

Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный технический университет



МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическому занятию «СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ»

по дисциплинам «Исследование операций», «Экономико-математические методы»

для студентов специальностей:
7.050201 – «Менеджмент организаций»,
7.050107 – «Экономика предприятия»

всех форм обучения

Севастополь
2006



УДК 519.872

Методические указания к практическому занятию «Системы массового обслуживания» по дисциплинам «Исследование операций», «Экономико-математические методы» для студентов специальностей: 7.050201 – «Менеджмент организаций», 7.050107 – «Экономика предприятия» всех форм обучения / Сост. Н.А. Русина, А.А. Загоруйко. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2006г. – 16с.

Методические указания подготовлены с целью оказания помощи студентам для подготовки к практическим занятиям. Методические указания предназначены для студентов экономических специальностей всех форм обучения.

Методические указания утверждены на заседании кафедры менеджмента и экономико-математических методов, (протокол № 9 от «11» апреля 2006г.)

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний

Рецензент: Ряский А.В., к.т.н., доцент кафедры «Экономика и маркетинг»

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цель работы.....	4
2. Теоретическая часть.....	4
2.1. Общее понятие систем массового обслуживания.....	4
2.2. Системы массового обслуживания с отказами.....	5
2.3. Системы массового обслуживания с ожиданием.....	7
3. Индивидуальные задания.....	11
4. Содержание отчета.....	19
5. Контрольные вопросы.....	19
Библиографический список.....	20

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Закрепление теоретических знаний и получение практических навыков при анализе систем массового обслуживания.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

2.1. Общее понятие систем массового обслуживания

В производственной деятельности и повседневной жизни часто возникают такие ситуации, когда появляется необходимость в обслуживании требований или заявок, поступающих в систему. Иногда системы обслуживания обладают ограниченными возможностями для удовлетворения спроса, и это приводит к образованию очередей. Примерами подобных явлений могут быть очереди в магазинах, билетных кассах, скопление самолетов над аэродромами [1].

Задачами теории массового обслуживания являются анализ и исследование явлений, возникающих в системах обслуживания. Одна из основных задач теории заключается в определении таких характеристик системы, которые обеспечивают заданное количество функционирования, например, минимум времени ожидания, минимум средней длины очереди и т.д. Общей особенностью задач, связанных с массовым обслуживанием является случайный характер исследуемых явлений. Количество требований на обслуживание, временные интервалы между их поступлениями и длительность обслуживания случайны. Поэтому основным аппаратом описания систем обслуживания оказывается аппарат теории случайных процессов, в частности марковских [3].

Всякой системе массового обслуживания характерна структура, которая определяется составом элементов и функциональными связями. Основные элементы системы следующие: входящий поток требований, каналы обслуживания, очередь требований и выходящий поток требований.

В настоящее время теоретически наиболее разработаны и удобны в практических приложениях методы решения таких задач массового обслуживания, в которых входящий поток требований является простейшим (пуассоновским).

Простейший поток обладает тремя основными свойствами: ординарности, стационарности и отсутствием последействия.

Ординарность потока означает практическую невозможность одновременного поступления двух и более требований. Например, достаточно малой является вероятность того, что из группы станков, обслуживаемых бригадой ремонтников, одновременно выйдут из строя сразу несколько станков.

Стационарным называется поток, для которого математическое ожидание числа требований, поступающих в систему в единицу времени (обозначим λ), не меняется во времени. Таким образом, вероятность поступления в систему определенного количества требований в течение заданного промежутка времени Δt зависит от его величины и не зависит от начала его отсчета на оси времени.

Отсутствие последствия означает, что число требований, поступивших в систему до момента t , не определяет того, сколько требований поступит в систему за промежуток времени от t до $t + \Delta t$.

Например, если на ткацком станке в данный момент произошел обрыв нити и он устранен ткачихой, то это не определяет, произойдет новый обрыв на данном станке в следующий момент или нет, тем более это не влияет на вероятность возникновения обрыва на других станках.

Каждой из систем массового обслуживания свойственна определенная организация. По составу системы обслуживания бывают одноканальные и многоканальные. Многоканальные системы могут состоять из приборов как одинаковой, так и разной производительности [2].

