

УДК 539.3

А.И. Бохонский, А.В. Исаев

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua**МОДЕЛИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СТЕРЖНЕЙ**

Рассмотрены аналитические зависимости для аппроксимации реальной диаграммы деформирования, позволяющие находить аналитические решения ряда практических задач упругопластического растяжения, изгиба и кручения тонких гибких стержней прямоугольного поперечного сечения. Показано, что при решении задач упругопластического изгиба круглое поперечное сечение можно заменять приближенным эквивалентным (по геометрическим характеристикам) квадратным.

При изучении наук примеры полезнее правил.

И. Ньютон

Системы аналитических вычислений (САВ или компьютерной алгебры), реализующие символьные методы расчета, позволяют решить ряд трудных задач механики, которые ранее не решались в связи чрезвычайной трудоемкостью аналитических преобразований.

Решение задач упругопластического деформирования стержней находилось, как правило, численными методами, основанными на идеализированных диаграммах деформирования ($\sigma = f_1(\epsilon)$ и $\tau = f_2(\gamma)$) [1, 2]. Использовалась, например, идеальная упругопластическая диаграмма Прандтля в численных алгоритмах расчета [1].

Хотя примеры замены реальных диаграмм деформирования аналитическими функциями известны давно, но возникающие трудности при их использовании не преодолены до настоящего времени. Например, в [3] рассматривалась функция $\sigma = \sigma_T (\epsilon_i / \epsilon_T)^m$, где σ_T – напряжение текучести; ϵ_T – относительное удлинение в момент наступления текучести; $m = 1$ соответствует закону Гука, а $m = 0$ – жесткопластическому случаю деформирования. В [4], например, решена задача изгиба консольного стержня при $m = 1/2$.

В [5] рассматривалась зависимость $\sigma = E_1 \epsilon - E_2 \epsilon^3$, где E_1, E_2 – константы. При использовании компьютерной алгебры можно существенно упростить алгоритм расчета и приблизить модели к реальным физическим процессам.

Целью исследования является получение приближенных аналитических решений упругопластического деформирования стержней (с привлечением САВ) при использовании предлагаемой новой упругопластической диаграммы

$$\sigma^*(\epsilon) = \sigma_T (1 - e^{-a\epsilon}), \quad (1)$$

где $\sigma_T = E \epsilon_T$ – напряжение текучести; E – модуль упругости первого рода; ϵ_T – относительное удлинение при наступлении текучести; a – константа, которая находится из реальной диаграммы деформирования. При $\epsilon \rightarrow \infty$ напряжение $\sigma^*(\infty) \rightarrow \sigma_T$.

На возможность использования функции (1) впервые обращено внимание в [6]. В настоящее время возникает необходимость в уточнении и обобщении результатов с распространением предложенной модели на различные виды упругопластического деформирования стержней, в том числе – при сложном характере нагружения стержней с круглым поперечным сечением.

Для определения параметра a в (1) использован способ наименьших квадратов: найдено такое значение a , при котором квадрат разности площадей диаграммы Прандтля на упругом участке и по предлагаемой зависимости (1) минимален (на участке $0 - \epsilon_T$), т.е.

$$S = \left[\frac{1}{2} \sigma_T \epsilon_T - \int_0^{\epsilon_T} \sigma_T (1 - e^{-a\epsilon}) d\epsilon \right]^2 = \min. \quad (2)$$

Из условия $\frac{\partial S}{\partial a}$ для критерия (2) после преобразований следует нелинейное уравнение

$$1 - \epsilon_T a / 2 - e^{-\epsilon_T a} = 0, \quad (3)$$

корень a которого найден численно.

Пример 1. Исходные данные: $\sigma_T = 210 \cdot 10^6$ Па; $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $\varepsilon_T = \sigma_T / E = 0,00105$. Безразмерный параметр a найден с использованием *solve* [7]: $a = 1517,737391$. Графики идеальной упругопластической зависимости и (1) изображены на рисунке 1.

В начале координат для кривой (1) тангенс угла наклона касательной (при $\varepsilon = 0$) больше модуля упругости E , т.е. завышен касательный модуль. Учет упрочнения возможен с использованием функции

$$\sigma^{**}(\varepsilon) = \sigma^*(\varepsilon) + E_1 \varepsilon^3, \quad (4)$$

где константа E_1 учитывает упрочнение. Петля гистерезиса изображена на рисунке 2; разгрузка осуществляется упруго.

