

Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный технический университет



«СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практического занятия №4

по дисциплине «Эконометрия»

для студентов специальности
6.050201 - «Менеджмент организаций»
дневной формы обучения

Севастополь
2008



УДК 658**«Спектральный анализ временных рядов»**

методические указания к проведению практического занятия №4 по дисциплине «Эконометрия» для студентов специальности 8.050201 – «Менеджмент организаций» дневной формы обучения / Сост. А.В. Цуканов, Т.А. Кокодей. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2008г. – 16 с.

Целью методических указаний является систематизация теоретического материала и практических рекомендаций в области спектрального анализа временных рядов.

Методические указания утверждены на заседании кафедры менеджмента и экономико-математических методов, (протокол № 5 от 23.01.2008 г.).

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент:

Фисун С.Н., канд. техн. наук, доцент кафедры «Кибернетика и вычислительная техника».

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цель работы.....	4
2. Теоретический раздел.....	4
3. Пример выполнения расчётов.....	7
4. Индивидуальные расчётно-практические задания.....	11
5. Содержание отчета о практическом занятии.....	12
Библиографический список.....	13
Приложение А. (справочное) Таблица Брадиса: тригонометрические функции от аргумента в радианах.....	14

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью данной работы является освоение практических аспектов выявления частотного состава и скрытых периодических составляющих стационарного временного ряда экономического происхождения.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

Временной ряд представляет собой совокупность измерений некоторой переменной, производимых по мере возрастания времени. Существенным отличием временного ряда от выборки данных является то, что для временного ряда известен порядок поступления наблюдений.

Одним из методов анализа временных рядов является спектральный (Фурье) анализ, цель которого - разложить комплексные стационарные временные ряды с циклическими компонентами на несколько основных синусоидальных функций с определенной длиной волн. Стационарные временные ряды имеют постоянные по времени основные характеристики, такие как среднее, дисперсия и автокорреляции; комплексные временные ряды подгоняются к нескольким моделям. Для проведения спектрального анализа нестационарного ряда необходимо предварительное исключение из него трендовой составляющей.

Термин "спектральный" заимствован из оптики: после преломления в призме пучок белого света («белый шум»), составленный хаотически из света с различными длинами волн, разлагается на волны различных частот, т.о. распознавая существенные основные периодические компоненты (рисунок 1).

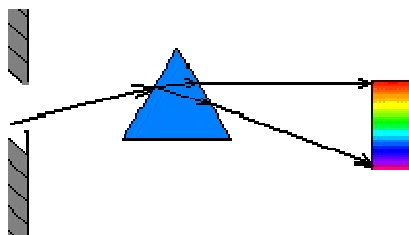


Рисунок 1 - Дисперсия белого видимого света при прохождении через стеклянную прозрачную призму

Аналогично и применение спектрального анализа к временным рядам: возможно изучить определённое явление, обнаружив всего несколько повторяющихся циклов различной длины в интересующих временных рядах, которые, на первый взгляд, выглядят как случайный шум. Спектральный анализ даёт возможность разложить временной ряд на функции синусов и косинусов различных частот, для определения тех, появление которых особенно существенно и значимо. Один из возможных способов сделать это - решить задачу линейной множественной регрессии (оценить коэффициенты функции

Фурье, представляющей собой тригонометрический функциональный ряд), где зависимая переменная y_t -наблюдаемый временной ряд, а независимые переменные или регрессоры x_{ts} и x_{tc} - функции синусов и косинусов всех возможных (дискретных) частот, формула (1).

$$y_t = a_0 + \sum_{i=1}^q [a_i \cos(2\pi f_i t) + b_i \sin(2\pi f_i t)] =$$

$$= a_0 + a_1 \cos(2\pi f_1 t) + b_1 \sin(2\pi f_1 t) + a_2 \cos(2\pi f_2 t) + b_2 \sin(2\pi f_2 t) + \dots$$

$$+ a_q \cos(2\pi f_q t) + b_q \sin(2\pi f_q t) = a_0 + a_1 x_{1c} + b_1 x_{1s} + a_2 x_{2c} + b_2 x_{2s} + \dots + a_q x_{qc} + b_q x_{qs} \quad (1)$$

где a_0 - константа;

a_i, b_i – амплитуды соответствующих функций -отклонение от среднего значения до пика или впадины (рисунок 2). Величины амплитуд также являются коэффициентами регрессии, полученными в результате подгонки функций синусов и косинусов разных длин к фактическим данным наблюдений. Коэффициенты показывают степень, с которой соответствующие функции коррелируют с фактическими данными. Сами же синусы и косинусы на различных частотах не коррелированы (ортогональны).

