матрицы.

Таблица 5.7 — Форма представления результатов  
экспериментальных исследований

| Вероят-<br>ность<br>ошибки<br>(%) | Число ошибоч-<br>ных двоичных<br>символов |   | Число ошибоч-<br>ных текстовых<br>символов |   | Декодированный<br>текст |
|-----------------------------------|-------------------------------------------|---|--------------------------------------------|---|-------------------------|
|                                   |                                           | % |                                            | % |                         |
| 5                                 |                                           |   |                                            |   |                         |
| 10                                |                                           |   |                                            |   |                         |
| 15                                |                                           |   |                                            |   |                         |
| ...                               |                                           |   |                                            |   |                         |
| ...                               |                                           |   |                                            |   |                         |
| 35                                |                                           |   |                                            |   |                         |
| 40                                |                                           |   |                                            |   |                         |

5.4.5. Составить проверочную матрицу для одного из вариантов кода БЧХ с длиной кодовой комбинации 15.

## 5.5. Содержание отчета по лабораторной работе

5.5.1. Цель лабораторной работы, в которой указать информационные характеристики кода БЧХ, исследуемые в данной работе.

5.5.2. Результаты исследования помехоустойчивости кода БЧХ для входной псевдослучайной двоичной последовательности в соответствии с п. 5.4.1. Результаты должны быть представлены в виде таблицы и графиков.

5.5.3. Результаты исследования помехоустойчивости кода БЧХ для входной двоичной последовательности в соответствии с п. 5.4.2. Результаты должны быть представлены в виде таблицы и графиков.

5.5.4. Результаты исследования помехоустойчивости кода БЧХ на примере реальной текстовой последовательности в соответствии с п. 5.4.3. Результаты должны быть представлены в виде таблицы и графиков.

5.5.5. Результаты построения кода БЧХ с определением образующего полинома и производящей матрицы. В отчете привести все промежуточные результаты.

5.5.6. Результаты построения проверочной матрицы для одного из вариантов кода БЧХ с длиной кодовой комбинации 15 (с обязательным представлением всех промежуточных результатов).

5.5.7. Полная характеристика исследованных кодов БЧХ (число исправляемых ошибок, число обнаруживаемых ошибок, кодовое расстояние и т.д.).

5.5.8. Сделать выводы по работе с развернутым анализом помехоустойчивых свойств кодов БЧХ.

## 5.6. Контрольные вопросы

5.6.1. Объясните принцип представления циклического кода в виде полинома и охарактеризуйте назначение образующего полинома.

5.6.2. Охарактеризуйте общие принципы представления циклических кодов в виде матриц.

5.6.3. Поясните особенности построения производящей матрицы циклического кода.

5.6.4. Составьте производящую матрицу для кода  $(7, 4)$  с образующим полиномом 0101.

5.6.5. Охарактеризуйте общую структуру проверочной матрицы кода БЧХ.

5.6.6. Постройте проверочную матрицу кода БЧХ типа  $(7, 4)$  с образующим полиномом  $G(X) = 0101$  с помощью получения подматрицы  $D_{4,3}$ .

5.6.7. Постройте проверочную матрицу кода БЧХ типа  $(7, 4)$  с помощью проверочного полинома, если образующий полином  $G(X) = 0111$ .

5.6.8. Приведите алгоритм обнаружения и исправления ошибок при циклическом кодировании.

5.6.9. Рассчитайте образующий полином кода БЧХ длиной  $n = 15$  с кодовым расстоянием  $d = 5$ .

5.6.10. Перечислите основные свойства кодов БЧХ и укажите область использования кодов БЧХ.

**БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Пенин П.И. Радиотехнические системы передачи информации / П.И. Пенин, Л.М. Филиппов. — М.: Радио и связь, 1984. — 256 с.
2. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. / Б. Скляр. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. — 1104 с.
3. Столлингс В. Компьютерные системы передачи данных / В. Столлингс. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2002. — 928 с.
4. Кловский Д.Д. Теория передачи сигналов в задачах / Д.Д. Кловский, В.А. Шилкин. — М.: Связь, 1978. — 252 с.
5. Теория передачи сигналов / А.В. Зюко, Д.Д. Кловский, М.В. Назаров и др. — М.: Радио и связь, 1986. — 304 с.
6. Системи телекомунікацій / М.І. Мазурков, В.І. Правда, П.Ю. Баранов і др.; За ред. М.І. Мазуркова і В.І. Правди. — Одеса: ТЕС, 2005. — 288 с.
7. Кодирование информации (двоичные коды) / Н.Т. Березюк, А.Г. Андрущенко, С.С. Мощицкий и др. — Харьков: Вища школа, 1978. — 252 с.
8. Цымбал В.П. Теория информации и кодирование / В.П. Цымбал. — Киев: Вища школа, 1982. — 304 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Методика измерения спектральных характеристик сигналов

В лабораторной работе по п. 1 измерение спектров сигналов проводится с помощью специализированной персональной ЭВМ. Ввод аналоговых сигналов производится устройством аналогового ввода-вывода Sound Blaster. Для визуализации характеристик аналоговых сигналов используется специализированное программное обеспечение.

#### Порядок проведения измерений

1) Произвести все необходимые подключения согласно структурной схеме установки (рис 1.6).

2) Установить минимальный уровень сигнала для используемого низкочастотного генератора.

3) Запустить программу предварительного контроля уровня сигнала и анализа спектральных характеристик *Frequency Analyzer*. Для этого при загруженной операционной системе *Windows 95/98* произвести запуск через главное меню систем ПУСК  $\Rightarrow$  Основы теории передачи информации  $\Rightarrow$  Лабораторная работа 1  $\Rightarrow$  *Frequency Analyzer*. Вид рабочего окна программы показан на рис. А.1. Вид временной зависимости сигнала отображается в верхней правой области окна *Frequency Analyzer*.

4) Увеличить уровень входного сигнала, таким образом, чтобы отсутствовали ограничения вводимого сигнала (контроль по временной развертке сигнала в правом верхнем окне).

5) Произвести качественный анализ спектра входного сигнала в главной области окна. Ось частот в этом окне размещается снизу-вверх и расположена слева. Короткие метки на оси соответствуют 100 Гц, а длинные метки 1000 Гц.

Спектр исследуемого сигнала отображается в виде разноцветного следа, который остается за перемещающейся вертикальной строкой развертки белого цвета. Различные цвета соответствуют различной интенсивности различных частотных компонент входного сигнала. Метод расчета спектра — быстрое преобразование Фурье (БПФ). Соответственно при подаче синусоидального сигнала на экране анализатора должна отмечаться горизонтальная линия соответствующая единственной составляющей в спектре сигнала.

Входной сигнал более насыщенный частотными составляющими будет представлен в виде семейства горизонтальных линий различного цвета.

