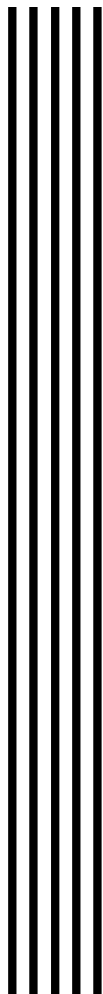




Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный технический университет



КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Методические указания и задания
для самостоятельной работы
по дисциплине «Высшая математика»
для студентов всех специальностей и форм обучения

Севастополь
2008

УДК 514.742.2

Комплексные числа. Метод. указания и задания для самостоятельной работы по дисциплине «Высшая математика» для студентов всех специальностей и форм обучения / Сост. Л.Н. Григорюк, Е.Г. Бойко. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2008. – 44 с.

Целью методических указаний является усвоение студентами основных теоретических сведений о комплексных числах и привитие практических навыков при решении инженерных задач.

В помощь студентам приведено решение типовых задач, предлагаемых для изучения темы «Комплексные числа».

В каждом задании по 30 вариантов задач.

Методические указания предназначены для студентов всех специальностей и форм обучения.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры «Высшая математика» 9 ноября 2007 г., протокол № 3.

Допущено учебно-методическим центром и научно-методическим советом СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: Агаханянц Р.Е., старший преподаватель кафедры высшей математики

СОДЕРЖАНИЕ

1. Образец выполнения контрольного задания по теме «Комплексные числа»	4
2. Задания для самостоятельной работы	24
3. Библиографический список	44

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ «КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА»

Комплексным числом называется упорядоченная пара $(x; y)$ действительных чисел.

Алгебраическая форма комплексного числа $(x; y)$ имеет вид

$$z = x + iy,$$

где x, y – действительные числа, i – мнимая единица, для которой $i \cdot i = i^2 = -1$. Число x называется действительной частью комплексного числа, обозначается $\operatorname{Re} z$, а y – мнимой частью и обозначается $\operatorname{Im} z$. На плоскости ось Ox называется действительной осью, а ось Oy – мнимой осью.

Геометрически комплексное число $z = x + iy$ изображается точкой $M(x, y)$ на координатной плоскости или радиусом-вектором этой точки (вектором, начало которого находится в точке $(0; 0)$, а конец в точке $M(x, y)$).

Сложение, вычитание и умножение комплексных чисел, заданных в алгебраической форме, выполняются по правилам сложения, вычитания и умножения двучленов вида $x + iy$ с заменой каждый раз i^2 на (-1) .

Тригонометрическая форма комплексного числа $z = x + iy$ имеет вид:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (1)$$

где длину радиус-вектора числа z (модуль) находим по формуле

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r - \text{модуль числа } z. \quad (2)$$

φ – аргумент числа z ($\varphi = \operatorname{Arg} z$) – это величина угла между радиусом-вектором точки z и положительным направлением оси Ox , причем величина угла считается положительной, если

отсчет ведется против часовой стрелки, и отрицательной, если отсчет ведется по часовой стрелке.

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

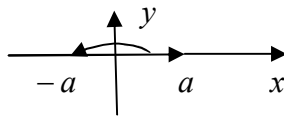
$\arg z$ есть главное значение $\operatorname{Arg} z$, определяемое условиями:

$$-\pi < \arg z \leq \pi, \quad (3)$$

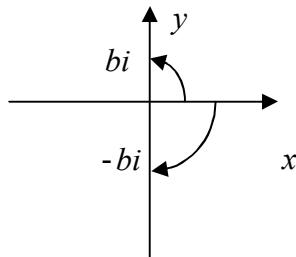
$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{если } x > 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi, & \text{если } x < 0, y \geq 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi, & \text{если } x < 0, y < 0. \end{cases} \quad (4)$$

Значения аргумента действительных и чисто мнимых чисел лучше находить из геометрической интерпретации чисел.

$$z = x, \quad \arg x = \begin{cases} 0, & \text{если } x > 0; \\ \pi, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$



$$z = iy, \quad \arg iy = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{если } y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{если } y < 0. \end{cases}$$



Показательная форма комплексного числа $z = x + iy$ имеет вид

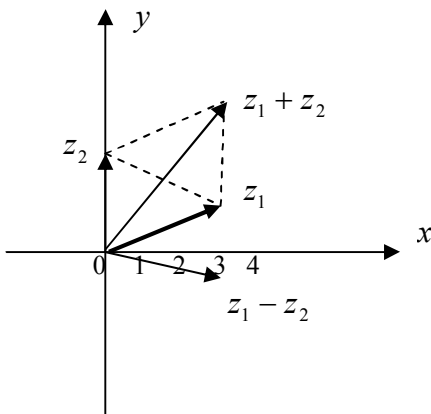
$$z = re^{i\varphi},$$

где r и φ вычисляются по формулам, приведенным выше.

Пример выполнения задания I.

Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел $z_1 = 3 + i$ и $z_2 = 2i$, изобразить на плоскости данные числа и результаты операций, пользуясь векторным представлением.

$z_1 + z_2 = (3 + i) + 2i = 3 + 3i$. Изобразим все числа на координатной плоскости.



Геометрические операции сложения (вычитания) выполняются по правилу сложения (вычитания) векторов.

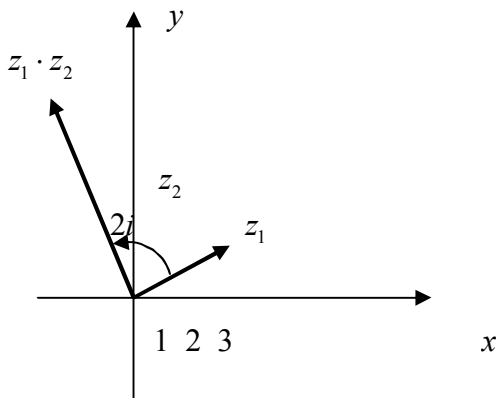
Вектор, соответствующий числу $z_1 + z_2 = 3 + 3i$ — диагональ параллелограмма, построенного на векторах, соответствующих числам $z_1 = 3 + i$ и $z_2 = 2i$.

Найдем разность $z_1 - z_2 = (3 + i) - 2i = 3 - i$ и изобразим число $z_1 - z_2 = 3 - i$ на плоскости. (Соответствующий вектор параллелен второй диагонали параллелограмма).

Найдем произведение $z_1 \cdot z_2 = (3 + i)2i = 6i + 2i^2 = 6i - 2 = -2 + 6i$.

При умножении на $z_2 = 2i$ вектор, соответствующий числу $z_1 = 3 + i$ повернули против часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}$ и

растянули вектор в два раза, так как для числа $2i$ аргумент равен $\frac{\pi}{2}$, а модуль равен 2.

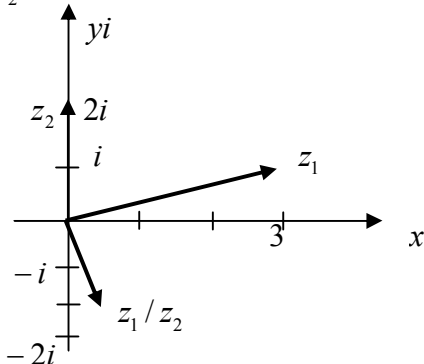


Найдем число $\frac{z_1}{z_2}$. Деление числа $z_1 = x_1 + iy_1$ выполняется

по формуле $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}$ ($z_2 \neq 0$), где $\bar{z}_2 = x_2 - iy_2$, сопряженное числу $z_2 = x_2 + iy_2$. В нашем случае для числа $z_2 = 2i$ сопряженным будет $\bar{z}_2 = -2i$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3+i)(-2i)}{2i(-2i)} = \frac{1-3i}{2}. \quad (\text{Можно было домножить на } (-i)).$$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$, изобразим это число на координатной плоскости.



При делении числа $z_1 = 3 + i$ на число $z_2 = 2i$ повернули вектор, соответствующий z_1 на угол $\frac{\pi}{2}$ по часовой стрелке и разделили вектор на 2. Из чертежа видно, что модуль уменьшился в 2 раза и произошел поворот на $-\frac{\pi}{2}$.

Пример выполнения задания II.

Вычислить:

$$A = \frac{(i^7 + 1)^2}{(3 + i^9)} + \operatorname{Re}(\overline{(2 - 3i)}(1 + i)) + \frac{5}{i^8}.$$

Решим пример по действиям. Вычислим $(i^7 + 1)^2$.

$$\text{Учитывая, что } i^n = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 4k, \\ i, & \text{при } n = 4k + 1, \\ -1, & \text{при } n = 4k + 2, \\ -i, & \text{при } n = 4k + 3, \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

$i^7 = i^{3+4} = i^3 \cdot i^4 = (i)^3 = -i$. выделили в показателе степени слагаемое, кратное четырем, $7=3+4$, использовали 4 строку формулы и получили $i^7 = -i$, $i^7 + 1 = -i + 1$.

$$(i^7 + 1)^2 = (-i + 1)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$$

$$3 + i^9 = 3 + i^{2 \cdot 4 + 1} = 3 + i$$

$$\frac{(i^7 + 1)^2}{3 + i^9} = \frac{-2i}{3 + i} = \frac{-2i(3 - i)}{(3 + i)(3 - i)} = \frac{-6i + 2i^2}{9 + 1} = \frac{-2 - 6i}{10} = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i.$$

Вычисляем:

$$\operatorname{Re}(\overline{(2 - 3i)}(1 + i)) = \operatorname{Re}((2 + 3i)(1 + i)) = \operatorname{Re}(-1 + 5i) = -1.$$

Так как $i^8 = 1$, то $\frac{5}{i^8} = 5$.

$$A = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i - 1 + 5 = \frac{19}{5} - \frac{3}{5}i.$$

Пример выполнения задания III.