Другой признак классификации время пребывания требований в системе до начала обслуживания. По этому признаку все системы можно делить на три группы: системы с неограниченным временем ожидания, системы с отказами (с потерями) и системы смешанного типа.

2.2. Системы массового обслуживания с отказами

Имеется n каналов, на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ . Поток обслуживаний имеет интенсивность μ и время обслуживания одной заявки $t_{\text{обсл}}$. Найти предельные состояния системы и показатели её эффективности.

Система S имеет следующие состояния (нумеруем их по числу заявок, находящихся в системе): $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n$, где S_n - состояние системы, когда в ней находятся n заявок [4].

Для расчета такой системы используются следующие показатели:

- интенсивность обслуживания (производительность):

$$\mu = 1 / t_{\text{обсл}} \quad (1)$$

- интенсивность нагрузки канала:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad (2)$$

- вероятность нахождения системы в состоянии S_0 (свободном):

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} \right)^{-1} \quad (3)$$

- вероятность нахождения системы в других состояниях:

$$p_1 = \rho p_0, \quad p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0, \quad \dots, \quad p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0 \quad (4)$$

- вероятность отказа СМО:

$$P_{отк} = \frac{\rho^n}{n!} p_0 \quad (5)$$

- относительная пропускная способность:

$$Q = 1 - P_{отк} \quad (6)$$

- абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda Q \quad (7)$$

- среднее число занятых каналов:

$$\bar{K} = \frac{A}{\mu} \quad (8)$$

Рассмотрим пример решения задачи многоканальной СМО с отказами.

Задача № 1. В вычислительный центр коллективного пользования с тремя ЭВМ поступают заказы от предприятий на вычислительные работы. Если работают все три ЭВМ, то вновь поступающий заказ не принимается, и предприятие вынуждено обратиться в другой вычислительный центр.

Среднее время работы с одним заказом составляет 3 часа. Интенсивность потока заявок 0,25 (заявок/час). Найти предельные вероятности состояний и показатели эффективности работы вычислительного центра.

Решение. По условию $n=3$, $\lambda=0,25$ (заявок/час), $t_{\text{обсл}} = 3$ (ч). Определим интенсивность потока обслуживаний:

$$\mu = 1/t_{\text{обсл}} = 1/3 = 0,33 \text{ (заявок/час)}$$

Вычислим интенсивность нагрузки ЭВМ по формуле (2):

$$\rho = 0,25 / 0,33 = 0,75$$

Найдем предельные вероятности состояний:

- вероятность нахождения системы в свободном состоянии определяется по формуле (3):

$$P_0 = (1 + 0,75 + 0,75^2/2! + 0,75^3/3!)^{-1} = 0,476$$

По формуле (4) определим вероятности нахождения системы в других состояниях.

- вероятность того, что занята только одна ЭВМ:

$$P_1 = 0,75 \cdot 0,476 = 0,357$$

- вероятность того, что заняты 2 ЭВМ:

$$P_2 = (0,75^2/2!) \cdot 0,476 = 0,134$$

- вероятность того, что все 3 ЭВМ заняты, т.е. вероятность отказа:

$$P_3 = (0,75^3/3!) \cdot 0,476 = 0,033$$

Таким образом можно сделать вывод о том, что в стационарном режиме работы вычислительно центра в среднем 47,6 % времени нет ни одной заявки, 35,7% - имеется одна заявка (занята одна ЭВМ), 13,4 %- две заявки (две ЭВМ), 3,3 % времени – три заявки (заняты три ЭВМ).

Вероятность отказа (когда заняты все три ЭВМ), таким образом, $P_{\text{отк}} = P_3 = 0,033$.

По формуле (6) определяется относительная пропускная способность центра:

$$Q = 1 - 0,033 = 0,967$$

Т.е. в среднем из каждых 100 заявок вычислительный центр обслуживает 96,7 заявок.

По формуле (7) вычисляется абсолютная пропускная способность центра:

$$A = 0,25 \cdot 0,967 = 0,242$$

В один час в среднем обслуживается 0,242 заявки.

