

УДК 621.313

В.В. Костюков, старший преподаватель*Севастопольский национальный технический университет**Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***ПРИМЕНЕНИЕ КОМБИНИРОВАННОГО МЕТОДА АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ К ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ДВИГАТЕЛЯ ПОСТОЯННОГО ТОКА**

Применение комбинированного метода к линейным моделям двигателя постоянного тока позволило получить обобщенную аналитическую связь между постоянными интегрирования и начальными условиями.

Переходные процессы играют важную роль при работе электромеханических систем. Несмотря на непродолжительность во времени, эти процессы могут таить в себе немалые опасности, связанные со сверхтоками и перенапряжениями. В электромеханических системах транспортных средств значение переходных процессов еще более возрастает вследствие частого изменения направления и скорости движения. В транспортных средствах широкое распространение получили двигатели постоянного тока, обладающие большим пусковым моментом и широкими регулировочными возможностями.

Анализ переходных процессов в двигателях постоянного тока осуществляется, как и в других электрических машинах, классическим либо операторным методом. Еще одним, известным из теории цепей, методом анализа переходных процессов является метод переменных состояния. Предлагаемый к использованию метод можно рассматривать как комбинацию названных выше методов.

Для величин, являющихся переменными состояния, аналогичное классическому методу решение записывается в виде суммы свободной и вынужденной составляющих. Выбирая одну из переменных состояния за базисную и используя уравнения для свободных составляющих, коэффициенты при экспонентах остальных переменных состояния выражаются через коэффициенты базисной переменной состояния. Рассматривая предшествующий и новый установившийся режимы для переменных состояния в начальный момент времени, находится разность между самой переменной состояния и вынужденной составляющей. Так как коэффициенты при экспонентах всех не базисных переменных состояния выражаются через аналогичные коэффициенты базисной переменной состояния, следовательно, получится система уравнений относительно неизвестных коэффициентов базисной переменной состояния. Решая данную систему, вначале определяются коэффициенты при экспонентах базисной, а затем – при всех остальных переменных состояния.

Применение комбинированного метода позволяет получить обобщенную аналитическую связь между постоянными интегрирования и независимыми начальными условиями.

Целью статьи является демонстрация возможности применения комбинированного метода к анализу динамических процессов в двигателях постоянного тока.

В идеализированных двигателях постоянного тока с независимым возбуждением уравнение для тока якоря имеет вид

$$L_{\text{я}} \frac{di_{\text{я}}}{dt} + r_{\text{я}} i_{\text{я}} + C\Phi\omega = U, \quad (1)$$

где $L_{\text{я}}$ – индуктивность обмотки якоря; $i_{\text{я}}$ – ток якоря; $r_{\text{я}}$ – активное сопротивление цепи якоря; C – постоянная данной машины; Φ – магнитный поток; ω – угловая скорость якоря; U – напряжение внешнего источника. В (1) оставим в левой части члены с током якоря:

$$L_{\text{я}} \frac{di_{\text{я}}}{dt} + r_{\text{я}} i_{\text{я}} = U - C\Phi\omega. \quad (2)$$

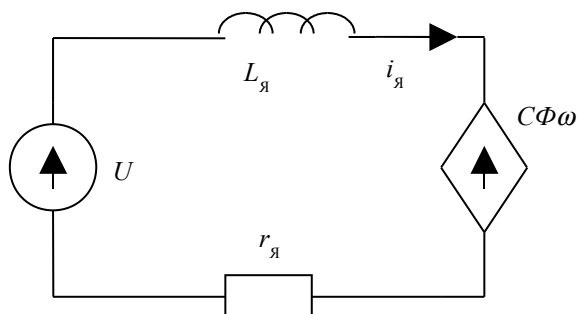


Рисунок 1 – Схема замещения цепи якоря

Член $C\Phi\omega$ можно рассматривать как управляемый источник напряжения. В соответствии с уравнением можно составить схему, изображенную на рисунке 1.

Из динамики вращательного движения известно уравнение

$$J \frac{d\omega}{dt} + M_{\text{н}} + M_{\text{тр}} = M_{\text{вр}}, \quad (3)$$

где J – момент инерции вращающихся масс; $M_{\text{н}}$ – момент вращаемых механизмов; $M_{\text{тр}}$ – момент трения; $M_{\text{вр}}$ – вращающий момент двигателя.

