

УДК 517.1:531.3

Р.А. Спасский

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua**УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА И НЕРАВЕНСТВА СИЛЬВЕСТРА КАК ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИОНАЛА**

Вводится особый вид достаточных условий экстремума функционала, зависящего от нескольких функций и их первых производных. Рассматриваются два предельных случая совместной реализации уравнений Эйлера и неравенств Сильвестра, гарантирующие экстремум заданного функционала.

В вариационном исчислении широко известен геометрический подход при нахождении достаточных условий экстремума функционала [1]. Аналитический подход, связанный с исследованием приращения или второй вариации функционала, является в ряде задач более предпочтительным. В процессе его реализации часто используется конечно-разностный метод.

15 апреля 2007 года отмечается 300-летие со дня рождения Леонарда Эйлера – выдающегося ученого, математика и механика, одного из создателей вариационного исчисления и его конечно-разностных методов.

1. Особый вид аналитических достаточных условий экстремума функционала

$$\Phi = \int_a^b F(x, y_1, y_1', \dots, y_n, y_n') dx. \quad (1)$$

Согласно формуле Тейлора [2] для функции $F(x, y_1, y_1', \dots, y_n, y_n')$

$$\begin{aligned} \Delta F &= F(x, y_1 + \varepsilon z_1, y_1' + \varepsilon z_1', \dots, y_n + \varepsilon z_n, y_n' + \varepsilon z_n') - F(x, y_1, y_1', \dots, y_n, y_n') = \\ &= \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial y_1} z_1 + \frac{\partial}{\partial y_1'} z_1' + \dots + \frac{\partial}{\partial y_n} z_n + \frac{\partial}{\partial y_n'} z_n' \right) F + \frac{\varepsilon^2}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial y_1} z_1 + \frac{\partial}{\partial y_1'} z_1' + \dots + \frac{\partial}{\partial y_n} z_n + \frac{\partial}{\partial y_n'} z_n' \right)^2 F + \\ &+ \frac{\varepsilon^3}{3!} \left(\frac{\partial}{\partial y_1} z_1 + \frac{\partial}{\partial y_1'} z_1' + \dots + \frac{\partial}{\partial y_n} z_n + \frac{\partial}{\partial y_n'} z_n' \right)^3 F(x, y_1 + \theta z_1, y_1' + \theta z_1', \dots, y_n + \theta z_n, y_n' + \theta z_n'), \end{aligned}$$

где $0 < \theta < 1$, ε – сколь угодно малая постоянная величина, а новые переменные $z_1, \dots, z_n$ удовлетворяют граничным условиям

$$z_1(a) = z_1(b) = 0, \dots, z_n(a) = z_n(b) = 0. \quad (2)$$

Поэтому приращение функционала (1) записывается в виде:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= \varepsilon \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial y_1} z_1 + \frac{\partial}{\partial y_1'} z_1' + \dots + \frac{\partial}{\partial y_n} z_n + \frac{\partial}{\partial y_n'} z_n' \right) F(x, y_1, y_1', \dots, y_n, y_n') dx + \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{2!} \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial y_1} z_1 + \frac{\partial}{\partial y_1'} z_1' + \dots + \frac{\partial}{\partial y_n} z_n + \frac{\partial}{\partial y_n'} z_n' \right)^2 F(x, y_1, y_1', \dots, y_n, y_n') dx + \\ &+ \frac{\varepsilon^3}{3!} \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial y_1} z_1 + \frac{\partial}{\partial y_1'} z_1' + \dots + \frac{\partial}{\partial y_n} z_n + \frac{\partial}{\partial y_n'} z_n' \right)^3 F(x, y_1 + \theta z_1, y_1' + \theta z_1', \dots, y_n + \theta z_n, y_n' + \theta z_n') dx. \end{aligned}$$

С учетом граничных условий (2) получается, что

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} z_i + \frac{\partial F}{\partial y_i'} z_i' \right) dx = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_i'} \right) z_i dx, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Тогда в окрестности экстремалей, определяемых уравнениями Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_1'} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial y_n} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_n'} = 0, \quad (3)$$

с точностью до второй степени малой величины ε , получаем:

$$\text{sign } \Delta \Phi = \text{sign} \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial y_1} z_1 + \frac{\partial}{\partial y_1} z_1' + \dots + \frac{\partial}{\partial y_n} z_n + \frac{\partial}{\partial y_n} z_n' \right)^2 F dx. \quad (4)$$

