

Министерство образования и науки Украины

Севастопольский национальный технический университет



ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПАСНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ СТЕРЖНЯ

Методические указания
для практических занятий и индивидуальной работы
по дисциплине
«Сопротивление материалов»
студентов технических специальностей
всех форм обучения
Модуль 1: «Прочность стержня»

Севастополь

2008



УДК 539.3

Определение опасного поперечного сечения стержня: методические указания/ Сост. В.Г. Хромов, профессор; И.В. Хромов, – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2008. – 20 с.

Целью методических указаний является оказание помощи студентам при решении инженерных задач первого модуля сопротивления материалов – «Прочность стержня».

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры технической механики и машиноведения, протокол № 1 от «28 » августа 2008 г.

Допущено учебно-методическим центром в качестве методических указаний.

Рецензент: В.В. Леонтьев, доцент.

Компьютерный набор: А.Ю. Даскалица.

Заказ № _____ от « _____ » 200 ____ г. Тираж _____ экз.

Изд-во СевНТУ

Содержание

Введение.....	4
1.Краткие теоретические сведения.....	5
1.1.Внутренние силовые факторы	5
1.2.Расчет внутренних силовых факторов	7
1.3.Опасное поперечное сечение стержня.....	13
2.Методика решения прикладных задач.....	14
2.1.Общие рекомендации.....	14
2.2.Примеры решения и оформления контрольных задач.....	15
3.Контрольные вопросы.....	18
Библиографический список.....	18

Введение

Прямолинейный стержень представляет собой наиболее простой, но весьма распространенный в технике вид несущего элемента. Поэтому многие задачи курса сопротивления материалов рассматриваются, прежде всего, на примере прямолинейного стержня [1,2].

В настоящих методических указаниях излагается методика построения математической модели, позволяющей выполнять анализ распределения внутренних силовых факторов по длине стержня, и определять наиболее вероятную зону его разрушения. Приведены примеры решения отмеченной задачи для частных случаев нагружения прямолинейного стержня.

1.Краткие теоретические сведения

1.1.Внутренние силовые факторы

Под действием приложенных к стержню внешних сил внутри него возникают силы взаимодействия между отдельными частями материала. Эти силы называются внутренними.

Выберем на продольной оси стержня произвольную точку C . Мысленно проведем через нее плоскость, перпендикулярную к продольной оси стержня (рис.1). Плоскость разделит стержень на две части I и II .

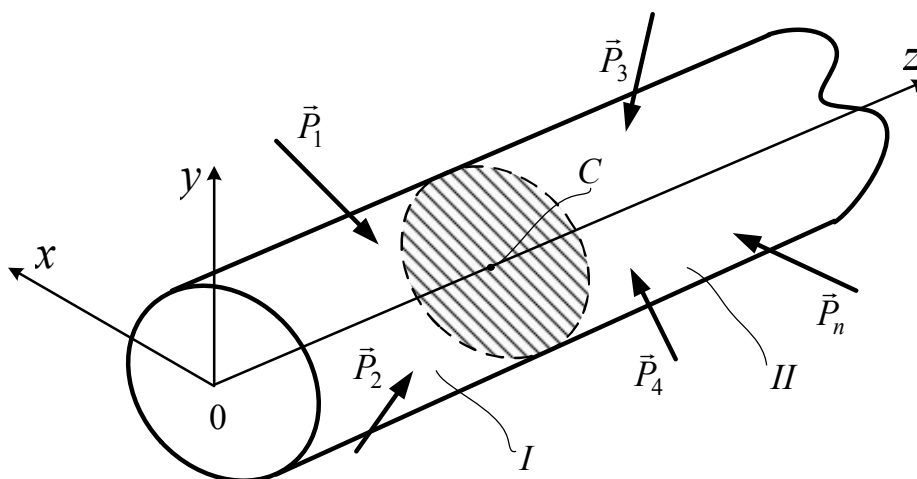


Рисунок 1 – Исходная схема нагружения стержня внешними силами

В месте разреза внутренние силы распределены непрерывно по всему поперечному сечению стержня. Однако их всегда можно заменить эквивалентно двумя векторами (рис.2), приложенными в некоторой точке C : главный вектор $\vec{R}_c$ и главный момент $\vec{M}_c$ внутренних сил (точка приведения C обычно помещается в центре тяжести сечения).