$2\pi f_i$ - круговая частота соответствующей функции, радиан;

f_i - частота Фурье в данном частном случае, в общем случае – угловая частота – это число периодов (циклов), содержащихся в единичном интервале, а также величина обратная периоду T (рисунок 2), формула (2);

$$f_i = \frac{i}{N} = \frac{1}{T}, \quad (2)$$

T - период колебаний (длина волны) - время, которое проходит между повторением одинаковых фаз колебаний φ_k ;

φ_k – сдвиг функции относительно начала отсчёта в радианах (от 0 до 2π). В данном частном случае равен нулю, $\cos(2\pi f_i * t + \varphi_k)$;

i - номер соответствующих гармоник (косинуса и синуса) с определённым значением частоты;

N - число наблюдений;

q - для нечётного числа наблюдений $q=(N-1)/2$ (последнее значение опускается) и всего существует q различных синусов и косинусов, а также q значений периодограммы. Для чётного числа наблюдений $q= N/2$ существует q значений косинусов и $q-1$ значений синусов, а также q значений периодограммы.

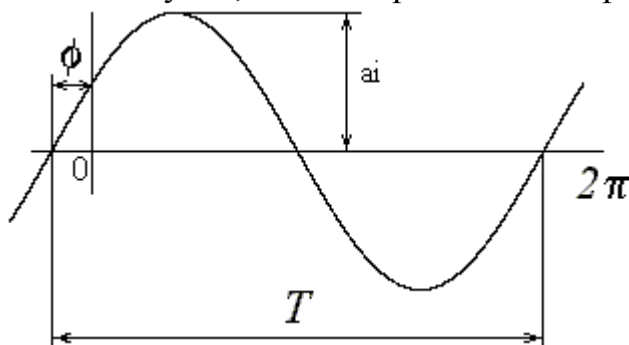


Рисунок 2 - Характеристики периодических функций

Для нечётного числа наблюдений, $q=(N-1)/2$, оценки коэффициентов a_0 , a_i , b_i методом наименьших квадратов будут определяться формулами (3-5)

$$a_0 = \bar{y}, \quad (3)$$

где $\bar{y}$ - среднее значение наблюдений.

$$a_i = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N y_t \cos(2\pi f_i t), \quad (4)$$

где t - номер наблюдения во временном ряду;
 $i=1,2,\dots,q$.

$$b_i = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N y_t \sin(2\pi f_i t), \quad (5)$$

Тогда периодограмма состоит из $q=(N-1)/2$ значений, формула (6).

$$I(f_i) = \frac{N}{2} (a_i^2 + b_i^2), \quad (6)$$

$$i = 1, 2, \dots, q$$

где $I(f_i)$ называется интенсивностью на частоте f_i и представляет собой значения периодограммы;

N - общая длина ряда.

Всё вышеизложенное предполагает наличие нечётного числа наблюдений $N=2q+1$. В случае, когда N – чётно, полагаем $N=2q$, применяя для расчёта значений коэффициентов и периодограммы формулы (4-6) только для $i=1,2,\dots,q-1$, а для $i=q$ используя формулы (7-9).

$$a_q = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (-1)^t y_t. \quad (7)$$

$$b_q = 0. \quad (8)$$

$$I(f_q) = I(0,5) = N a_q^2. \quad (9)$$

Таким образом, спектральный анализ определяет корреляцию функций синусов и косинусов различной частоты с наблюдаемыми данными. Если найденная корреляция велика (коэффициент при определенном синусе или косинусе), то можно заключить, что существует строгая периодичность на соответствующей частоте в данных.

Функции синусов и косинусов независимы (или ортогональны); поэтому можно просуммировать квадраты коэффициентов для каждой частоты, чтобы вычислить периодограмму, где $I(f_i)$ - значения периодограммы на частоте f_i .

Значения периодограммы можно интерпретировать как дисперсию (вариацию) данных на соответствующей частоте. Обычно значения периодограммы на графике изображаются в зависимости от частот или периодов.

3. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЁТОВ

Пусть существует набор из 12 среднемесячных температур y_t (в градусах Цельсия) для определённого региона в прошедшем году (таблица 1).

По формуле (3) получим $a_0 = 9,466667$.

Поскольку N – чётное, воспользуемся формулами (4-6) для $i=1\dots q-1$ и формулами (7-9) для $i=q$.

Для вычисления коэффициента a_1 по формуле (4) рассчитаем в третьей строке таблицы величины $\cos(2\pi 1t/12)$ модельных (оценочных) значений функции косинуса частоты $f_1=1/12$ (формула (2)) в заданные моменты времени $t=1\dots 12$. Используем таблицы Брадиса (Приложение А), отметив, что $\pi=3,1416$ радиан, а $\pi/6=0,5236$ радиан.