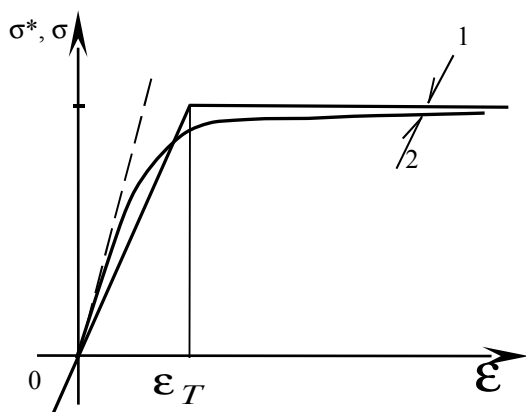


Рисунок 1 – Диаграмма деформирования $\sigma = f(\varepsilon)$: 1 – идеальная упругопластическая; 2 – предлагаемая

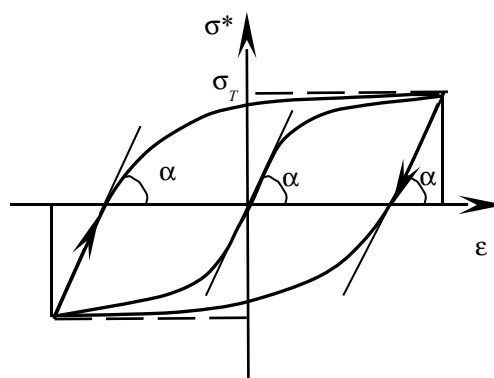


Рисунок 2 – Петля гистерезиса для аналитической диаграммы деформирования

На основании (1) и (4) получены интегральные аналитические зависимости для внутренних усилий.

1. Решена задача об упругопластическом изгибе стержня прямоугольного поперечного сечения ($b \cdot h$). Величина смещения нейтральной оси вычисляется из условия равенства нулю продольной силы

$$\int_{-h_1}^{h-h_1} b \sigma_T (1 - e^{-akz}) dz = 0 \quad (5)$$

или после вычисления интеграла (5) получаем

$$h_1 = \ln(hak / e^{hak} - 1) / ak + h,$$

где $kz = z/\rho = \varepsilon$; k – кривизна изогнутой оси стержня; ρ – радиус кривизны; h_1 – расстояние от нейтральной оси до нижнего волокна стержня; h – высота поперечного сечения бруса; b – ширина.



Рисунок 3 – График функции

Пример 2. Исходные данные: $h = 0,02$ м; $a = 1517,737391$. График $h_1 = h_1(\rho)$ изображен на рисунке 3. С увеличением радиуса кривизны ρ возрастает h_1 и при $\rho \rightarrow \infty$, $h \rightarrow h/2$. При малых перемещениях $h_1 \approx h/2$, т.е. нейтральная ось практически не смещается.

Пример 3. Исходные данные: $b = 0,01$ м; $h = 0,02$ м; $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $M = 3000$ Н·м – изгибающий момент; $I = bh^3/12$ – осевой

момент инерции поперечного сечения. Радиус кривизны $\rho_1 = EI/M = 4444,4444$ м. Если перемещения при изгибе малы, то можно принять $h_1 = h/2$, т.е. нейтральная ось практически не смещается, а проходит через центр тяжести сечения.

Для внутреннего изгибающего момента следует выражение

$$M_y^* = \int_F \sigma z dF = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^* z b F, \quad (6)$$

где при использовании (1) принято $\varepsilon = z/\rho = kz$. После вычисления интеграла (6) выражение для изгибающего момента принимает вид

$$M_y^* = \frac{bh^2}{4} \sigma_T + \frac{\sigma_T b}{a^2 k^2} \left[(akh + 2) e^{-\frac{1}{2}akh} - 2 \right], \quad (7)$$

где $\frac{bh^2}{4} \sigma_T$ представляет собой внутренний изгибающий момент при достижении сечением пластической стадии (согласно идеализированной упругопластической диаграмме).

Пример 4. Исходные данные: $b = 0,01$ м; $h = 0,02$ м; $\varepsilon_T = 0,0015$; $\sigma_T = 210 \cdot 10^6$ Па. График $M_y^* = M_y^*(k)$ изображен на рисунке 4. Интересно, что этот график похож на график $M_{y,HM}$ рисунка 1 функции $\sigma^* = \sigma^*(\varepsilon)$.