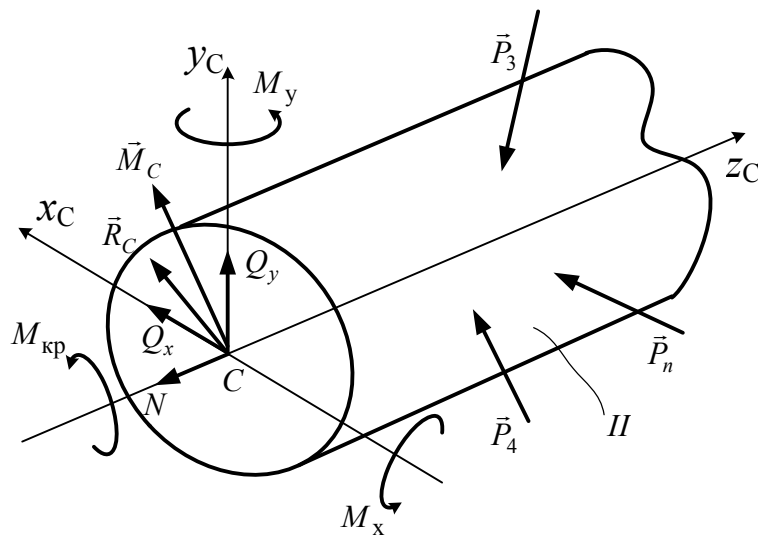


Рисунок 2 – Внутренние и внешние силы, действующие на одну из частей стержня

Внутренними силовыми факторами называются проекции главного вектора $\vec{R}_c$ и главного момента $\vec{M}_c$ внутренних сил на оси координат $X_c Y_c Z_c$ (рис.2). Указанные проекции в курсе сопротивления материалов имеют следующие специальные обозначения и названия:

- $R_x = Q_x$ - поперечная (перерезывающая) сила в направлении оси X_c ;
- $R_y = Q_y$ - поперечная (перерезывающая) сила в направлении оси Y_c ;
- $R_z = N$ - продольная сила;
- M_x - изгибающий момент в плоскости $Y_c Z_c$;
- M_y - изгибающий момент в плоскости $X_c Z_c$;
- $M_z = M_{кр}$ - крутящий момент.

На уровне инженерной интуиции вполне очевидно, что между внутренними силовыми факторами и внешними силами существуют некоторые зависимости. Поэтому одна из первых задач сопротивления материалов состоит в отыскании математических формул для описания указанных зависимостей.

1.2. Расчет внутренних силовых факторов

Известно, что величину внутренних силовых факторов в произвольном поперечном сечении стержня можно определить на основании следующих общих формул:

$$Q_x = \sum_{I(II)} P_{ix}, \quad Q_y = \sum_{I(II)} P_{iy}, \quad N = \sum_{I(II)} P_{iz}, \quad (1)$$

$$M_x = \sum_{I(II)} M_{ix}, \quad M_y = \sum_{I(II)} M_{iy}, \quad M_{кр} = \sum_{I(II)} M_{iz},$$

где P_{ix}, P_{iy}, P_{iz} - проекции вектора внешней силы с номером i на оси $X_c Y_c Z_c$;

M_{ix}, M_{iy}, M_{iz} - моменты внешней силы с номером i относительно осей $X_c Y_c Z_c$.