Тогда получим

$$a_1 = (2/12) * (3,4 * \cos(0,5236) + 4,5 * \cos(0,5236 * 2) + 4,3 * \cos(0,5236 * 3) + 8,7 * \cos(0,5236 * 4) + 13,3 * \cos(0,5236 * 5) + 13,8 * \cos(0,5236 * 6) + 16,1 * \cos(0,5236 * 7) + 15,5 * \cos(0,5236 * 8) + 14,1 * \cos(0,5236 * 9) + 8,9 * \cos(0,5236 * 10) + 7,4 * \cos(0,5236 * 11) + 3,6 * \cos(0,5236 * 12)) = -5,3$$

Аналогичным образом в четвёртой строке таблицы 1 рассчитываем величины $\cos(2\pi 2t/12) = \cos(\pi t/3)$ для частоты $f_2=2/12=1/6$ и получаем

$$a_2 = (2/12) * (3,4 * 0,500 + 4,5 * (-0,500) + \dots + 3,6 * 1) = 0,05;$$

В пятой строке таблицы 1 рассчитываем $\cos(2\pi 3t/12) = \cos(\pi t/2)$, тогда

$$a_3 = (2/12) * (3,4 * 0 + 4,5 * (-1) + \dots + 3,6 * 1) = 0,1;$$

В шестой строке таблицы рассчитываем $\cos(2\pi 4t/12) = \cos(2\pi t/3)$, тогда

$$a_4 = (2/12) * (3,4 * (-0,500) + 4,5 * (-0,5) + \dots + 3,6 * 1) = -0,5166;$$

В седьмой строке таблицы рассчитываем $\cos(2\pi 5t/12) = \cos(\pi 5t/6)$, тогда

$$a_5 = (2/12) * (3,4 * (-0,866) + 4,5 * (0,5) + \dots + 3,6 * 1) = 0,0847;$$

Поскольку N – чётное число, то используем формулу (7) для расчёта a_6 ($q=6$) получим.

$$a_6 = 1/12 (3,4 * (-1)^1 + 4,5 * (-1)^2 + \dots + 3,6 * (-1)^{12}) = -0,3$$

Для вычисления коэффициента b_1 по формуле (5) в восьмой строке рассчитаем $\sin 2\pi 1t/12 = \sin(\pi t/6)$ для частоты $f_1=1/12$, тогда

$$b_1 = (2/12) * (3,4 * (0,5) + 4,5 * (0,866) + \dots + 3,6 * 0) = -3,8166;$$

В девятой строке таблицы рассчитаем $\sin(2\pi t/12) = \sin(\pi t/3)$, тогда

$$b_2 = (2/12) * (3,4 * (0,866) + 4,5 * (0,866) + \dots + 3,6 * 0) = 0,1732;$$

В десятой строке таблицы рассчитаем $\sin(2\pi 3t/12) = \sin(\pi t/2)$, тогда

$$b_3 = (2/12) * (3,4 * (1) + 4,5 * (0) + \dots + 3,6 * 0) = 0,5;$$

В одиннадцатой строке таблицы рассчитаем $\sin(2\pi 4t/12) = \sin(2\pi t/3)$, тогда

$$b_4 = (2/12) * (3,4 * (0,866) + 4,5 * (-0,866) + \dots + 3,6 * 0) = -0,5196$$

В двенадцатой строке таблицы рассчитаем $\sin(2\pi 5t/12) = \sin(\pi 5t/6)$, тогда

$$b_5 = (2/12) * (3,4 * (0,5) + 4,5 * (-0,866) + \dots + 3,6 * 0) = -0,5834$$

Поскольку N – чётное, используем формулу (8) для расчёта b_6 ($i=q=6$) получим $b_6=0$.

Для $i=1 \dots (q-1)$ вычислим значения периодограммы $I(f_i)$ по формуле (6)

$$I(f_1) = (12/2) * ((-5,2846)^2 + (-3,8166)^2) = 254,9620;$$

$$I(f_2) = (12/2) * ((0,0500)^2 + (0,1732)^2) = 0,1950;$$

$$I(f_3) = (12/2) * ((0,1000)^2 + (0,5000)^2) = 1,5601;$$

$$I(f_4) = (12/2) * ((-0,5166)^2 + (-0,5196)^2) = 3,2215;$$

$$I(f_5) = (12/2) * ((0,0847)^2 + (-0,5834)^2) = 2,0852.$$

Значение периодограммы $I(f_6)$ (для $i=q=6$) определяем по формуле (9)

$$I(f_6) = 12 * (-0,3)^2 = 1,0800.$$

Построим графики периодограммы, на первом из которых ось OX – частота Фурье f_i , а на втором ось OX – период, рассчитанный как величина обратная f_i . В обоих графиках OY - значение периодограммы $I(f_i)$ (таблица 2), (рисунок 3-4).