Момент трения связан с угловой скоростью якоря: $M_{\text{тр}} = k\omega$. Вращающий момент выражается через ток якоря: $M_{\text{вр}} = C\Phi i_{\text{я}}$.

Тогда уравнение (3) примет вид:

$$J \frac{d\omega}{dt} + M_{\text{н}} + k\omega = C\Phi i_{\text{я}} \quad (4)$$

или

$$J \frac{d\omega}{dt} + k\omega = C\Phi i_{\text{я}} - M_{\text{н}}. \quad (5)$$

Рассматривая член $C\Phi i_{\text{я}}$ как управляемый источник напряжения и трактуя ω как аналог тока, получим схему, соответствующую уравнению (5), показанную на рисунке 2.

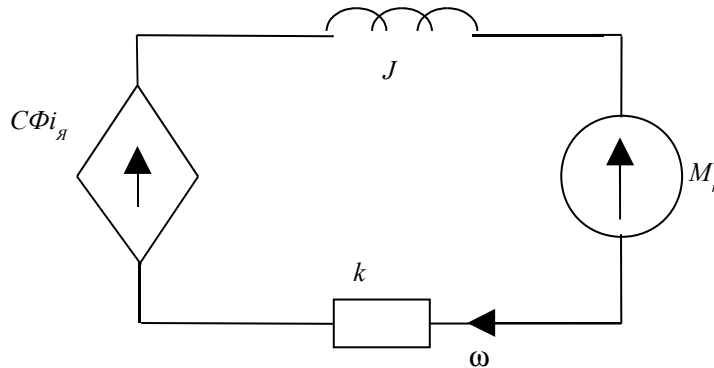


Рисунок 2 – Схема, соответствующая основному уравнению динамики вращательного движения

Уравнения (2) и (5) образуют систему с двумя неизвестными i и ω . Разрешив эту систему относительно угловой скорости, получим:

$$\frac{L_{\text{я}} J}{C\Phi} \frac{d^2\omega}{dt^2} + \left(\frac{L_{\text{я}} k}{C\Phi} + \frac{r_{\text{я}} J}{C\Phi} \right) \frac{d\omega}{dt} + \left(\frac{kr_{\text{я}}}{C\Phi} + C\Phi \right) \omega = U - \frac{r_{\text{я}} M_{\text{н}}}{C\Phi} - L_{\text{я}} \frac{dM_{\text{н}}}{dt}. \quad (6)$$

Дифференциальному уравнению (6) соответствуют корни характеристического уравнения:

$$\alpha_{1,2} = -\frac{Jr_{\text{я}} + kL_{\text{я}}}{2JL_{\text{я}}} \pm \sqrt{\left(\frac{Jr_{\text{я}} + kL_{\text{я}}}{2JL_{\text{я}}} \right)^2 - \frac{kr_{\text{я}} + C^2\Phi^2}{JL_{\text{я}}}}. \quad (7)$$

Рассчитаем переходные процессы в двигателе постоянного тока комбинированным методом. В соответствии с рисунками переменными состояния здесь являются ток якоря и угловая скорость:

$$i_{\text{я}}(t) = i_{\text{я пр}} + A_{11} e^{\alpha_1 t} + A_{12} e^{\alpha_2 t}, \quad \omega(t) = \omega_{\text{пр}} + A_{21} e^{\alpha_1 t} + A_{22} e^{\alpha_2 t}. \quad (8)$$

Принужденные составляющие в (8) могут быть найдены из нового установившегося режима. В установившемся режиме производные равны нулю и уравнения (2) и (5) в этом случае примут вид:

$$r_{\text{я}} I_{\text{я}} = U - C\Phi\omega, \quad k\omega = C\Phi I_{\text{я}} - M_{\text{н}}.$$

Из двух последних уравнений определим угловую скорость якоря в установившемся режиме:

$$\omega_{\text{пр}} = \frac{C\Phi U - M_{\text{н}} r_{\text{я}}}{k r_{\text{я}} + C^2\Phi^2}. \quad (9)$$

Из тех же уравнений находится ток якоря в установившемся режиме:

$$i_{\text{я пр}} = \frac{Uk + C\Phi M_{\text{н}}}{k r_{\text{я}} + C^2\Phi^2}. \quad (10)$$