Эти формулы вытекают из уравнений равновесия, записанных для одной из частей стержня. Знак $\sum_{I(II)}$ означает, что суммирование выполняется для внешних сил, приложенных только к одной из двух частей стержня (с номером I или II). При этом результат расчета не зависит от того, для какой части выполнено суммирование. Далее все формулы (1) будем записывать только для левой части стержня.

Ниже будут рассматриваться частные задачи, когда можно полагать, что в произвольном сечении прямолинейного стержня отличным от нуля является лишь один из шести внутренних силовых факторов. Такой вариант нагружения называется простым.

Кроме системы координат $X_c Y_c Z_c$ используем неподвижную систему XYZ (рис.1), связанную с левым крайним сечением стержня. В этой системе указываются координаты центра тяжести S произвольного поперечного сечения и точек приложения внешних сил.

Отметим еще одну особенность применяемых ниже условных обозначений. При записи математических формул, описывающих скачкообразное изменение внутренних силовых факторов в зонах приложения внешних сил, необходимо использовать специальные функции, для которых в литературе нет единой формы записи. В настоящих методических указаниях используется ориентированная на применение пакета Mathcad следующая форма: $y(x) = if(x \leq a, 0, y_1(x))$ [3]. Эта запись означает, что при $x \leq a$ $y(x) = 0$, а при $x > a$ $y(x) = y_1(x)$, где $y_1(x)$ – заданная функция (например, постоянная величина).

При решении задач нужно помнить, что в формулах (1) реакции опор учитываются как внешние силы и специально не выделяются. Поэтому в нижеследующих примерах, как и на рис.1, опоры не показаны, в предположении, что реакции опор предварительно рассчитаны и учтены в составе внешних сил.

Пример 1. Чистое растяжение стержня.

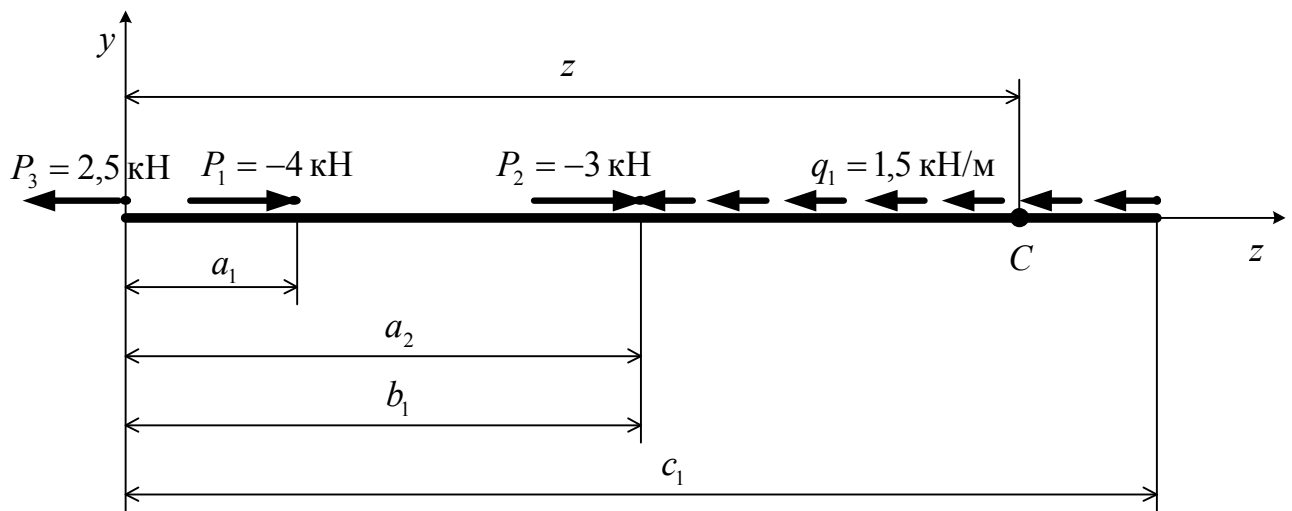


Рисунок 3 – Расчетная схема

К стержню приложены два вида внешних продольных сил (линии действия сил совпадают с продольной осью стержня рис.3):

- сосредоточенные силы P_i , приложенные в точках с координатами a_i ($i = 1..l$);
- равномерно распределенные силы с интенсивностями q_j , действующие на отрезках с координатами b_j и c_j ($j = 1..m$).