Квадратичная форма под знаком интеграла (4) имеет следующую матрицу из ее коэффициентов:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ & \dots & \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

При этом коэффициенты квадратичной формы находятся по формулам:

$$a_{i1} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_1}, \dots, a_{in} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_n}, \quad a_{i,n+1} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_1}, \dots, a_{ik} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_n} \quad (i = 1, \dots, n; k = 2n);$$

$$a_{j1} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_j \partial y_1}, \dots, a_{jn} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_j \partial y_n}, \quad a_{j,n+1} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_j \partial y_1}, \dots, a_{jk} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_j \partial y_n} \quad (j = n+1, \dots, k; k = 2n).$$

Критерий Сильвестра [2, с. 482] характеризует знакоопределенность квадратичной формы, а ее знак совпадает со знаком приращения функционала.

Таким образом, после введения для главных миноров матрицы (5) обозначений $\Delta_1 \dots \Delta_k$ справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть $y_1(x), \dots, y_n(x)$ – экстремаль функционала (1), а все частные производные по $y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n'$ от функции $F(x, y_1, y_1', \dots, y_n, y_n')$ до второго порядка включительно непрерывны при любых значениях x этой экстремали.

Тогда уравнения Эйлера (3) и неравенства Сильвестра

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_k > 0 \quad (6)$$

достаточны для минимума функционала.

Аналогично: Уравнения Эйлера (3) и неравенства Сильвестра $\Delta_1 < 0, \dots, (-1)^m \Delta_m > 0, \dots, \Delta_k > 0$ будут достаточны для максимума функционала.

Характерная особенность нового подхода в нахождении *достаточных условий* экстремума функционала состоит в рассмотрении *квадратичной формы с переменными коэффициентами*.

В работе [3] было установлено, что при $n=1$ для конкретных функционалов задач Иоганна Бернулли и Леонарда Эйлера уравнения Эйлера (3) и неравенства Сильвестра (6) совместны. В первой при любой экстремали, а во второй – при некотором ее ограничении.

2. О двух предельных случаях совместной реализации уравнений Эйлера и неравенств Сильвестра

Задача 1 [4]. Найти экстремум функционала

$$\Phi = \int_0^1 (y^2 + y'^2) dt. \quad (7)$$

Уравнение Эйлера $y'' - y = 0$ имеет при условиях $y(0)=0, y(1)=1$ частное решение

$$y = \frac{e}{e^2 - 1} (e^t - e^{-t}) \quad \text{или} \quad y = \frac{2e}{e^2 - 1} \text{sh} t. \quad (8)$$

Подстановка в подинтегральную функцию функционала (7) экстремали (8) дает стационарное значение функционала. Пока нельзя сказать, что ему будет соответствовать минимум или максимум функционала.

Для выяснения вопроса обратимся к неравенствам Сильвестра

$$F_{yy} > 0, \quad F_{yy} F_{y'y'} - F_{y'y}^2 > 0,$$

в которых $F_{yy} = 2, \quad F_{y'y'} = 2, \quad F_{y'y} = F_{y'y} = 0, \quad \Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0.$

Матрица Сильвестра (5) становится числовой, и ее элементы не будут зависеть от решения уравнения Эйлера. Уравнение Эйлера и неравенства Сильвестра соответствуют минимум функционала (7).¹

Кроме того, ввиду особого строения неравенств Сильвестра можно утверждать, что уравнение Эйлера дает необходимое и достаточное условие минимума функционала (7).

Задача 2 [5, с. 217]. Рассматривается функционал геометрической оптики

$$J = \int_{x_0}^{x_1} N(y, z) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx, \quad (9)$$

в котором $N(y, z)$ – показатель преломления среды.

Нахождение достаточных условий его минимума связано со значительными вычислительными затруднениями в анализе получаемых результатов.