Вывод по примеру:

В заданном временном ряду основной периодической составляющей является функция $y_t = 9,466667 - 5,2846 \cos(\pi t/6) - 3,8166 \sin(\pi t/6)$ (рисунок 5) на частоте $f_i = 1/12 = 0,083333$, поскольку данная величина частоты соответствует максимальному значению периодограммы $I(f_i) = 254,9620$. Значение периодограммы, в свою очередь, обусловлено максимальными по модулю значениями коэффициентов регрессии a_1 и b_1 , свидетельствующих о корреляции функций синусов и косинусов (независимых переменных x_{ts} и x_{tc}) с наблюдаемыми данными y_t .

Таблица 1 - Набор среднемесячных температур

	t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
i	yt	3,4	4,5	4,3	8,7	13,3	13,8	16,1	15,5	14,1	8,9	7,4	3,6
1	$\text{Cos}(2\pi 1t/12)$	0,866	0,500	0,000	-0,500	-0,866	-1,000	-0,866	-0,500	0,000	0,500	0,866	1,000
2	$\text{Cos}(2\pi 2t/12)$	0,500	-0,500	-1,000	-0,500	0,500	1,000	0,500	-0,500	-1,000	-0,500	0,500	1,000
3	$\text{Cos}(2\pi 3t/12)$	0,000	-1,000	0,000	1,000	0,000	-1,000	0,000	1,000	0,000	-1,000	0,000	1,000
4	$\text{Cos}(2\pi 4t/12)$	-0,500	-0,500	1,000	-0,500	-0,500	1,000	-0,500	-0,500	1,000	-0,500	-0,500	1,000
5	$\text{Cos}(2\pi 5t/12)$	-0,866	0,500	0,000	-0,500	0,866	-1,000	0,866	-0,500	0,000	0,500	-0,866	1,000
1	$\text{Sin}(2\pi 1t/12)$	0,500	0,866	1,000	0,866	0,500	0,000	-0,500	-0,866	-1,000	-0,866	-0,500	0,000
2	$\text{Sin}(2\pi 2t/12)$	0,866	0,866	0,000	-0,866	-0,866	0,000	0,866	0,866	0,000	-0,866	-0,866	0,000
3	$\text{Sin}(2\pi 3t/12)$	1,000	0,000	-1,000	0,000	1,000	0,000	-1,000	0,000	1,000	0,000	-1,000	0,000
4	$\text{Sin}(2\pi 4t/12)$	0,866	-0,866	0,000	0,866	-0,866	0,000	0,866	-0,866	0,000	0,866	-0,866	0,000
5	$\text{Sin}(2\pi 5t/12)$	0,500	-0,866	1,000	-0,866	0,500	0,000	-0,500	0,866	-1,000	0,866	-0,500	0,000

Таблица 2 - Значения коэффициентов и периодограммы

i	ai	bi	I(fi)	Частота, fi	Период, T=1/fi
1	-5,2846	-3,8166	254,9620	0,083333	12
2	0,0500	0,1732	0,1950	0,166667	6
3	0,1000	0,5000	1,5601	0,25	4
4	-0,5166	-0,5196	3,2215	0,333333	3
5	0,0847	-0,5834	2,0852	0,416667	2,4
6	-0,3000	0,0000	1,0800	0,5	2