Анализируя расчетную схему на рис.3 с учетом общих формул (1), можно записать следующую функцию для внутренней продольной силы:

$$N(z) = \sum_{i=1}^l \text{if}(z \leq a_i, 0, P_i) + \sum_{j=1}^m [\text{if}(z \leq b_j, 0, q_j(z - b_j)) - \text{if}(z \leq c_j, 0, q_j(z - c_j))], \quad (2)$$

где: l, m - количество сосредоточенных P_i и распределенных q_j сил, соответственно; z - координата центра тяжести заданного поперечного сечения.

Обычно используют следующее правило знаков: силы на рис.3 и в (2) считаются положительными, если они направлены влево (растягивают стержень).

Пример2. Плоский изгиб стержня.

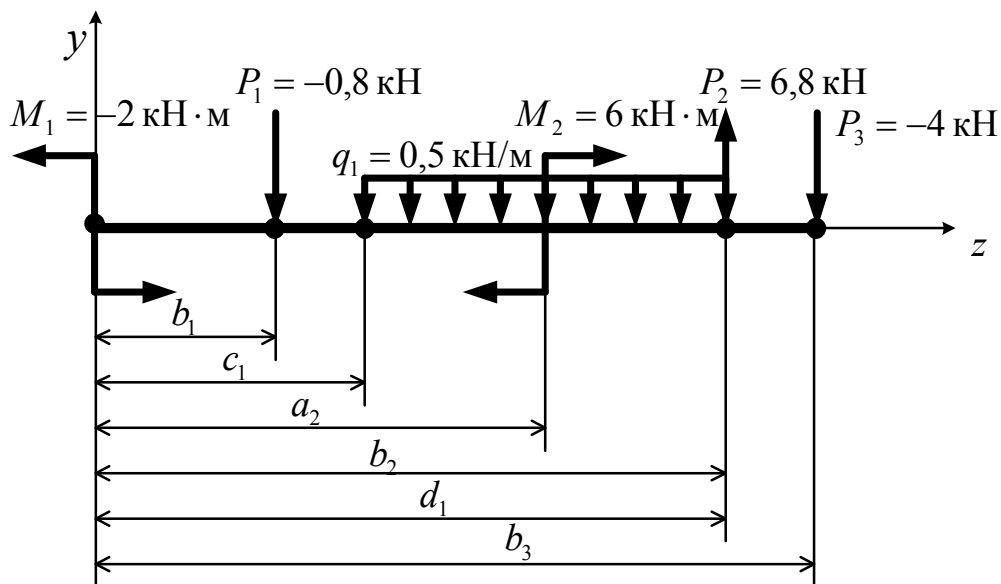


Рисунок 4 – Расчетная схема

К стержню (рис.4) приложены три вида внешних сил, лежащих в плоскости YZ (силы изгибают стержень):

- сосредоточенные пары сил с моментами M_i , приложенные в точках с координатами a_i ($i = 1..l$);
- сосредоточенные силы P_j , параллельные оси Y и приложенные в точках с координатами b_j ($j = 1..m$);

- равномерно распределенные силы, параллельные оси Y , с интенсивностями q_k и действующие на отрезках с координатами b_k и c_k ($k = 1..n$).