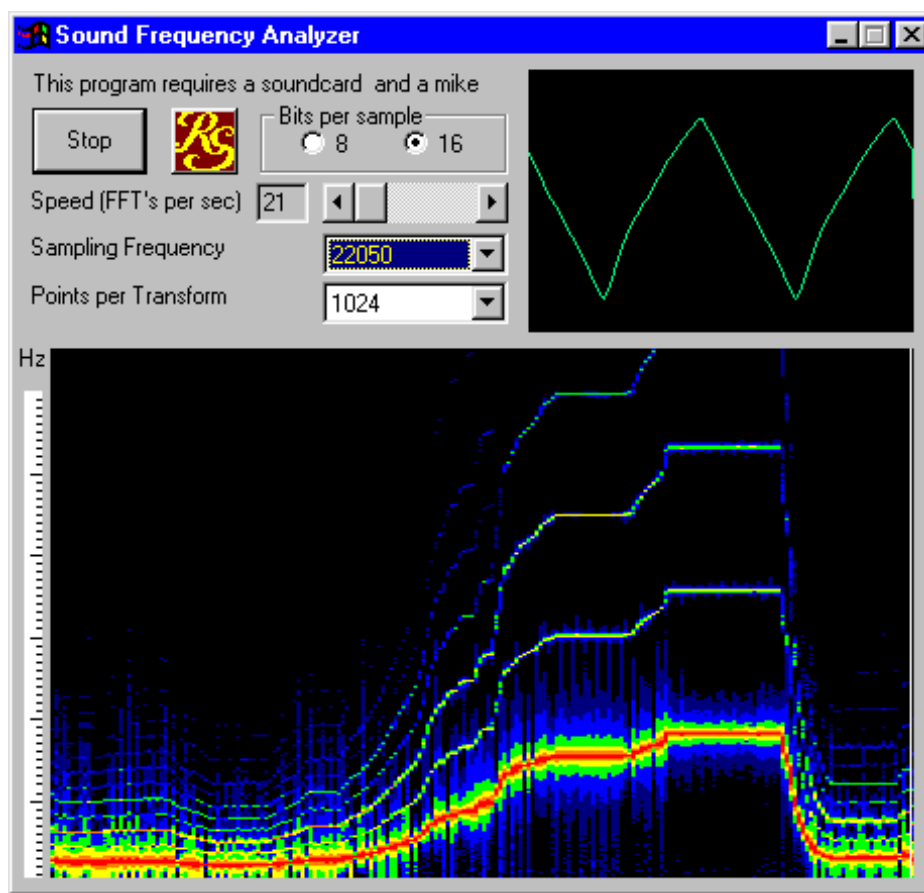


Рисунок А.1 — Вид окна приложения Frequency Analyzer при анализе спектра сигнала

6) После установки необходимого уровня сигнала закончить работу с программой *Frequency Analyzer*. При этом обязательно выйти из нее

стандартным способом *Windows* «щелкнув» мышью на значке ☒ в верхней части рабочего окна.

7) Запустить программу измерения спектра входного сигнала *Sbfreq4*: ПУСК  $\Rightarrow$  Основы теории передачи информации  $\Rightarrow$  Лабораторная работа 1  $\Rightarrow$  Анализатор спектра *Sbfreq4*. Вид рабочего окна программы показан на рис. А.2.

8) В некоторых случаях уровень входного сигнала для анализатора спектра *Sbfreq4* может быть установлен выше требуемого. В этом случае на экране будут наблюдаться вспышки фона рабочего окна (красного цвета). Если после запуска программы наблюдаются вспышки фона, следует уменьшить уровень входного сигнала до устранения эффекта мерцания.