Для начального момента времени уравнения (8) запишутся в виде:

$$i_{\text{я}}(0) = i_{\text{я пр}} + A_{11} + A_{12}, \quad \omega(0) = \omega_{\text{пр}} + A_{21} + A_{22}. \quad (11)$$

Так как ток якоря и угловая скорость являются переменными состояния, то для них справедливы законы коммутации и, значит, $i_{\text{я}}(0)$ и $\omega(0)$ могут быть найдены из предшествующего установившегося режима. В уравнениях (11) разделяем известные и неизвестные члены:

$$A_{11} + A_{12} = i_{\text{я}}(0) - i_{\text{яПР}} = \Delta i_{\text{я}}, \quad A_{21} + A_{22} = \omega(0) - \omega_{\text{ПР}} = \Delta \omega. \quad (13)$$

В (13) неизвестными являются коэффициенты при экспонентах A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} . Между ними существует связь, для поиска которой используем (5) для свободных составляющих:

$$J \frac{d}{dt} (A_{21} e^{\alpha_1 t} + A_{22} e^{\alpha_2 t}) + k (A_{21} e^{\alpha_1 t} + A_{22} e^{\alpha_2 t}) = C \Phi (A_{11} e^{\alpha_1 t} + A_{12} e^{\alpha_2 t}).$$

или так

$$(J \alpha_1 A_{21} + k A_{21} - C \Phi A_{11}) e^{\alpha_1 t} + (J \alpha_2 A_{22} + k A_{22} - C \Phi A_{12}) e^{\alpha_2 t} = 0.$$

Так как экспоненты не равны нулю и являются системой линейно независимых функций, получаем уравнения, связывающие постоянные интегрирования:

$$J \alpha_1 A_{21} + k A_{21} - C \Phi A_{11} = 0, \quad J \alpha_2 A_{22} + k A_{22} - C \Phi A_{12} = 0.$$

Выбираем за базисную величину угловую скорость якоря и выражаем A_{11} и A_{12} через A_{21} и A_{22} :

$$A_{11} = \frac{J \alpha_1 + k}{C \Phi} A_{21} = b_{11} A_{21}, \quad A_{12} = \frac{J \alpha_2 + k}{C \Phi} A_{22} = b_{12} A_{22}. \quad (14)$$

С учетом выражений (14) запишем систему уравнений (13) в матричной форме

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{21} \\ A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta i_{\text{я}} \\ \Delta \omega \end{pmatrix},$$

из которой следует:

$$A_{21} = \frac{(J \alpha_2 + k) \Delta \omega - C \Phi \Delta i_{\text{я}}}{J(\alpha_2 - \alpha_1)}, \quad A_{22} = \frac{C \Phi \Delta i_{\text{я}} - (J \alpha_1 + k) \Delta \omega}{J(\alpha_2 - \alpha_1)}. \quad (15)$$

Подставляя левые части (9), (14) в (8), получаем выражение для угловой скорости, описывающее любой переходной процесс:

$$\omega(t) = \frac{C \Phi U - M_{\text{H}} r_{\text{я}}}{k r_{\text{я}} + C^2 \Phi^2} + \frac{(J \alpha_2 + k) \Delta \omega - C \Phi \Delta i_{\text{я}}}{J(\alpha_2 - \alpha_1)} e^{\alpha_1 t} - \frac{C \Phi \Delta i_{\text{я}} - (J \alpha_1 + k) \Delta \omega}{J(\alpha_2 - \alpha_1)} e^{\alpha_2 t}. \quad (16)$$

Выбрав за базисную величину ток якоря, получим выражение, описывающее ток якоря в любом переходном процессе:

$$i_{\text{я}}(t) = \frac{U k + C \Phi M_{\text{H}}}{k r_{\text{я}} + C^2 \Phi^2} + \frac{(L_{\text{я}} \alpha_2 + r_{\text{я}}) \Delta i_{\text{я}} - C \Phi \Delta \omega}{L_{\text{я}}(\alpha_2 - \alpha_1)} e^{\alpha_1 t} - \frac{C \Phi \Delta \omega + (L_{\text{я}} \alpha_1 + r_{\text{я}}) \Delta i_{\text{я}}}{L_{\text{я}}(\alpha_2 - \alpha_1)} e^{\alpha_2 t}. \quad (17)$$