Анализируя расчетную схему по рис.4 с учетом общих формул (1), можно записать следующую функцию для внутреннего изгибающего момента:

$$M_x(z) = \sum_{i=1}^l \text{if}(z \leq a_i, 0, M_i) + \sum_{j=1}^m \text{if}(z \leq b_j, 0, P_j(z - b_j)) + \sum_{k=1}^n [\text{if}(z \leq c_k, 0, \frac{q_k(z - c_k)^2}{2}) - \text{if}(z \leq d_k, 0, \frac{q_k(z - d_k)^2}{2})], \quad (3)$$

где: l, m, n - количество моментов M_i , сосредоточенных P_j и распределенных q_k сил, соответственно.

В данной задаче используют следующее правило знаков: моменты и силы на рис.4 и в (3) считаются положительными, если они поворачивают стержень по часовой стрелке относительно мысленно закрепленного правого концевое сечения.

Пример3. Чистое кручение стержня.

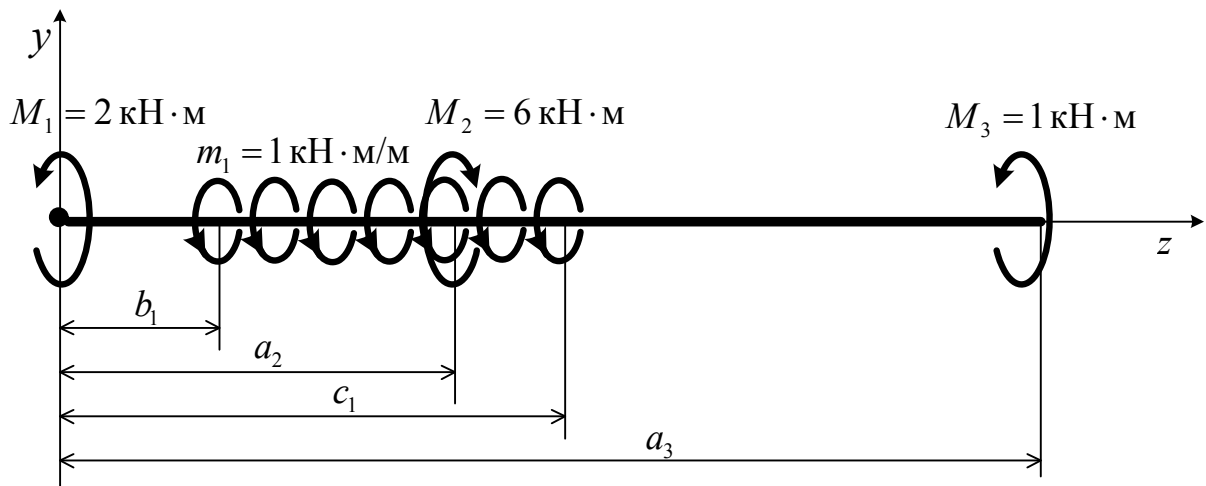


Рисунок 5 Расчетная схема

К стержню (рис.5) приложены два вида внешних пар сил, создающих моменты относительно продольной оси Z (крутящие моменты):

- сосредоточенные пары сил с моментами M_i , приложенные в точках с координатами a_i ($i = 1..l$);
- равномерно распределенные пары сил с интенсивностями m_j , действующие на отрезках с координатами b_j и c_j ($j = 1..n$).

В данном случае, из анализа расчетной схемы на рис.5 с учетом общих формул (1), можно записать следующую функцию для крутящего момента:

$$M_{кр}(z) = \sum_{i=1}^l if(z \leq a_i, 0, M_i) + \sum_{j=1}^n [if(z \leq b_j, 0, m_j(z - b_j)) - if(z \leq c_j, 0, m_j(z - c_j))], \quad (4)$$

где l, n - количество сосредоточенных M_i и распределенных m_j внешних моментов, соответственно.

Правило знаков: моменты на рис.5 и в (4) считаются положительными, если при наблюдении с левого конца стержня мы видим, что его поворот под действием момента происходит против часовой стрелки.