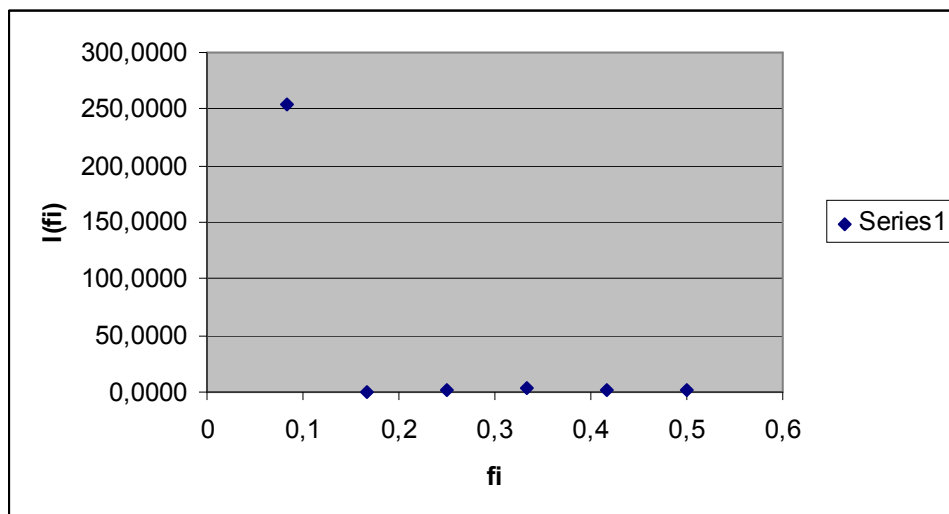


Рисунок 3 – Периодограмма: зависимость интенсивности от частоты

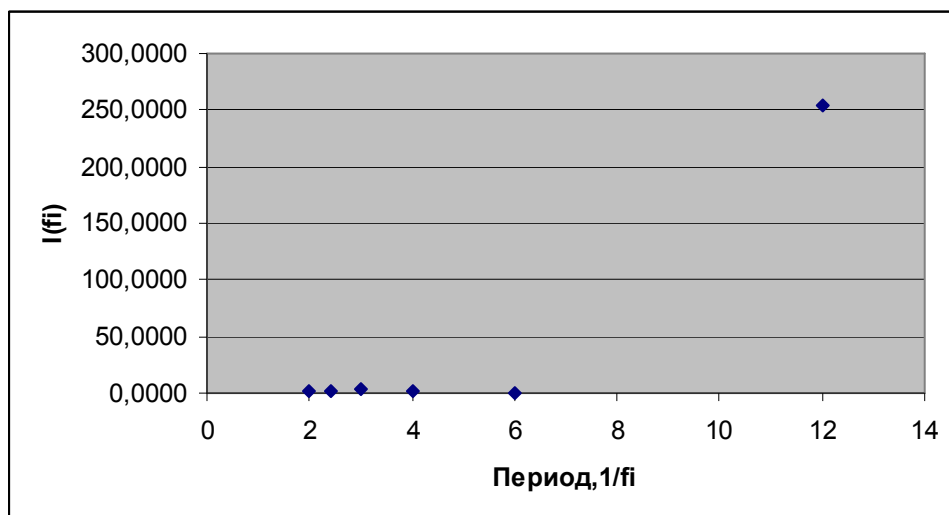


Рисунок 4 – Периодограмма: зависимость интенсивности от периода

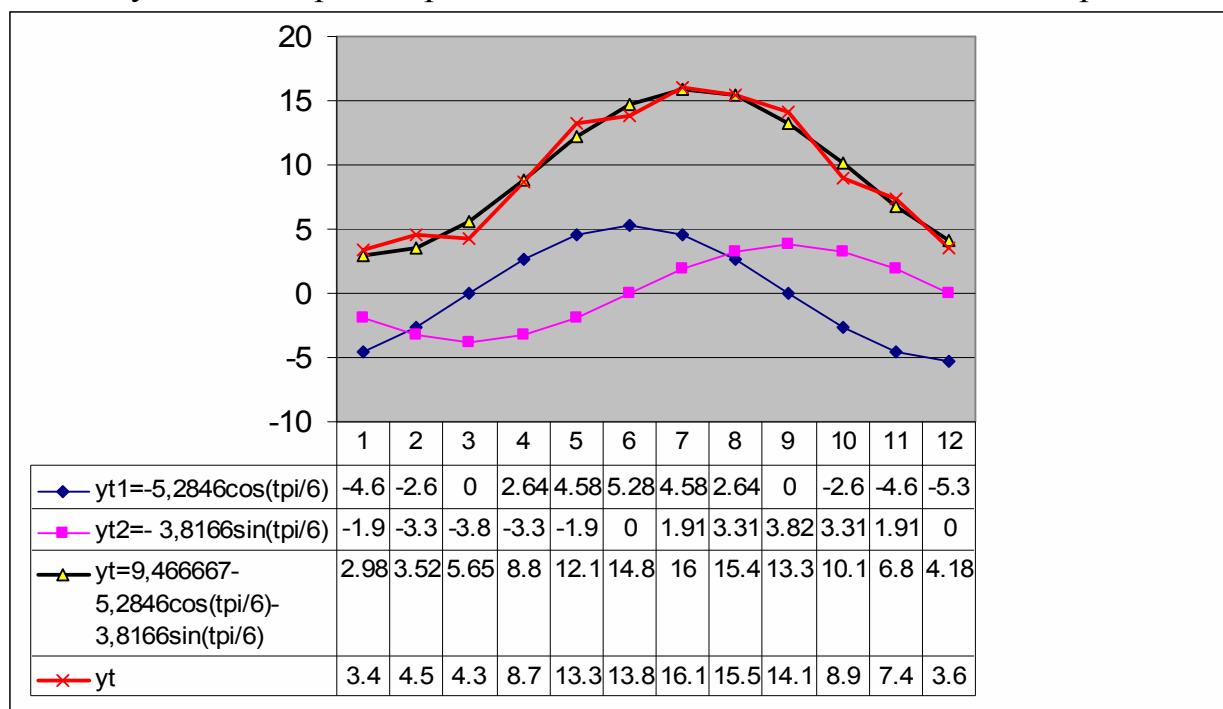


Рисунок 5 - Динамика среднемесячных температур

4. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ РАСЧЁТНО-ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

Дан временной ряд из 5 наблюдений (y_t) среднегодовых оценок студентов отдельного ВУЗа в баллах по 50 бальной шкале (таблица 6). Согласно варианту:

1. Рассчитать оценки функций косинуса и синуса частот f_i в моменты времени $t=1 \dots 5$ и оценить коэффициенты a_0 , a_i и b_i функции Фурье.
2. Рассчитать частоты Фурье f_i , периоды T_i , значения периодограммы $I(f_i)$.
3. Построить график периодограммы, сделать вывод об основных периодических составляющих и их частотах.
4. Составить прогноз уровня временного ряда для $t=6$

Таблица 6 – Временной ряд среднегодовых оценок

Период, t Вариант Yt	1	2	3	4	5
1	34	45	43	87	13
2	34	45	39	38	15
3	43	7	13	45	17
4	40	45	50	34	45
5	45	39	45	38	43
6	8	13	45	39	40
7	45	8	8	13	34
8	40	45	39	38	43
9	40	45	8	13	10
10	8	13	40	45	45
11	39	38	5	45	29
12	45	43	45	7	17
13	34	7	13	38	43
14	40	45	5	36	9
15	8	13	5	43	8
16	23	38	40	45	35
17	45	39	34	6	12
18	33	34	45	49	43
19	34	5	8	13	10
20	40	23	34	33	12
21	6	45	39	34	45
22	45	39	9	45	39
23	18	13	8	13	23
24	39	38	13	40	2
25	45	49	38	43	9
26	10	1	43	11	43

5. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА О ПРАКТИЧЕСКОМ ЗАНЯТИИ

- 1) Название и цель работы.
- 2) Условия индивидуальных заданий.
- 3) Ход решения индивидуальных заданий.
- 3) Выводы

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бокс Дж. Анализ временных рядов. Прогноз и управление / Дж. Бокс, Г. Дженкинс. М.: Мир, 1972. – 406с.
2. Магнус Я. Р. Эконометрика. Начальный курс / Я. Р. Магнус, П. К. Катышев, А. А. Пересецкий. – М.: Дело, 1997. – 246с.
3. Доугерти К. Введение в эконометрику / К. Доугерти – М.: ИНФРА-М, 1997. – 401с.
4. Елисеева И. И. Эконометрика: учебное пособие /И. И. Елисеева, С. В. Курышева Д. М. Гордиенко и др. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 400с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А (справочное)

Таблица Брадиса: тригонометрические функции от аргумента в радианах

Таблица А.1 - Таблица Брадиса

X	sin x	cos x	tg x	X	sin x	cos x	tg x	X	sin x	cos x	tg x
0,00	0,0000	1,0000	0,0000	1,05	0,8674	0,4976	1,7433	2,10	0,8632	-0,5048	-1,7098
0,01	0100	1,0000	0100	1,06	8724	4889	7844	2,11	8581	5135	6713
0,02	0200	0,9998	0200	1,07	8772	4801	8270	2,12	8529	5220	6340
0,03	0300	9996	0300	1,08	8820	4713	8712	2,13	8477	5305	5979
0,04	0400	9992	0400	1,09	8866	4625	9171	2,14	8423	5390	5629
0,05	0,0500	0,9988	0,0500	1,10	0,8912	0,4536	1,9648	2,15	0,8369	-0,5474	-1,5290
0,06	0600	9982	0601	1,11	8957	4447	2,0143	2,16	8314	5557	4961
0,07	0699	9976	0701	1,12	9001	4357	0660	2,17	8258	5640	4642
0,08	0799	9968	0802	1,13	9044	4267	1198	2,18	8201	5722	4332
0,09	0899	9960	0902	1,14	9086	4176	1759	2,19	8143	5804	4031
0,10	0,0998	0,9950	0,1003	1,15	0,9128	0,4085	2,2345	2,20	0,8085	-0,5885	-1,3738
0,11	1098	9940	1105	1,16	9168	3993	2958	2,21	8026	5966	3453
0,12	1197	9928	1205	1,17	9208	3902	3600	2,22	7966	6046	3176
0,13	1296	9916	1307	1,18	9246	3809	4273	2,23	7905	6125	2906
0,14	1395	9902	1409	1,19	9284	3717	4979	2,24	7843	6204	2643
0,15	0,1494	0,9888	0,1511	1,20	0,932	0,3624	2,572	2,25	0,7781	-0,6282	-1,2386
0,16	1593	9872	1614	1,21	9356	3530	650	2,26	7717	6359	2136
0,17	1692	9856	1717	1,22	9391	3436	733	2,27	7654	6436	1892
0,18	1790	9838	1820	1,23	9425	3342	820	2,28	7589	6512	1653
0,19	1889	9820	1923	1,24	9458	3248	912	2,29	7523	6588	1420
0,20	0,1987	0,9801	0,2027	1,25	0,9490	0,3153	3,010	2,30	0,7457	-0,6663	-1,1192
0,21	2085	9780	2131	1,26	9521	3058	113	2,31	7390	6737	0969
0,22	2182	9759	2236	1,27	9551	2963	224	2,32	7322	6811	0751
0,23	2280	9737	2341	1,28	9580	2867	341	2,33	7254	6883	0538
0,24	2377	9713	2447	1,29	9608	2771	467	2,34	7185	6956	0329
0,25	0,2474	0,9689	0,2553	1,30	0,9636	0,2675	3,602	2,35	0,7115	-0,7027	-1,0125
0,26	2571	9664	2660	1,31	9662	2579	747	2,36	7044	7098	-0,9924
0,27	2667	9638	2768	1,32	9687	2482	903	2,37	6973	7168	9728
0,28	2764	9611	2875	1,33	9711	2385	4,072	2,38	6901	7237	9535
0,29	2860	9582	2984	1,34	9735	2288	256	2,39	6828	7306	9346
0,30	0,2955	0,9553	0,3093	1,35	0,9757	0,2190	4,455	2,40	0,6755	-0,7374	-0,9160
0,31	3051	9523	3203	1,36	9779	2092	673	2,41	6681	7441	8978
0,32	3146	9492	3314	1,37	9799	1994	913	2,42	6606	7508	8799
0,33	3240	9460	3425	1,38	9819	1896	5,177	2,43	6530	7573	8623