2. При известной аналитической зависимости изгибающего момента от кривизны появляется возможность решения ряда задач о напряженно-деформированном состоянии стержней для различных случаев закрепления концов. Для консольного стержня уравнение изогнутой оси (с использованием аналогии в графиках функций $M_y^* = M_y^*(k)$ и $\sigma^* = \sigma^*(\varepsilon)$):

$$M_T(1 - e^{-sk}) = P(L - x), \quad (8)$$

где в левой части взята новая аналитическая функция вместо близкой к ней зависимости (7); M_T – пластический момент. Правая часть уравнения (8) – внешний изгибающий момент в сечении стержня с координатой x , где L – длина стержня; P – сосредоточенная сила; s – константа, которая находится при реализации рассмотренной ранее численной процедуры. С учетом $k = 1/\rho = d^2W/dx^2$ (малые перемещения) из (8) находится кривизна и, следовательно, записывается уравнение:

$$\frac{d^2W}{dx^2} = -\frac{1}{s} \ln \left(\frac{M_T + Px - PL}{M_T} \right). \quad (9)$$

Уравнение (9) имеет точное решение, которое, после определения произвольных постоянных (при $W(0) = 0$, $W'(0) = 0$), принимает вид:

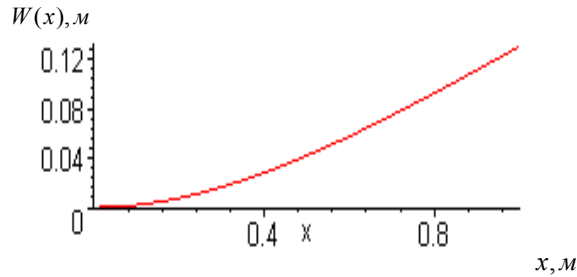
$$W(x) = \frac{\left[(M_T - PL) \ln \left(\frac{M_T - PL}{M_T} \right) - M_T + PL \right] x}{sP} + \frac{0,25M_T(6x - L) - M_T(x + L) \ln \left(\frac{Px + M_T - PL}{M_T} \right)}{sP} - \frac{(x^2 - 2L - L^2) \ln \left(\frac{Px + M_T - PL}{M_T} \right) + 1,5x^2 - 3Lx + 0,5L^2}{2s} + \frac{(P^2L^2 - 2M_TPL + M_T^2) \ln \left(\frac{M_T - PL}{M_T} \right) PL - 0,5L^2P^2 + M_TPL + M_T^2}{2sP^2}.$$

Пример 5. Исходные данные: предельный момент $M_T = 210$ Нм; $L = 1$ м; $P = 100$ Н; $s = 1,517$. График функции $W = W(x)$ изображен на рисунке 5. В линейной системе прогиб равен:

$$W(x) = \left[(L - x)^3 - 3L^2(L - x) + 2L^2 \right] / 6EI.$$

Рисунок 4 – График функции

k, M^{-1}

Рисунок 5 – График функции $W = W(x)$

При малой силе P графики перемещений линейной и нелинейной системы близки, но с возрастанием нагрузки перемещение нелинейной системы увеличивается; с приближением внутреннего изгибающего момента к предельному перемещение стремится к бесконечности.

3. В случае учета упрочнения при вычислении интеграла (6) получена следующая зависимость изгибающего момента от кривизны

$$M_y^{**} = M_y^* + \frac{E_1^3 \sigma_T h^4}{32} k^3, \quad (10)$$

где второе слагаемое в (10) отражает нелинейное упрочнение. График $M_y^{**}(k)$ по своему виду соответствует $\sigma^{**}(\epsilon)$ и поэтому (по аналогии) он представим так:

$$M_y^{**} = M_T (1 - e^{-sk}) + q_1 k^3, \quad (11)$$

где $q_1 = (s_1 E_1)^3$, s_1 – параметр, который учитывает упрочнение в интегральной зависимости момента от кривизны. В этом случае получение функции прогибов по предыдущему алгоритму аналитических преобразований не представляется возможным.

4. При поиске решения задачи изгиба стержня с упрочнением эффективен вариационный метод Ритца [8]. Полная энергия для стержня, изображенного на рисунке 2:

$$\mathcal{E} = \int_0^L M_y^{**} d\varphi - PW(L) = \min, \quad (12)$$

где $d\varphi = dx/\rho = k dx$. Выражение для прогиба (при малых перемещениях) принято в виде полинома

$$W(x) = b_1 x^2 + b_2 x^3, \quad (13)$$

где b_1 и b_2 – константы. Кривизна

$$W''(x) = 1/\rho = k = 2b_1 + 6b_2 x. \quad (14)$$

$$\text{При } x = L \text{ из (17) следует } W''(L) = 2b_1 + 6b_2 L \quad (15)$$

После подстановки (13) и (15) в (12), вычисления интеграла и решения нелинейных алгебраических уравнений, которые следуют из необходимых условий экстремума функции двух переменных

$$\partial \mathcal{E} / \partial b_1 = 0, \quad \partial \mathcal{E} / \partial b_2 = 0,$$

находятся b_1 и b_2 . Нелинейные уравнения (19) решены численно.

