

УДК 621.962.88

В.Б. Малеев, В.В. Журба, А.А. Кудрявцев, А.В. Малеев*Донецкий национальный технический университет**ул. Артема 58, г. Донецк, Украина, 83000**E-mail: myb@fema.dgtu.donetsk.ua***ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДЫХ ЧАСТИЦ В ПОЛЕ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ**

Составлены дифференциальные уравнения относительного движения твердых частиц бытовых отходов и углей при классификации их на конической поверхности в поле центробежных сил. Выполнено численное интегрирование дифференциальных уравнений в диапазоне ожидаемых значений параметров, определяющих реальный процесс сепарации. Подобраны аналитические выражения, аппроксимирующие зависимости, полученные численно.

Проблема и её связь с научными или практическими задачами. Процесс классификации в центробежном поле влажных твёрдых бытовых отходов и углей в значительной мере определяется относительным движением частиц по конической просеивающей поверхности. При этом необходимо получить условия, обеспечивающие восходящее движение частицы и использовать рациональный метод решения уравнений движения твёрдых частиц по внутренней поверхности вращающегося ротора.

Анализ исследований и публикаций. Известный специалист в области обогащения полезных ископаемых Ф.Н. Булгаков [1-3] рассматривал процессы классификации влажных углей без учёта времени пребывания надрешётной частицы на просеивающей поверхности, но не исследовал движение этой частицы в зарешётном пространстве, не определял скорости частиц угля при массовом движении их по просеивающей поверхности ротора.

Постановка задачи. Целью данной работы является составление дифференциальных уравнений относительного движения частицы твёрдых бытовых отходов или угля в центробежном поле сепараторов.

Рассмотрим движение отдельной материальной точки (частицы) по внутренней поверхности кругового конуса, вращающегося вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω (рисунок 1).

Считаем, как и в работе [4], координатными линиями, отвечающими координатам ψ и α будут окружности с центрами в точках O и O_1 соответственно. Координатная линия, отвечающая координате ξ , совпадает с образующей конуса. На рисунке 1 изображены координатные оси (касательные к координатным линиям в данной точке M) ξ , ψ и α , образующие друг с другом прямые углы. Таким образом, введена жёстко связанная с корпусом сферическая система обобщённых координат ξ , ψ и α .

С учётом того, что при движении точки по поверхности конуса её координата α остаётся неизменной ($\alpha = \text{const}$) и производная по времени от неё тождественно равна нулю ($\dot{\alpha} = 0$), проекции скорости $\vec{V}$ и ускорения $\vec{a}$ точки M на оси выбранной координатной системы можно представить в виде:

$$V_{\xi} = \dot{\xi}; \quad V_{\psi} = \dot{\psi} \cdot O_1M = \dot{\psi} \cdot \xi \cdot \sin \alpha; \quad V_{\alpha} = 0,$$

(1)

$$\left. \begin{aligned} a_{\xi} &= \ddot{\xi} - \dot{\xi} \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \sin^2 \alpha; \\ a_{\psi} &= \frac{1}{\xi \cdot \sin \alpha} \cdot \frac{d}{dt} (\xi^2 \cdot \dot{\psi} \cdot \sin^2 \alpha); \\ a_{\alpha} &= -\dot{\xi}^2 \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Известно, что движение материальной точки в неинерциальной системе отсчёта (вращающийся конус) описывается векторным уравнением:

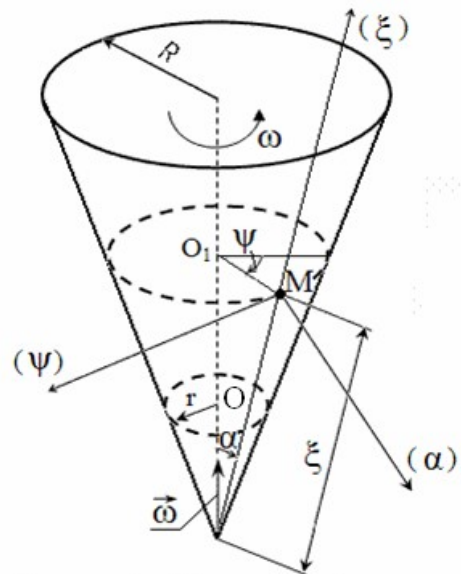


Рисунок 1 – Подвижная сферическая система координат надрешётной частицы

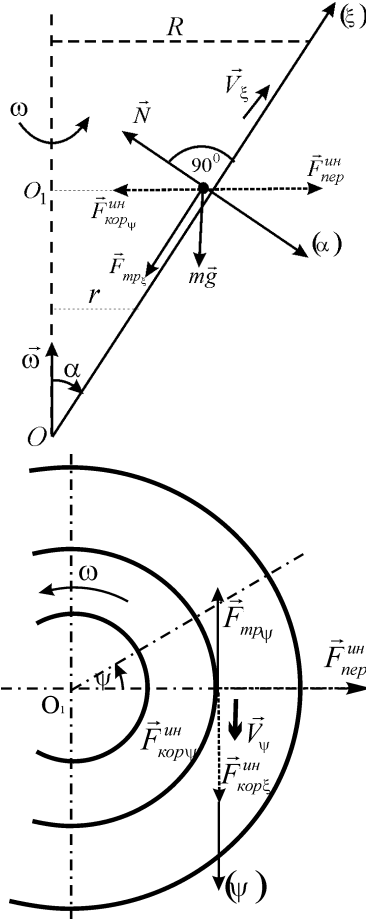


Рисунок 2 – Схема приложенных к частице сил

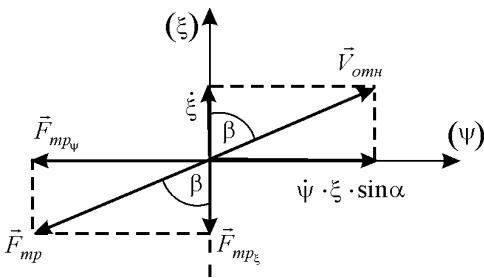


Рисунок 3 – Разложение силы трения по координатным осям

$$m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F}_a + \vec{F}_{пер}^{ин} + \vec{F}_{кор}^{ин}, \quad (3)$$

где m – масса частицы, принятой за материальную точку; $\sum \vec{F}_a$ – геометрическая сумма активных сил и реакций связей; $\vec{F}_{пер}^{ин}$ – переносная сила инерции; $\vec{F}_{кор}^{ин}$ – кориолисова сила инерции.

Все силы, входящие в правую часть уравнения, а также проекции скорости и ускорения частицы на координатные оси показаны на рисунке 2.

Величина переносной силы инерции определяется как

$$F_{пер}^{ин} = m \cdot a_{пер} = m \cdot \omega^2 \cdot O_1M = m \cdot \omega^2 \xi \cdot \sin \alpha, \quad (4)$$

Кориолисову силу инерции удобно представить в виде двух составляющих, что подтверждается следующими преобразованиями:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{кор}^{ин} &= -m \cdot \vec{a}_{кор} = -m \cdot 2(\vec{\omega} \times \vec{V}_{отн}) = -2m\vec{\omega} \times (\vec{V}_{\xi} + \vec{V}_{\psi}) = \\ &= -2m\vec{\omega} \times \vec{V}_{\xi} - 2m\vec{\omega} \times \vec{V}_{\psi}. \end{aligned}$$

Здесь $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости конуса; $\vec{V}_{\xi}$ и $\vec{V}_{\psi}$ – соответственно составляющие относительной скорости частицы по направлениям координатных осей ξ и ψ .