Продолжение таблицы А.1

0,34	3335	9428	3537	1,39	9837	1798	471	2,44	6454	7638	8450
0,35	0,3429	0,9394	0,3650	1,40	0,9854	0,1700	5,798	2,45	0,6378	-0,7702	-0,8280
0,36	3523	9359	3764	1,41	9871	1601	6,165	2,46	6300	7766	8113
0,37	3616	9323	3879	1,42	9887	1502	6,581	2,47	6222	7828	7949
0,38	3709	9287	3994	1,43	9901	1403	7,055	2,48	6144	7890	7787
0,39	3802	9249	4111	1,44	9915	1304	7,602	2,49	6065	7951	7637
0,40	0,3894	0,9211	0,4228	1,45	0,9927	0,1205	8,238	2,50	0,5985	-0,8011	-0,7470
0,41	3986	9171	4346	1,46	9939	1106	8,989	2,51	5904	8071	7316
0,42	4078	9131	4466	1,47	9949	1006	9,887	2,52	5823	8130	7163
0,43	4169	9090	4586	1,48	9959	0907	10,983	2,53	5742	8187	7013
0,44	4259	9048	4708	1,49	9967	0807	12,35	2,54	5660	8244	6865
0,45	0,4350	0,9004	0,4831	1,50	0,9975	0,0707	14,10	2,55	0,5577	-0,8301	-0,6719
0,46	4439	8961	4954	1,51	3982	0608	16,13	2,56	5494	8356	6574
0,47	4529	8916	5080	1,52	9987	0508	19,67	2,57	5410	8410	6432
0,48	4618	8870	5206	1,53	9992	0408	24,50	2,58	5325	8464	6292
0,49	4706	8823	5334	1,54	9995	0308	32,46	2,59	5240	8517	6153
0,50	0,4794	0,8776	0,5463	1,55	0,9998	0,0208	48,08	2,60	0,5155	-0,8569	-0,6016
0,51	4882	8727	5594	1,56	0,9999	0,0108	92,62	2,61	5069	8620	5881
0,52	4969	8678	5726	1,57	1,0000	0,0008	1256	2,62	4983	8670	5747
0,53	5055	8628	5859	1,58	1,0000	-0,0092	-108,6	2,63	4896	8720	5615
0,54	5141	8577	5994	1,59	0,9998	-0,0192	-52,07	2,64	4808	8768	5484
0,55	0,5227	0,8525	0,6131	1,60	0,9096	-0,0292	-34,233	2,65	0,4720	-0,8816	-0,5354
0,56	5312	8473	6269	1,61	9992	0392	-25,495	2,66	4632	8863	5226
0,57	5396	8419	6410	1,62	9988	0492	-20,307	2,67	4543	8908	5100
0,58	5480	8365	6552	1,63	9982	0592	-16,871	2,68	4454	8953	4974
0,59	5564	8309	6696	1,64	9976	0691	-14,427	2,69	4364	8998	4850
0,60	0,5646	0,8253	0,6841	1,65	0,9969	-0,0791	-12,599	2,70	0,4274	-0,9041	-0,4727
0,61	5729	8196	6989	1,66	9960	0891	-11,181	2,71	4183	9083	4506
0,62	5810	8139	7139	1,67	9951	0990	-10,047	2,72	4092	9124	4485
0,63	5891	8080	7291	1,68	9940	1090	-9,1208	2,73	4001	9165	4365
0,64	5972	8021	7445	1,69	6929	1189	-8,3492	2,74	3909	9204	4247
0,65	0,6052	0,7961	0,7602	1,70	0,9917	-0,1288	-7,6966	2,75	0,3817	-0,9243	-0,4129
0,66	6131	7900	7761	1,71	9903	1388	-7,1373	2,76	3724	9281	4913
0,67	6210	7838	7923	1,72	9889	1486	-6,6524	2,77	3631	9318	3897
0,68	6288	7776	8087	1,73	9874	1585	-6,2281	2,78	3538	9353	3782
0,69	6365	7712	8253	1,74	9857	1684	-5,8535	2,79	3444	9388	3668
0,70	0,6442	0,7648	0,8423	1,75	0,9840	-0,1782	-5,5204	2,80	0,335	-0,9422	-0,3555