1.3. Опасное поперечное сечение

Из рисунка 1 видно, что при мысленном перемещении поперечного сечения вдоль оси стержня изменяется количество сил, приложенных к каждой из полученных двух частей стержня. Согласно (1) это означает, что внутренние силовые факторы в общем случае являются переменными величинами и зависят от координаты z поперечного сечения. Для расчетов на прочность особый интерес представляют те поперечные сечения, в которых наиболее вероятно разрушение стержня. Эти сечения называются опасными. Формулы (1) – (4) позволяют построить математическую модель для анализа распределения внутренних силовых факторов вдоль исследуемого стержня и решить задачу по определению опасного сечения.

При простом нагружении стержня очевидно, что опасным является такое сечение, в котором абсолютная величина внутреннего силового фактора принимает максимальное значение. Тогда задача сводится к отысканию максимального значения модуля функции для соответствующего внутреннего силового фактора (2) – (4). С этой целью используют один из двух методов:

1) стержень разбивают по длине на достаточно большое количество ($n = 500..2000$) одинаковых отрезков Δs . Вычисляют абсолютные значения исследуемой функции (2), (3) или (4) в поперечных сечениях с координатами $z_i = i \cdot \Delta s$, где ($i = 0..n$). Из полученных значений методом перебора выбирают максимальные значения $|N|_{\max}$, $|M_x|_{\max}$ или $|M_{кр}|_{\max}$. При наличии стандартного математического программного пакета и компьютера данный метод наиболее эффективен;

2) строят график исследуемой функции (2), (3) или (4). В сопротивлении материалов эти графики называют эпюрами. По эпюрам визуально определяют максимальные значения $|N|_{\max}$, $|M_x|_{\max}$ или $|M_{кр}|_{\max}$. Данный метод называют графическим. Он удобен при отсутствии компьютера.

2.Методика решения прикладных задач

2.1.Общие рекомендации

Для определения опасного сечения в заданном стержне необходимо выполнить следующее:

- на исходной расчетной схеме указать реакции опор;
- рассчитать реакции опор, используя методику из теоретической механики (модуль 1 - «Статика») [4];
- подготовить расчетную схему в стандартном виде (рисунки 3, 4, 5);
- используя (1)-(4) записать формулу, необходимую для математического моделирования распределения внутренних сил в заданном стержне;
- определить опасное сечение по методике из п. 1.3.

2.2. Примеры решения и оформления контрольных задач

Пример1. Чистое растяжение

К горизонтальному стержню приложены три сосредоточенных силы и одна распределенная нагрузка

1. Исходные данные:

Длина стержня: $s := 6 \text{ м}$

Внешние силы и координаты точек приложения:

$l := 3$ $P_1 := -4 \text{ КН}$ $P_2 := -3 \text{ КН}$ $P_3 := 2.5 \text{ КН}$

$a_1 := 1 \text{ м}$ $a_2 := 3 \text{ м}$ $a_3 := 0 \text{ м}$

$m := 1$ $q_1 := 1.5 \text{ КН/м}$ $b_1 := 3 \text{ м}$ $c_1 := 6 \text{ м}$

2. Функция для продольной силы:

$$N(z) := \sum_{i=1}^1 \left(\text{if}(z < a_i, 0, P_i) \right) + \sum_{j=1}^m \left[\text{if}(z < b_j, 0, q_j \cdot (z - b_j)) - \text{if}(z < c_j, 0, q_j \cdot (z - c_j)) \right]$$