С учётом выражений (1) модули обеих составляющих кориолисовой силы инерции имеют вид:

$$F_{кор\xi}^{ин} = 2m \cdot \omega \cdot \dot{\xi} \cdot \sin \alpha, \quad F_{кор\psi}^{ин} = 2m \cdot \omega \cdot \dot{\psi} \cdot \xi \cdot \sin \alpha. \quad (5)$$

Сила сопротивления движению (кулоново трение) направлена противоположно вектору относительной скорости, т.е.

$$\vec{F}_{mp} = -f \cdot N \cdot \vec{V}_{отн} / V_{отн}, \quad (6)$$

где f – коэффициент трения; N – величина нормального давления; $\vec{V}_{отн} / V_{отн}$ – единичный вектор (орт) касательной к траектории относительного движения точки.

Из рисунка 3, на котором изображено положение силы трения по отношению к координатным осям ξ и ψ , очевидно, что

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \frac{\dot{\psi} \cdot \xi \cdot \sin \alpha}{V_{отн}} = \frac{\dot{\psi} \cdot \xi \cdot \sin \alpha}{\sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\psi}^2 \cdot \xi^2 \cdot \sin^2 \alpha}}, \\ \cos \beta &= \frac{\dot{\xi}}{V_{отн}} = \frac{\dot{\xi}}{\sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\psi}^2 \cdot \xi^2 \cdot \sin^2 \alpha}}. \end{aligned} \quad (7)$$

С учетом (7) проекции силы трения на координатные оси определяются выражениями:

$$\begin{aligned} F_{mp\xi} &= -f \cdot N \cdot \cos \beta = -f \cdot N \frac{\dot{\xi}}{\sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\psi}^2 \cdot \xi^2 \cdot \sin^2 \alpha}}, \\ F_{mp\psi} &= -f \cdot N \cdot \sin \beta = -f \cdot N \frac{\dot{\psi} \cdot \xi \cdot \sin \alpha}{\sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\psi}^2 \cdot \xi^2 \cdot \sin^2 \alpha}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Проектируя векторное уравнение (3) на оси ξ , ψ и α с учётом выражений (2), (4)-(6), (8) получаем:

$$\begin{aligned} m(\ddot{\xi} - \dot{\psi}^2 \cdot \xi \cdot \sin^2 \alpha) &= -m(g \cdot \cos \alpha + \omega^2 \xi \cdot \sin^2 \alpha - 2\omega \dot{\xi} \dot{\psi} \cdot \sin^2 \alpha) - \frac{\dot{\xi} \cdot f \cdot N}{\sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\psi}^2 \cdot \xi^2 \cdot \sin^2 \alpha}}, \\ \frac{m}{\xi \cdot \sin \alpha} \cdot \frac{d}{dt}(\dot{\psi} \cdot \xi^2 \cdot \sin^2 \alpha) &= 2m\omega \dot{\xi} \cdot \sin \alpha - f \cdot N \frac{\dot{\psi} \cdot \xi \cdot \sin \alpha}{\sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\psi}^2 \cdot \xi^2 \cdot \sin^2 \alpha}}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$-m\dot{\xi}\dot{\psi}^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = m(g \sin \alpha + \omega^2 \xi \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 2\omega \dot{\xi} \dot{\psi} \sin \alpha \cdot \cos \alpha) - N.$$

Последнее уравнение системы (9) позволяет определить нормальную реакцию конуса:

$$N = mg \cdot \sin \alpha + m\dot{\xi} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha (\omega^2 - 2\omega \dot{\psi} + \dot{\psi}^2) = m(g \cdot \sin \alpha + \xi (\omega - \dot{\psi})^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha). \quad (10)$$