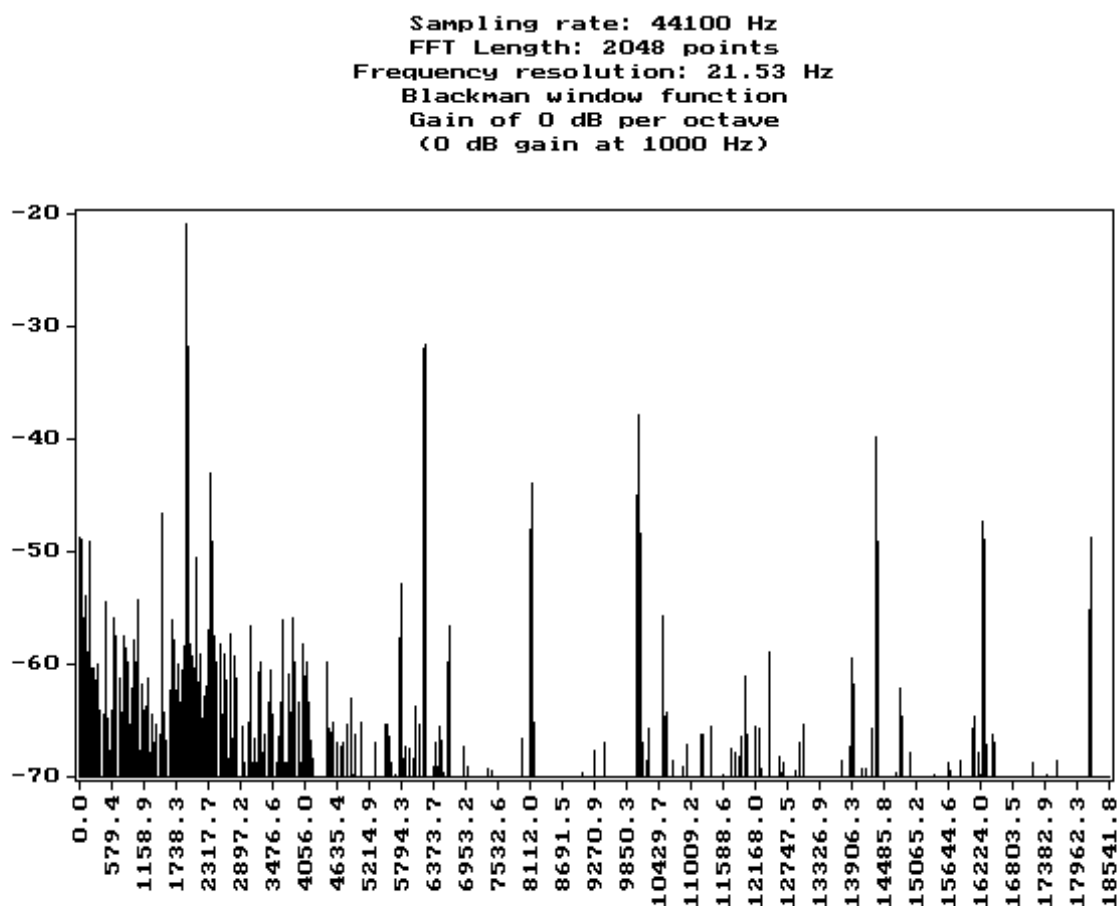


Рисунок А.2 — Вид окна приложения *Sbfreq4* при анализе спектра сигнала

9) После запуска программа отображает на экране спектр входного сигнала, рассчитанный методом БПФ при следующих исходных данных:

- частота выборки 44100 Гц (допустимые значения 5000...44100 Гц);
- разрядность БПФ 2048;
- логарифмический масштаб по оси  $Y$ ;
- линейный масштаб по оси  $X$ ;
- Окно преобразования — Хемминга (синус на пьедестале).

10) Зафиксировать спектральную характеристику, нажав клавишу <пробел> и запротоколировать результаты измерений. В режиме установки доступен маркер-визир, перемещение которого производится с помощью клавиш  $H$ ,  $J$ ,  $K$  и  $L$ . Назначение клавиш представлено в таблице А.1.

Таблица А.1 — Назначение клавиш управления маркер - визиром

| $H$                  | $J$               | $K$                | $L$                   |
|----------------------|-------------------|--------------------|-----------------------|
| Влево на 10 отсчетов | Влево на 1 отсчет | Вправо на 1 отсчет | Вправо на 10 отсчетов |

Повторное нажатие на клавишу <пробел> включает процесс измерений в реальном масштабе времени. После окончания измерений уменьшить до минимума уровень входного сигнала и выйти из программы *Sbfreq4*.

11) Во время измерения доступны следующие команды:

$E$ ,  $Q$ , <Esc> — выход из программы;

$F$  — изменение числа точек БПФ;

$R$  — изменение частоты дискретизации;

$W$  — переключение типа взвешивающего окна (окно Хемминга или синус на пьедестале, окно Хемминга или чистый синус, окно Блекмана или

двойной синус, окно Гаусса, окно Велча или квадратическое, окно Парзена или треугольное, прямоугольное окно);

*P* — включение - выключение режима визуализации максимальной амплитуды в спектре и соответствующей ей частоты;

*X* — переключение логарифмическая - линейная шкала по оси частот;

*Y* — переключение логарифмическая - линейная шкала по оси амплитуд;