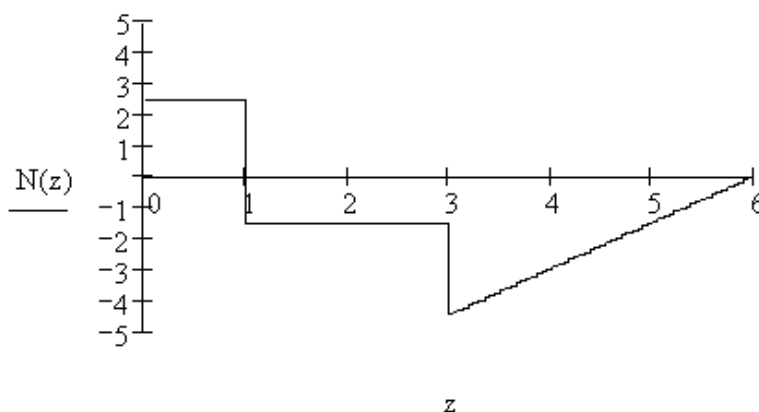
3. Определение максимального значения продольной силы:

$$i := 0..1000 \quad ds := \frac{s}{1000} \quad Nr_1 := |N(ds \cdot i)|$$

$$N_{\max} := \max(Nr) \quad N_{\max} = 4.5$$

4. Эпюра продольной силы N

$$|N(3.001)| = 4.498$$



Пример 2. Плоский изгиб

К горизонтальному стержню приложены две пары сил, три сосредоточенных и одна распределенная силы

1. Исходные данные:

Длина стержня: $s := 8 \text{ м}$

Внешние моменты, силы и координаты точек приложения:

$$\begin{array}{llll}
 l := 2 & M_1 := -2 \text{ Кн м} & M_2 := 6 \text{ Кн м} & \\
 & a_1 := 0 \text{ м} & a_2 := 5 \text{ м} & \\
 m := 3 & P_1 := -0.8 \text{ Кн} & P_2 := 6.8 \text{ Кн} & P_3 := -4 \text{ Кн} \\
 & b_1 := 2 \text{ м} & b_2 := 7 \text{ м} & b_3 := 8 \text{ м} \\
 n := 1 & q_1 := -0.5 \text{ Кн} & c_1 := 3 \text{ м} & d_1 := 7 \text{ м}
 \end{array}$$

2. Функция для изгибающего момента:

$$\begin{aligned}
 Mx(z) &:= \sum_{i=1}^l \left(\text{if}(z < a_i, 0, M_i) \right) + \sum_{j=1}^m \left[\text{if}(z < b_j, 0, P_j \cdot (z - b_j)) \right] \\
 Mx(z) &:= Mx(z) + \sum_{k=1}^n \left[\text{if} \left[z < c_k, 0, q_k \cdot \frac{(z - c_k)^2}{2} \right] - \text{if} \left[z < d_k, 0, q_k \cdot \frac{(z - d_k)^2}{2} \right] \right]
 \end{aligned}$$

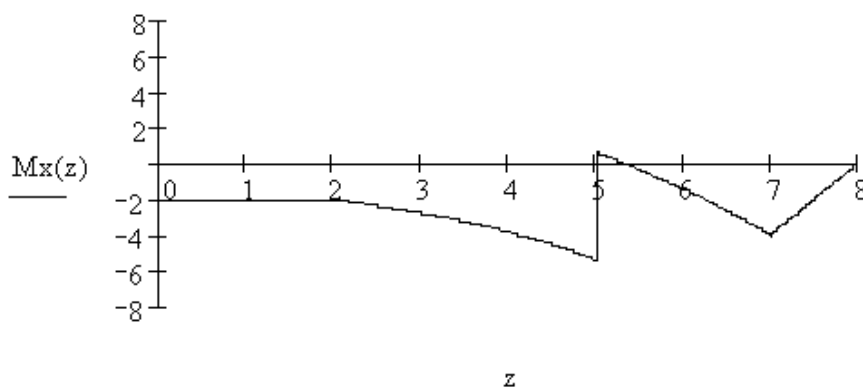
3. Определение максимального значения изгибающего момента

$$i := 0..2000 \quad ds := \frac{s}{2000} \quad Mxr_i := |Mx(ds \cdot i)|$$

$$Mmax := \max(Mxr) \quad Mmax = 5.393$$

4. Эпюра изгибающего момента Mx

$$|Mx(4.999)| = 5.398$$



Пример 3. Чистое кручение

К горизонтальному стержню приложены три сосредоточенных момента и один распределенный