Поэтому вместо функционала (9) вводится иной функционал

$$\Phi = \int_{x_0}^{x_1} F(y, y', z, z') dx, \quad (10)$$

в котором $F = N(\alpha y, z) \sqrt{1 + (\alpha y')^2 + z'^2}$, α – постоянный малый параметр, а уравнения Эйлера

$$Nu'' = N_u(1 + u'^2 + z'^2), \quad Nz'' = N_z(1 + u'^2 + z'^2), \quad u = \alpha y \quad (11)$$

имеют следующий первый интеграл

$$N = C \sqrt{1 + u'^2 + z'^2}, \quad C = \text{const}. \quad (12)$$

Элементы матрицы Сильвестра (5) четвертого порядка записываются в виде

$$\begin{aligned} a_{11} &= \alpha^2 N_{uu} K, \quad a_{22} = N_{zz} K, \quad a_{33} = \alpha^2 N(1 + z'^2)/K^3, \quad a_{44} = N(1 + u'^2)/K^3 \\ a_{12} &= a_{21} = \alpha N_{uz} K, \quad a_{13} = a_{31} = \alpha^2 N_u u' / K, \quad a_{14} = a_{41} = \alpha N_u z' / K, \\ a_{23} &= a_{32} = \alpha N_z u' / K, \quad a_{24} = a_{42} = N_z z' / K, \quad a_{34} = a_{43} = -\alpha N u' z' / K^3, \end{aligned}$$

где $K(u', z') = \sqrt{1 + u'^2 + z'^2}$.

После простых преобразований получается, что

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \alpha N_{uu} K, \quad \Delta_2 = \alpha^2 D K^2, \quad \Delta_3 = \alpha^2 N(1 + z'^2)/K^2 - \alpha^4 u'^2 (AN_z + BN_u)/K, \\ \Delta_4 &= N(1 + z'^2) \Delta_3 / K^3 - \alpha^4 N z'^2 (AN_z + BN_u)/K^2 - \alpha^4 N u'^2 z'^2 (AN_z + BN_u + DN)/K^4. \end{aligned}$$

$$\text{Здесь } A = N_{uu} N_z - N_{uz} N_u, \quad B = N_{zz} N_u - N_{uz} N_z, \quad D = N_{uu} N_{zz} - N_{uz}^2.$$

Воспользовавшись первым интегралом (12) уравнений Эйлера, можно записать с точностью до второй степени малого параметра α следующие выражения для главных миноров матрицы Сильвестра:

$$\Delta_1 = \frac{NN_{uu}}{C} \alpha^2, \quad \Delta_2 = \frac{N^2 D}{C^2} \alpha^2, \quad \Delta_3 = \frac{C^2(1 + z'^2)}{N} \alpha^2, \quad \Delta_4 = \frac{C^3}{N^2} (1 + u'^2) \Delta_3. \quad (13)$$

Следовательно, при выполнении условий

$$N_{uu} > 0, \quad N_{uu} N_{zz} - N_{uz}^2 > 0 \quad (14)$$

с учетом формул (13) независимо от уравнений Эйлера (11) реализуются неравенства Сильвестра.

А для соблюдения условий (14) в функционале (10) можно, в частности, положить

$$N = u^2 + z^2 \quad \text{или} \quad N = u^4 + z^4 \quad (15)$$

Таким образом, для минимума функционала (10) с функцией $N(u, z)$ вида (15) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись уравнения Эйлера.

¹ Примечание ред. Однако для функционала $\int_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2) dt$, который имеет минимум, критерий Сильвестра не выполняется, так как в рассмотренной автором теореме говорится лишь о достаточных условиях экстремума функционала, среди которых неравенства Сильвестра не являются необходимыми.

В перспективе дальнейших исследований необходимо рассмотреть вопрос о нахождении достаточных условий экстремума функционала, зависящего от функции y и ее производных высокого порядка.

Библиографический список

1. Лаврентьев М.А. Курс вариационного исчисления / М.А. Лаврентьев, Л.А. Люстерник. — М.: Гостехиздат, 1950. — 269 с.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — Т. 1. / Г.М. Фихтенгольц. — М.: ГИТТЛ, 1947. — 690 с.
3. Спасский Р.А. Достаточные условия экстремума функционала двух классических вариационных задач / Р.А. Спасский // Вестн. СевГТУ. Сер. Механика, энергетика, экология: Сб. науч. тр. — Севастополь, 2006. — Вып. 75. — С. 5–11.
4. Спасский Р.А. Классическое вариационное исчисление и вариационные принципы механики / Р.А. Спасский. — Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2004. — 176 с.
5. Смирнов В.И. Курс высшей математики. — Т. IV. / В.И. Смирнов. — М.: ГИТТЛ, 1951. — 804 с.

Поступила в редакцию 15.11.2006 г.