Рассмотрим общий случай, учитывающий все виды переходных процессов в двигателе постоянного тока. Предположим, что в ходе работы могут изменяться три величины: Φ – магнитный поток, U – напряжение внешнего источника, M_{H} – момент вращаемых механизмов. Причем пусть эти изменения происходят скачкообразно. Значения этих величин до изменения будем обозначать с индексом «д». Тогда, в соответствии с (13), получим:

$$\Delta \omega = \frac{C \Phi_{\text{д}} U_{\text{д}} - M_{\text{Hд}} r_{\text{я}}}{k r_{\text{я}} + C^2 \Phi_{\text{д}}^2} - \frac{C \Phi U - M_{\text{H}} r_{\text{я}}}{k r_{\text{я}} + C^2 \Phi^2}, \quad \Delta i_{\text{я}} = \frac{U_{\text{д}} k + C \Phi_{\text{д}} M_{\text{Hд}}}{k r_{\text{я}} + C^2 \Phi_{\text{д}}^2} - \frac{U k + C \Phi M_{\text{H}}}{k r_{\text{я}} + C^2 \Phi^2}. \quad (18)$$

Найденные в (18) соответственно $\Delta \omega$ и $\Delta i_{\text{я}}$ подставляем в формулы (16) и (17).

Рассмотрим конкретные виды переходных процессов в четырехполюсном двигателе постоянного тока независимого возбуждения номинальной мощностью $P_{\text{ном}} = 21$ кВт.

Для численного расчета возьмем характеристики двигателя и вращаемых элементов: $L_{\text{я}} = 0,004$ Гн – индуктивность обмотки якоря; $r_{\text{я}} = 0,03$ Ом – активное сопротивление обмотки якоря; $C = 95,94$ – механическая постоянная двигателя; $J = 4$ кг·м² – момент инерции вращающихся масс; $k = 0,086$ Н·м·с/рад – коэффициент пропорциональности между угловой скоростью якоря и моментом трения.

1. Рассмотрим пуск двигателя. В этом случае $\Phi_{\text{д}}$, $U_{\text{д}}$ и $M_{\text{Hд}}$ равны нулю, а выражения (22) и (23) упрощаются – в них остаются только вычитаемые. После пуска эти величины принимают следующие численные значения: $\Phi = 1,4 \cdot 10^{-2}$ Вб – магнитный поток полюса; $U = 220$ В – напряжение питания; $M_{\text{H}} = 121$ Н·м – момент вращаемых механизмов.

Графики изменения угловой скорости и тока якоря при пуске двигателя изображены на рисунке 3.

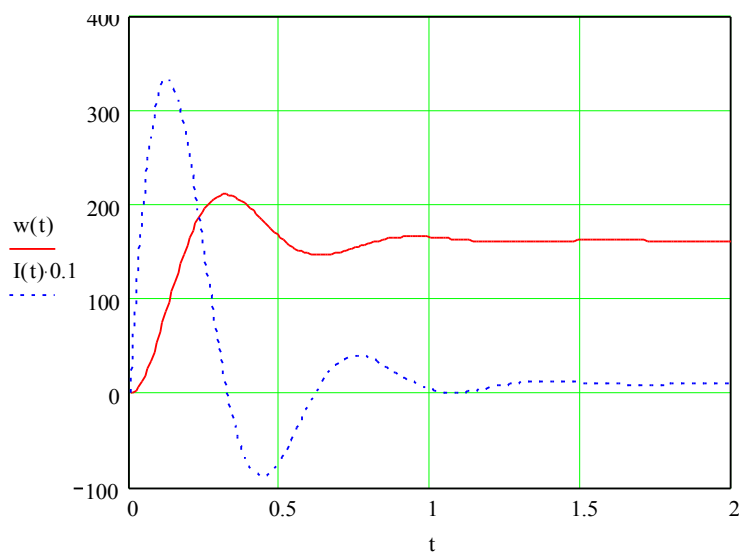


Рисунок 3 – Графики изменения угловой скорости и тока якоря при пуске двигателя постоянного тока

2. Рассмотрим переходный процесс якорного регулирования путем изменения напряжения, подводимого к якорю двигателя. Пусть до начала якорного регулирования $\Phi = 1,4 \cdot 10^{-2}$ Вб, $U = 220$ В, $M_H = 121$ Н·м. В ходе регулирования изменилось напряжение, подводимое к якорю и вышеупомянутые величины приняли значения: $\Phi = 1,4 \cdot 10^{-2}$ Вб, $U = 180$ В, $M_H = 121$ Н·м.