Пример 6. Исходные данные: $M_T = 210$ Нм; $L = 1$ м; $P = 200$ Н; $s = a$; $s_1 = 0,1$. С использованием *fsolve* найдено: $b_1 = 0,1101$ м⁻¹ и $b_2 = -0,0038$ м⁻².

$W(L), \text{ м}$

Рисунок 6 – График функции

Возможно построение зависимости $P = P(W(L))$ (рисунок 6). Однако P задано неявно и поэтому следует при многократном нагружении (в результате задания различных значений P) построить график обратной функции $W(L) = f_1(P)$, а затем аппроксимировать его новой аналитической функцией.

5. При круглом поперечном сечении стержня зависимости (1) и (4) не позволяют вычислить интеграл (7) аналитически, но для практических целей не исключается замена исходного круглого сечения близким к нему (по геометрическим характеристикам) квадратным сечением.

Сторона вписанного в круг квадрата выражается через радиус $a_1 = 2R/\sqrt{2}$, а сторона описанного равна $a_2 = 2R$. Площадь среднего квадрата $F = 3R^2$, которая на 4,5% меньше площади рассматриваемого круга. Сторона среднего квадрата $a = \sqrt{3}R$. Осевой момент инерции среднего квадрата со стороной a меньше момента инерции круга также на 4,5%. Итак, найденный квадрат по основным геометрическим характеристикам близок к кругу; поэтому его напряженно-деформированное состояние не будет существенно отличаться от состояния, возникающего при изгибе круглого стержня. Следует, однако, отметить, что максимальные касательные напряжения при изгибе стержня с эквивалентным квадратным сечением более существенно превышают максимальные касательные напряжения соответствующего круглого сечения.

6. В случае кручения стержня круглого поперечного сечения крутящий момент вычисляется таким образом:

$$M_k = \int_0^R 2\pi \rho^2 \tau_T (1 - e^{-b\theta \rho}) d\rho.$$

Здесь константа b вычисляется согласно уравнению (3); θ – относительный (погонный) угол закручивания.

Пример 7. Исходные данные: $\tau_T = 100\,000\,000$ Па; $\gamma_T = 0,00125$. Для этих исходных данных из нелинейного уравнения (3) с использованием процедуры solve следует результат: $b = 1274,9$. По аналогии можно построить зависимость крутящего момента от угла поворота стержня, т.е.

$$M_k = G J_P \phi_i (1 - e^{-c\phi}) / L,$$

где G – модуль сдвига; J_P – полярный момент инерции; ϕ_i – угол поворота, при котором наступает текучесть; c – константа; L – длина стержня.

Предложенный подход естественно распространяется и на наиболее простой случай – растяжение стержня в упругопластической стадии деформирования.

Для рассмотренных новых диаграмм деформирования найдены аналитические решения задач упругопластического изгиба стержней, которые могут найти широкое применение в различных областях техники. Полученные аналитические обобщенные интегральные характеристики упрощают алгоритмы решения многих технологических задач упругопластического деформирования гибких тонких стержней.

В перспективе предполагается использование рассмотренного в данной статье подхода для моделирования технологических процессов упругопластического деформирования проволок и прядей в канатном производстве.

Библиографический список

1. Дикович И.Л. Динамика упругопластических балок/ И.Л. Дикович. — Л: Судпромгиз, 1962. — 292 с.
2. Коломиец В.П. Метод определения напряжений и деформаций в сечении балки при сложном нагружении с учетом действительной диаграммы / В.П. Коломиец // Изв. вузов. Сер. Авиационная техника. — 1966. — № 1. — С. 16–21.
3. Безухов Н.И. Теория упругости и пластичности / Н.И. Безухов. — М.: Гостехиздат, 1953. — 420 с.
4. Варвак П.М. Новые методы решения задач сопротивления материалов / П.М. Варвак. — К.: Выща шк., 1977. — 160 с.
5. Попов Б.С. Динамический расчет железобетонных конструкций / Б.С. Попов, Н.Н. Расторгуев. — М.: Судпромгиз, 1974. — 207 с.
6. Бохонский А.И. Аналитические решения задач упругопластического изгиба элементов крепления объектов военной техники / А.И. Бохонский, А.В. Исаев, Т.В. Мозолевская // Зб. наук. пр. СВМІ. — Севастополь, 2003. — Вип. 2. — С. 15–20.
7. Дьяконов В.П. Математическая система Maple V R3/R4/R5 / В.П. Дьяконов. — М.: Изд-во “Салон”, 1998. — 400 с.
8. Пратусевич Я.В. Вариационные методы в строительной механике/ Я.В. Пратусевич. — М.: Гостехиздат, 1948. — 320 с.

Поступила в редакцию 4.12.2006 г.