*B* — переключение режима вывода на экран: цветной или черно-белый;

*D* — переключение режима сглаживания вывода на экран. Скорость сглаживания может изменяться клавишами  $+ / -$  ;

$< \uparrow >$  и  $< \downarrow >$  — изменение среднего отображаемого уровня по амплитуде при использовании логарифмического режима вывода или изменение максимального отображаемого уровня амплитуды при использовании линейного режима вывода;

*Alt*  $< \uparrow >$  и *Alt*  $< \downarrow >$  — изменение диапазона отображаемого уровня амплитуды при использовании логарифмического режима вывода;

$< \rightarrow >$  — смещение частотной оси влево;

$< \leftarrow >$  — смещение частотной оси вправо;

*Alt* -  $< \leftarrow >$  и *Alt* -  $< \rightarrow >$  — изменение частотного масштаба;

$< \text{Пробел} >$  — остановка вывода на экран.

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Таблица значений интеграла вероятности

| $x$  | $\Phi(x)$         | $x$  | $\Phi(x)$         | $x$  | $\Phi(x)$         | $x$  | $\Phi(x)$        |
|------|-------------------|------|-------------------|------|-------------------|------|------------------|
| 0    | 0.5               | 2    | 0.977249868051821 | 4    | 0.999968328758167 | 6    | 0.99999999013413 |
| 0.05 | 0.519938805838372 | 2.05 | 0.979817784594295 | 4.05 | 0.999974391183526 | 6.05 | 0.99999999275772 |
| 0.1  | 0.539827837277029 | 2.1  | 0.982135579437184 | 4.1  | 0.999979342493087 | 6.1  | 0.99999999469657 |
| 0.15 | 0.559617692370243 | 2.15 | 0.98422239260891  | 4.15 | 0.999983376236271 | 6.15 | 0.99999999612586 |
| 0.2  | 0.579259709439103 | 2.2  | 0.986096552486502 | 4.2  | 0.999986654250984 | 6.2  | 0.99999999717684 |
| 0.25 | 0.598706325682924 | 2.25 | 0.987775527344955 | 4.25 | 0.999989311474225 | 6.25 | 0.99999999794774 |
| 0.3  | 0.617911422188953 | 2.3  | 0.989275889978323 | 4.3  | 0.999991460094529 | 6.3  | 0.99999999851177 |
| 0.35 | 0.636830651175619 | 2.35 | 0.990613294465161 | 4.35 | 0.9999931931234   | 6.35 | 0.99999999892342 |
| 0.4  | 0.655421741610324 | 2.4  | 0.991802464075404 | 4.4  | 0.999994587456093 | 6.4  | 0.99999999922312 |
| 0.45 | 0.67364477971208  | 2.45 | 0.992857189264729 | 4.45 | 0.99999570648553  | 6.45 | 0.99999999944075 |
| 0.5  | 0.691462461274013 | 2.5  | 0.993790334674224 | 4.5  | 0.999996602326875 | 6.5  | 0.9999999995984  |
| 0.55 | 0.708840313211654 | 2.55 | 0.994613854045932 | 4.55 | 0.99999731770422  | 6.55 | 0.99999999971232 |
| 0.6  | 0.725746882249926 | 2.6  | 0.995338811976281 | 4.6  | 0.999997887545297 | 6.6  | 0.99999999979442 |
| 0.65 | 0.742153889194135 | 2.65 | 0.995975411457242 | 4.65 | 0.999998340324856 | 6.65 | 0.99999999985346 |
| 0.7  | 0.758036347776927 | 2.7  | 0.99653302619696  | 4.7  | 0.999998699192545 | 6.7  | 0.99999999989578 |