Графики изменения угловой скорости и тока якоря при якорном регулировании изображены на рисунке 4.

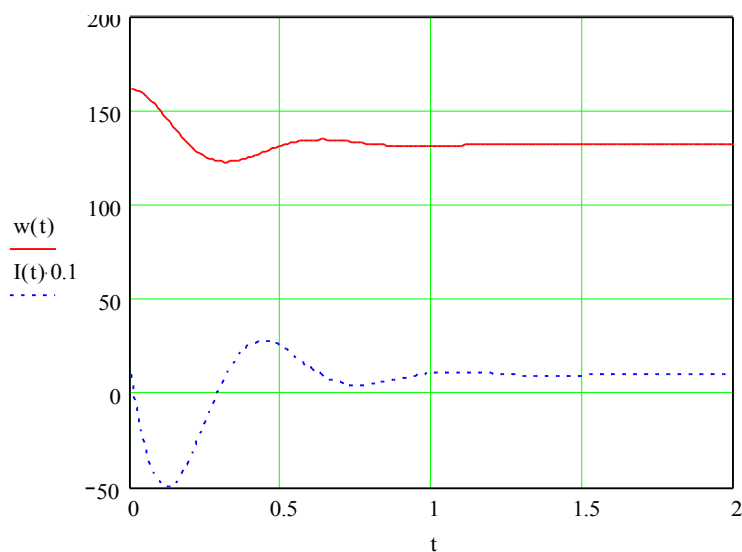


Рисунок 4 – Графики изменения угловой скорости и тока якоря при якорном регулировании

3. Рассмотрим переходный процесс полюсного регулирования путем изменения магнитного потока полюса двигателя. Пусть до начала полюсного регулирования $\Phi = 0,014$ Вб. В ходе регулирования уменьшилась только величина магнитного потока и стала равной $\Phi = 0,01$ Вб.

Графики изменения угловой скорости и тока якоря при полюсном регулировании показаны на рисунке 5.

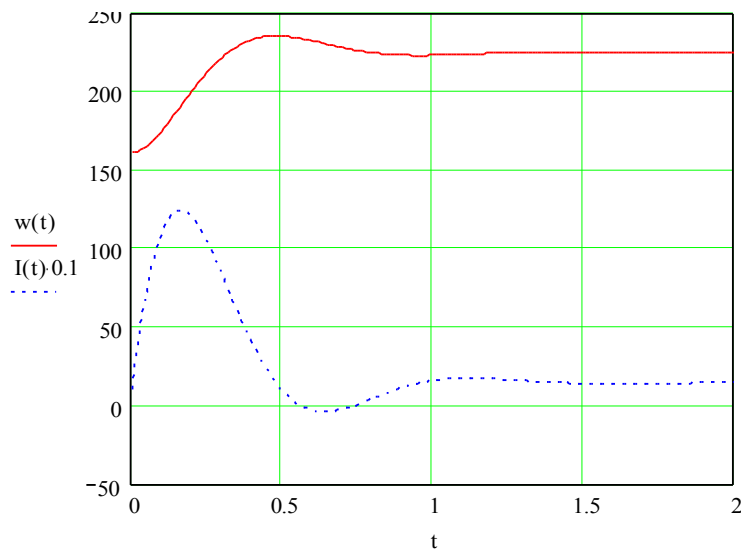


Рисунок 5 – Графики изменения угловой скорости и тока якоря при полюсном регулировании

Выводы

1. Применение комбинированного метода позволяет для линейной модели двигателя постоянного тока получить аналитические связи постоянных интегрирования с независимыми начальными условиями.

2. Полученные связи являются обобщенными в том смысле, что охватывают все возможные переходные процессы в двигателях постоянного тока.

Целью дальнейших исследований может являться применение комбинированного метода к нелинейным моделям двигателей постоянного тока.

Библиографический список

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи / Л.А. Бессонов. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. шк., 1984. — 559 с.
2. Канов Л.Н. Анализ переходных процессов в электрических машинах постоянного тока методом схемного моделирования / Л.Н. Канов // Електротехніка і електромеханіка. — 2004. — № 3. — С. 34–37.

Поступила в редакцию 10.05.2006 г.