По формуле (8) рассчитывается среднее число занятых ЭВМ:

$$\bar{K} = 0,242 / 0,33 = 0,725$$

Каждая из трех ЭВМ будет занята обслуживанием заявок в среднем лишь на $72,5\% = 24,2\%$.

При оценке эффективности работы вычислительного центра необходимо сопоставить доходы от выполнения заявок с потерями от простоя дорогостоящих ЭВМ (с одной стороны, у нас высокая пропускная способность СМО, а с другой стороны – значительный простой каналов обслуживания) и выбрать компромиссное решение.

2.3. Системы массового обслуживания с ожиданием

Имеется n -канальная СМО с неограниченной очередью. Она характеризуется следующими показателями [5]:

- предельные вероятности:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \right)^{-1} \quad (9)$$

$$p_1 = \rho p_0, \quad p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0, \quad \dots, \quad p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0, \quad p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n * n!} p_0 \quad (10)$$

- вероятность того, что заявка окажется в очереди:

$$P_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} p_0 \quad (11)$$

- среднее число занятых каналов:

$$\bar{K} = \rho \quad (12)$$

- среднее число заявок в очереди:

$$L_{оч} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n * n! \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2} \quad (13)$$

- среднее время нахождения в очереди:

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda} \quad (14)$$

- среднее число заявок в системе:

$$L_{сист} = L_{оч} + \rho \quad (15)$$

- среднее время нахождения заявки в очереди:

$$T_{сист} = \frac{L_{сист}}{\lambda} \quad (16)$$

Рассмотрим пример решения задачи многоканальной СМО с ожиданием.

Задача №2. В универсаме к узлу расчета поступает поток покупателей с интенсивностью 81 человек в час. Средняя продолжительность обслуживания контролером-кассиром одного покупателя $t_{обсл} = 2$ мин. Определить предельные вероятности состояний и характеристики обслуживания узла расчета.

Решение. По условию $\lambda = 81(\text{чел./час}) = 81/60 = 1,35$ (чел./мин.). По формулам (1, 2):

$$\rho = \lambda / \mu = \lambda * t_{обсл} = 1,35 * 2 = 2,7$$

Очередь не будет возрастать до бесконечности при условии $\rho / n < 1$, т.е. при $n > \rho = 2,7$. Таким образом, минимальное количество контролеров-кассиров $n_{\min} = 3$.

Найдем характеристики обслуживания СМО при $n=3$.

Вероятность того, что в узле расчета отсутствуют покупатели, по формуле (9):

$$p_0 = (1 + 2,7 + 2,7^2 / 2! + 2,7^3 / 3! + 2,7^4 / 3!(3 - 2,7))^{-1} = 0,025$$

В среднем 2,5 % времени контролеры-кассиры будут простаивать.

Вероятность того, что в узле расчета будет очередь, определим по формуле (11):

$$P_{оч.} = (2,7^4 / 3!(3-2,7))0,025 = 0,735$$

Среднее число покупателей, находящихся в очереди рассчитывается по формуле (13):

$$L_{оч.} = (2,7^4 / (3*3!(1-2,7/3)^2)) * 0,025 = 7,35 \text{ (чел.)}$$

Среднее время ожидания в очереди вычисляется по формуле (14):

$$T_{оч.} = 7,35 / 1,35 = 5,44 \text{ (мин.)}$$

Определим среднее число покупателей в узле расчета по формуле (15):

$$L_{сис.} = 7,35 + 2,7 = 10,05 \text{ (чел.)}$$

Среднее время нахождения покупателей в узле расчета находится по формуле (16):

$$T_{сис.} = 10,05 / 1,35 = 7,44 \text{ (мин.)}$$

Среднее число кассиров, занятых обслуживанием покупателей, по формуле (12) $\bar{k} = 2,7$.

Коэффициент (доля) занятых обслуживанием контролеров-кассиров вычисляется по следующей формуле:

$$\bar{k} = p/n \quad (17)$$

$$\bar{k} = 2,7/3 = 0,9$$

Абсолютная пропускная способность узла расчета $A = 1,35$ (чел./мин), или 81 (чел./час), т.е. 81 покупатель в час. Анализ характеристик обслуживания свидетельствует о значительной перегрузке узла расчета при наличии трех контролеров – кассиров.

3. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

В качестве индивидуального задания студенту необходимо самостоятельно решить задачу в соответствии с выбранным вариантом.

Выбор варианта для выполнения индивидуального задания осуществляется при помощи таблицы 1.

Таблица 1 – Выбор варианта для индивидуального задания

Студенты, фамилия которых начинается с буквы	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	К	Л	М	Н	О
Номер варианта задач для нечётной последней цифры зач.кн.	1	8	2	11	3	7	10	3	5	6	2	8	9	10
Номер варианта задач для чётной последней цифры зач.кн.	4	1	3	10	6	2	5	11	9	8	7	4	6	9
Студенты, фамилия которых начинается с буквы	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Э	Ю	Я
Номер варианта задач для нечётной последней цифры зач.кн.	10	9	8	7	6	5	3	4	7	11	3	1	2	8
Номер варианта задач для чётной последней цифры зач.кн.	11	2	4	1	6	9	7	4	10	5	5	3	1	11

Задания по вариантам представлены ниже.

Вариант №1

На АЗС имеются две колонки ($n=2$) для заправки автомобилей. Автомобили подъезжают на АЗС в соответствии с пуассоновским распределением со средней частотой 2 автомобиля за 5 минут ($\lambda=2/5$ (авт./мин)). Заправка автомобиля в среднем длится 3 минуты ($t_{\text{обсл}}=3$ мин.), продолжительность заправки распределена по экспоненциальному закону. Требуется определить: 1) вероятность того, что у АЗС не окажется ни одного автомобиля; 2) вероятность того, что обе колонки будут заняты; 3) среднюю длину очереди в ожидании заправки; 4) среднее время ожидания автомобиля в очереди.

Вариант №2

Анализируется работа междугородного переговорного пункта в небольшом городке. Пункт имеет 3 телефонных аппарата для переговоров

($n=3$). В среднем за сутки поступает 240 заявок на переговоры ($\lambda=240$ (заявка/сутки)). Средняя продолжительность переговоров (с учетом вызова абонентов в другом городе) составляет 5 минут ($t_{\text{обсл}}=5$ мин.). Никаких ограничений на длину очереди нет. Поток заявок и обслуживаний - простейшие. Определить предельные вероятности состояний и характеристики обслуживания переговорного пункта в стационарном режиме.

Вариант №3

Рассматривается круглосуточная работа пункта проведения профилактического осмотра автомашин с четырьмя каналами (четыре группы проведения осмотра, $n=4$). На осмотр и выявление дефектов каждой машины затрачивается в среднем 30 минут ($t_{\text{обсл}}=30$ мин.). На осмотр поступает в среднем 36 машин в сутки ($\lambda=36$ (машина/сутки)). Поток заявок и обслуживаний - простейшие. Если машина, прибывшая в пункт осмотра, не застает ни одного канала свободным, она покидает пункт осмотра необслуженной. Определить вероятности состояний и характеристики обслуживания профилактического пункта осмотра.

Вариант №4

В вычислительный центр коллективного пользования с тремя ЭВМ ($n=3$) поступают заказы от предприятий на вычислительные работы. Если работают все 3 ЭВМ, то вновь поступающий заказ не принимается, и предприятие вынуждено обратиться в другой вычислительный центр. Среднее время работы с одним заказом составляет 2 часа ($t_{\text{обсл}}=2$ часа). Интенсивность потока заявок 0,2 заявок в час ($\lambda=0,2$ (заявка/час)). Найти предельные вероятности состояний и показатели эффективности работы вычислительного центра.

Вариант №5

В универсаме работает 3 кассира-контролёра ($n=3$). К узлу расчета поступает поток покупателей с интенсивностью $\lambda=81$ (человек/час). Средняя продолжительность обслуживания контролером кассиром одного покупателя равна 2 минуты ($t_{\text{обсл}}=2$ минуты). Определить показатели эффективности работы системы.

Вариант №6

В филиале банка «Таврика» города Севастополя постоянно работают три оператора ($n=3$). Если клиент заходит в банк, когда все операторы заняты, то он сразу уходит, не ожидая обслуживания. Среднее число клиентов, обращающихся в банк за 1 час, составляет 24 человека ($\lambda=24$

(человек/час)). Среднее время, затрачиваемое оператором на обслуживание одного клиента, составляет 5 минут ($t_{\text{обсл}}=5$ минут). Определить основные характеристики эффективности функционирования данного филиала банка.