Подставив выражение (10) в (9), после преобразования получим систему (11) двух нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих движение надгрешётной частицы твёрдых бытовых отходов или угля по внутренней поверхности вращающегося конуса:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - \xi \cdot \sin^2 \alpha \cdot (\omega - \dot{\psi})^2 + f[g \cdot \sin \alpha + \xi (\omega - \dot{\psi})^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha] \cdot \frac{\dot{\xi}}{\sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\psi}^2 \xi^2 \sin^2 \alpha}} + g \cdot \cos \alpha &= 0, \\ \ddot{\psi} - 2\frac{\dot{\xi}}{\xi}(\omega - \dot{\psi}) + f[g \cdot \sin \alpha + \xi (\omega - \dot{\psi})^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha] \cdot \frac{\dot{\psi}}{\sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\psi}^2 \xi^2 \sin^2 \alpha}} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Результаты решения системы уравнений (11)

Выполнено численное интегрирование системы уравнений (11). Проведена аналитическая аппроксимация интегральных кривых системы уравнений (11).

Результаты численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (11) в реальном диапазоне изменения времени t в сопоставлении с их аппроксимацией комбинацией экспоненциальных функций, степенным многочленом и степенной функцией приведены в таблице 1 и на рисунке 4.

Выводы и направление дальнейших исследований

Получен и протестирован вычислительный алгоритм для расчёта основных параметров, влияющих на процесс проваливания частицы в щель вращающегося конуса.

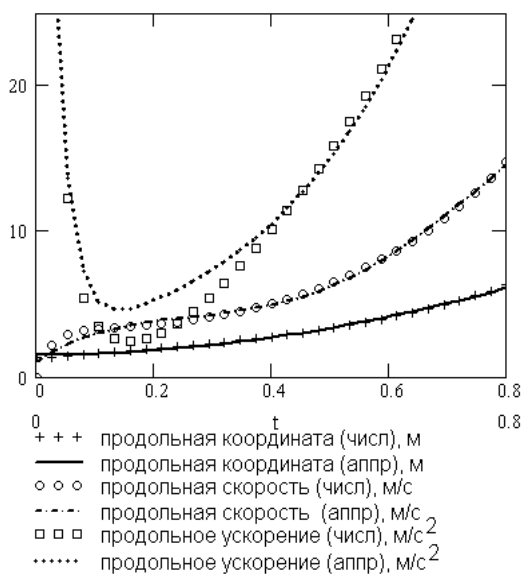


Рисунок 4 – Аппроксимационные кривые

Таблица 1 – Результаты аппроксимации

Величина	Аналитические выражения, аппроксимирующие зависимости, полученные численно	Корреляционный коэффициент аппроксимации
Продольное ускорение a_{ξ}	$C_0 \cdot e^{C_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{C_3 \cdot t}$	0,996
Продольная скорость V_{ξ}	$C_0 + C_1 \cdot t + C_2 \cdot t^2 + C_3 \cdot t^3 + C_4 \cdot t^5$	0,997
Продольная координата ξ	$C_0 + C_1 \cdot t^{C_2}$	0,998

Библиографический список

1. Баллистическое обогащение полезных ископаемых / В.В. Журба, Ф.Н. Булгаков, Б.Б. Зельдин, Л.Н. Горохова // Обогащение полезных ископаемых. — 1985. — Вып. 35. — С. 44–52.
2. Булгаков Ф.Н. Некоторые вопросы теории центробежного струйного грохота / Ф.Н. Булгаков // Труды Донецкого индустриального института. — 1959. — Т. XXIX. — С. 58–66.
3. Булгаков Ф.Н. Классификация углей в центробежном поле / Ф.Н. Булгаков, Б.Б. Зельдин // Обогащение полезных ископаемых. — К., 1972. — С. 30–37.
4. Восходящее движение твёрдых частиц на вращающейся наклонной поверхности применительно к их классификации. Машиностроение и техносфера XXI века / В.Б. Малеев, А.С. Парфенюк, В.В. Журба и др. // Сб. трудов XIII международной научно-технической конференции в г. Севастополе 11-16 сентября 2006 г. [В 5-ти томах]. — Донецк, 2005. — Т. 5. — С. 274–278.

Поступила в редакцию 25.04.2006 г.