| 0.75 | 0.773372647623132 | 2.75 | 0.997020236764945 | 4.75 | 0.999998982916757 | 6.75 | 0.99999999992608 |
| 0.8  | 0.788144601416603 | 2.8  | 0.997444869669571 | 4.8  | 0.999999206671849 | 6.8  | 0.9999999999477  |
| 0.85 | 0.802337456877308 | 2.85 | 0.997814038545086 | 4.85 | 0.999999382692628 | 6.85 | 0.99999999996307 |
| 0.9  | 0.815939874653241 | 2.9  | 0.998134186699616 | 4.9  | 0.999999520816724 | 6.9  | 0.99999999997401 |
| 0.95 | 0.828943873691518 | 2.95 | 0.998411130352635 | 4.95 | 0.999999628932591 | 6.95 | 0.99999999998172 |
| 1    | 0.841344746068543 | 3    | 0.99865010196837  | 5    | 0.999999713348429 | 7    | 0.9999999999872  |
| 1.05 | 0.853140943624104 | 3.05 | 0.998855793168977 | 5.05 | 0.999999779094969 | 7.05 | 0.99999999999106 |
| 1.1  | 0.864333939053617 | 3.1  | 0.999032396786781 | 5.1  | 0.999999830173259 | 7.1  | 0.99999999999375 |
| 1.15 | 0.87492806436285  | 3.15 | 0.999183647687172 | 5.15 | 0.999999869756771 | 7.15 | 0.99999999999567 |
| 1.2  | 0.884930329778292 | 3.2  | 0.999312862062085 | 5.2  | 0.999999900355736 | 7.2  | 0.99999999999699 |
| 1.25 | 0.894350226333145 | 3.25 | 0.99942297495761  | 5.25 | 0.999999923950395 | 7.25 | 0.99999999999791 |
| 1.3  | 0.90319951541439  | 3.3  | 0.999516575857616 | 5.3  | 0.99999994209866  | 7.3  | 0.99999999999856 |
| 1.35 | 0.911492008562598 | 3.35 | 0.999595942198135 | 5.35 | 0.999999956022883 | 7.35 | 0.99999999999901 |
| 1.4  | 0.919243340766229 | 3.4  | 0.999663070734323 | 5.4  | 0.999999966679552 | 7.4  | 0.99999999999932 |
| 1.45 | 0.926470740390352 | 3.45 | 0.999719706723184 | 5.45 | 0.999999974815089 | 7.45 | 0.99999999999952 |
| 1.5  | 0.933192798731142 | 3.5  | 0.999767370920964 | 5.5  | 0.999999981010438 | 7.5  | 0.99999999999968 |
| 1.55 | 0.939429241997941 | 3.55 | 0.999807384424365 | 5.55 | 0.999999985716521 | 7.55 | 0.99999999999978 |
| 1.6  | 0.945200708300443 | 3.6  | 0.999840891409842 | 5.6  | 0.999999989282409 | 7.6  | 0.99999999999985 |
| 1.65 | 0.950528531966352 | 3.65 | 0.99986887984558  | 5.65 | 0.999999991977609 | 7.65 | 0.99999999999999 |
| 1.7  | 0.955434537241457 | 3.7  | 0.999892200266523 | 5.7  | 0.999999994009627 | 7.7  | 0.99999999999993 |
| 1.75 | 0.959940843136183 | 3.75 | 0.999911582714798 | 5.75 | 0.999999995537827 | 7.75 | 0.99999999999995 |
| 1.8  | 0.964069680887074 | 3.8  | 0.999927651956075 | 5.8  | 0.999999996684254 | 7.8  | 0.99999999999997 |
| 1.85 | 0.967843225204387 | 3.85 | 0.999940941087582 | 5.85 | 0.999999997542135 | 7.85 | 0.99999999999998 |
| 1.9  | 0.971283440183998 | 3.9  | 0.999951903655982 | 5.9  | 0.999999998182492 | 7.9  | 0.99999999999999 |
| 1.95 | 0.974411940478362 | 3.95 | 0.999960924403402 | 5.95 | 0.999999998659287 | 7.95 | 0.99999999999999 |

Заказ № \_\_\_\_\_ от «\_\_» \_\_\_\_\_ 2006 г. Тираж \_\_\_\_\_ экз.

Изд-во СевНТУ