1. Исходные данные:

Длина стержня: $s := 8 \text{ м}$

Внешние моменты, силы и координаты точек приложения:

$l := 3 \quad M_1 := -2 \text{ Кн м} \quad M_2 := 6 \text{ Кн м} \quad M_3 := -1 \text{ Кн м}$

$a_1 := 0 \text{ м} \quad a_2 := 3 \text{ м} \quad a_3 := 8 \text{ м}$

$n := 1 \quad m_1 := -1 \text{ Кн м/м} \quad b_1 := 1 \text{ м} \quad c_1 := 4 \text{ м}$

2. Функция для крутящего момента:

$$Mk(z) := \sum_{i=1}^1 \left(\text{if}(z < a_i, 0, M_i) \right) + \sum_{j=1}^n \left[\text{if}(z < b_j, 0, m_j \cdot (z - b_j)) - \text{if}(z < c_j, 0, m_j \cdot (z - c_j)) \right]$$

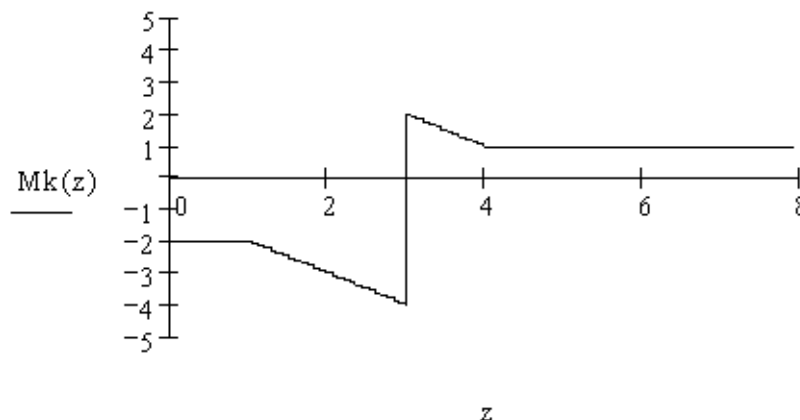
3. Определение максимального значения крутящего момента:

$$i := 0..1000 \quad ds := \frac{s}{1000} \quad Mkr_i := |Mk(ds \cdot i)|$$

$$Mmax := \max(Mkr) \quad Mmax = 3.992$$

4. Эпюра крутящего момента

$$|Mk(2.999)| = 3.999$$



3. Контрольные вопросы

1. Что такое внутренние силы?
2. Что такое внутренние силовые факторы?
3. Запишите общие формулы для расчета внутренних силовых факторов. Какие уравнения из теоретической механики использованы для вывода указанных формул?
4. При каком условии заданный способ нагружения стержня называется простым?
5. Какое поперечное сечение стержня называется опасным в общем случае и при простом нагружении?
6. Назовите и поясните методы, используемые для определения опасного сечения при простом нагружении стержня.

Библиографический список

1. Писаренко Г.С. Соппротивление материалов / Г.С. Писаренко, В.А. Агарев, А.Л. Квитко. – К.: Высш. школа, 1979. – 694 с.
2. Корнілов О. Опір матеріалів/О. Корнілов. – К.: Логос, 2000. –551 с.
3. Mathcad 6.0 Plus. Финансовые, инженерные и научные расчеты в среде Windows 95: Руководство пользователя – М.: Информационно-издательский дом «Филинь», 1997 – 712 с.
4. Методические указания для практических занятий и самостоятельной работы студентов технических специальностей по дисциплине «Теоретическая механика». Модуль 1: «Статика». Расчет реакций связей (опор) для механической системы, находящейся в состоянии покоя / Сост. В.Г. Хромов, И.В. Хромов. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2005. – 14 с.