Продолжение таблицы А.1

0,71	6518	7584	8595	1,76	9822	1881	-5,2221	2,81	3256	9455	3443
0,72	6594	7518	8771	1,77	9802	1979	-4,9534	2,82	3161	9487	3332
0,73	6669	7452	8949	1,78	9782	2077	-4,7101	2,83	3066	9519	3221
0,74	6743	7385	9131	1,79	9761	2175	-4,4887	2,84	2970	9549	3111
0,75	0,6816	0,7317	0,9316	1,80	0,9738	-0,2272	-4,2863	2,85	0,2875	-0,9578	-0,3001
0,76	6889	7248	9505	1,81	9715	2369	-4,1005	2,86	2779	9606	2893
0,77	6961	7179	9697	1,82	9691	2466	-3,9294	2,87	2683	9633	2785
0,78	7033	7109	0,9883	1,83	9666	2563	-3,7712	2,88	2586	9660	2677
0,79	7104	7038	1,0092	1,84	9640	2660	-3,6245	2,89	2489	9685	2570
0,80	0,7174	0,6967	1,0296	1,85	0,9613	-0,2756	-3,4881	2,90	0,2392	-0,971	-0,2464
0,81	7243	6895	0505	1,86	9585	2852	-3,3608	2,91	2295	9733	2358
0,82	7311	6822	0717	1,87	9556	2948	-3,2419	2,92	2198	9755	2253
0,83	7379	6749	0934	1,88	9526	3043	-3,1304	2,93	2100	9777	2148
0,84	7446	6675	1156	1,89	9495	3138	-3,0257	2,94	2002	9797	2044
0,85	0,7513	0,6600	1,1383	1,90	0,9463	-0,3233	-2,9271	2,95	0,1904	-0,9817	-0,1940
0,86	7578	6524	1616	1,91	9430	3327	8341	2,96	1806	9836	1836
0,87	7643	6448	1853	1,92	9396	3421	7463	2,97	1708	9853	1733
0,88	7707	6372	2097	1,93	9362	3515	6632	2,98	1609	9870	1630
0,89	7771	6294	2346	1,94	9326	3609	5843	2,99	1510	9885	1528
0,90	0,7833	0,6216	1,2602	1,95	0,9290	-0,3702	-2,5095	3,00	0,1411	-0,9900	-0,1425
0,91	7895	6137	2864	1,96	9252	3795	4383	3,01	1312	9914	1324
0,92	7956	6058	3133	1,97	9214	3887	3705	3,02	1213	9926	1222
0,93	8016	5978	3409	1,98	9174	3979	3058	3,03	1114	9938	1121
0,94	8076	5898	3692	1,99	9134	4070	2441	3,04	1014	9948	1019
0,95	0,8134	0,5817	1,3984	2,00	0,9093	-0,4161	-2,185	3,05	0,0915	-0,9958	-0,0918
0,96	8192	5735	4284	2,01	9051	4252	1285	3,06	0815	9967	0818
0,97	8249	5653	4592	2,02	9008	4342	0744	3,07	0715	9974	0717
0,98	8305	5570	4910	2,03	8964	4432	0224	3,08	0616	9981	0617
0,99	8360	5487	5237	2,04	8919	4522	-1,9725	3,09	0516	9987	0516
1,00	0,8415	0,5403	1,5574	2,05	0,8874	-0,4611	-1,9246	3,10	0,0416	-0,9991	-0,0416
1,01	8468	5319	5922	2,06	8827	4699	8784	3,11	0316	9995	0316
1,02	8521	5234	6281	2,07	8780	4787	8340	3,12	0216	9998	0216
1,03	8573	5148	6652	2,08	8731	4875	7911	3,13	0116	9999	0116
1,04	8624	5062	7036	2,09	8682	4962	7498	3,14	0016	-1,0000	0016
1,05	8674	4976	7433	2,10	0,8632	-0,5048	-1,7098	3,15	-0,0084	-1,0000	+0,0084
X	sin x	cos x	tg x	X	sin x	cos x	tg x	X	sin x	cos x	tg x