Вариант №7

Для уничтожения обнаруживаемых целей противника выделено два подразделения ($n=2$). Поток заявок на уничтожение целей - простейший, с интенсивностью - $\lambda=0,5$ цели/час. Среднее время от момента начала открытия огня по цели до момента готовности подразделения к открытию огня по новой цели равно двум часам ($t_{\text{обсл}}=2$ часа). Определить эффективность системы, состоящей из двух подразделений, если огонь по цели должен быть открыт немедленно после ее обнаружения.

Вариант №8

Механическая мастерская завода с тремя постами ($n=3$) выполняет ремонт малой механизации. Поток неисправных механизмов, прибывающих в мастерскую, - пуассоновский и имеет интенсивность $\lambda=2,5$ механизма в сутки, среднее время ремонта одного механизма распределено по показательному закону и равно $t_{\text{обсл}}=0,5$ суток. Предположим, что другой мастерской на заводе нет, и, значит, очередь механизмов перед мастерской может расти практически неограниченно. Определить показатели эффективности системы.

Вариант №9

Пусть n -канальная СМО представляет собой вычислительный центр (ВЦ) с тремя ($n = 3$) взаимозаменяемыми ПЭВМ для решения поступающих задач. Поток задач, поступающих на ВЦ, имеет интенсивность $\lambda=1$ задаче в час. Средняя продолжительность обслуживания $t_{\text{обсл}}=1,8$ час. Поток заявок на решение задач и поток обслуживания этих заявок являются простейшими. Определить показатели эффективности системы.

Вариант №10

Ателье по ремонту аппаратуры имеет 5 опытных мастеров ($n = 5$). В среднем в течение рабочего дня от населения поступает в ремонт 10 аппаратов ($\lambda=10$ (аппарат/день)). Общее число аппаратов, находящихся в эксплуатации у населения очень велико, а выходят они из строя независимо друг от друга. Поэтому имеются основания считать поток

заявок пуассоновским. Пусть все мастера имеют одинаковую квалификацию и в среднем могут отремонтировать 2,5 аппарата в день каждый ($\mu=2,5$ (аппарат/день)). Определить показатели качества обслуживания в данном ателье.

Вариант №11

Требуется оценить работу АТС, которая имеет 5 линий связи ($n = 5$). Если все 5 линий связи заняты, то абонент выбывает из системы. Предполагаем, что поток простейший с интенсивностью $\lambda=2$ (вызов/мин.). Продолжительность разговоров распределена экспоненциально, причем $t_{\text{обсл}}=1$ минута. Определить показатели эффективности системы.

4. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

- 1) Цель работы;
- 2) постановка задачи;
- 3) решение задачи в соответствии с выбранным вариантом;
- 4) выводы по выполнению работы.

5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- 1) Что такое теория массового обслуживания?
- 2) Что включает в себя понятие система массового обслуживания?
- 3) Какие существуют виды систем массового обслуживания?
- 4) Что относится к основным характеристикам и показателям эффективности систем массового обслуживания?
- 5) Укажите основные свойства (характеристики) входящего потока требований?
- 6) Перечислите основные особенности и характеристики систем массового обслуживания с ожиданием?
- 7) Каковы основные характеристики СМО с отказами?
- 8) Приведите примеры различных видов СМО?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Афанасьев М.Ю. Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения / М.Ю. Афанасьев, Б.П. Суворов.- М.:ИНФРА, 2003.-444с.
2. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология/ Е.С. Вентцель.-М.: Высшая школа, 2001.-208с.
3. Зайченко Ю.П. Исследование операций/ Ю.П. Зайченко.- К.: Вища школа, 1975.-320с.
4. Конюховский П.В. Математические методы исследования операций / П.В. Конюховский.- СПб.: Питер, 2001.-192с.
5. Кремер Н.Ш. Исследование операций в экономике/ Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин.- М.:Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997.-407с.

Заказ № _____ от « _____ » _____ 200 ____ . Тираж _____ экз.
Изд-во СевНТУ