Вычертить область, заданную неравенством:

$$\begin{cases} |z - 3 + i| \geq 2, & (a) \\ \operatorname{Re} z \leq 2, & (б) \\ -\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}. & (в) \end{cases}$$

а) Изобразим множество точек, определяемое условием

$$|z - 3 + i| \geq 2.$$

Так как $z = x + iy$, то $|z - 3 + i| = |x + iy - 3 + i| = |(x - 3) + i(y + 1)|$. Пользуясь определением модуля, получим

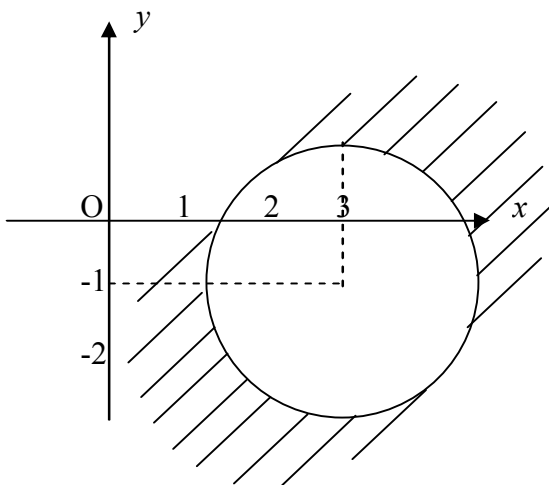
$$|(x - 3) + i(y + 1)| = \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 1)^2},$$

$$\sqrt{(x - 3)^2 + (y + 1)^2} \geq 2.$$

Возводим обе части неравенства в квадрат (обе части неотрицательные):

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 \geq 2^2.$$

Строим границу области $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$. Это окружность с центром в точке $(3; -1)$, радиус равен 2.

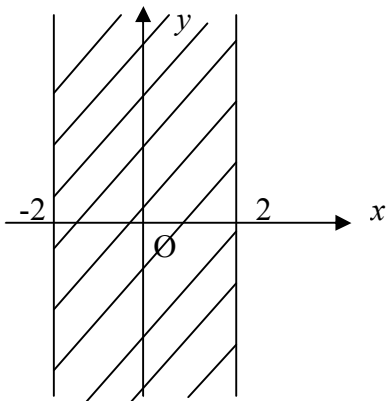


Множество точек, удовлетворяющих неравенству $(x - 3)^2 +$

$(y+1)^2 \geq 2^2$ лежат вне круга с границей $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 2^2$. Точки, лежащие на окружности $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$ также удовлетворяют неравенству а).

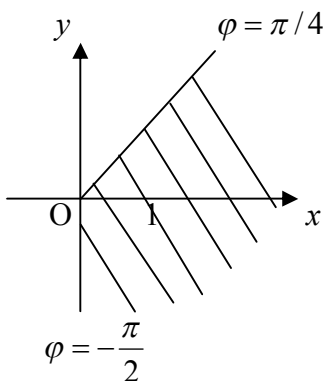
б) $|\operatorname{Re} z| \leq 2$.

$$z = x + iy, \quad \operatorname{Re} z = x, \quad |x| \leq 2, \quad -2 \leq x \leq 2.$$

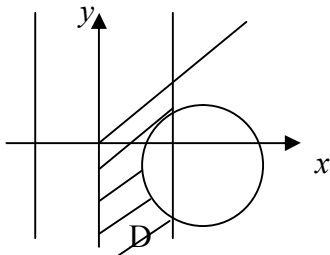


в) Неравенству $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$ удовлетворяют точки z , лежащие внутри угла, равного $\frac{3\pi}{4}$ и с вершиной в начале координат

$$\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}:$$



Поскольку искомая область определяется тремя неравенствами, то строим на одной комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющее всем трем неравенствам.



Ответом будет область D.

Пример выполнения задания IV.

Изобразить числа z точками на комплексной плоскости, представить их в тригонометрической форме. Для задания а), б), в), г) модуль числа и главное значение аргумента z находим, используя геометрическую интерпретацию чисел.

а) $z_1 = 8$, б) $z_2 = -7$, в) $z_3 = 5i$, г) $z_4 = -3i$,

д) $z_5 = -\sqrt{3} + i$, е) $z_6 = -i$.

Решение:

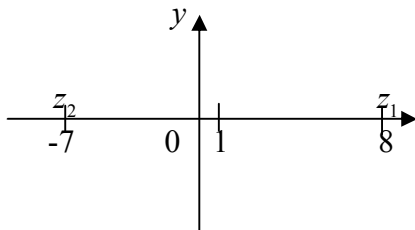
$$z = x + iy,$$

Тригонометрическая форма комплексного числа

$$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

показательная форма $z = |z| e^{i\varphi}$.

а)



$$z_1 = 8, \quad |z_1| = 8$$

$$\varphi = \arg z$$

φ — это угол, который образует радиус-вектор точки z с положительным направлением оси Ox .

Из рисунка видно, что радиус-вектор точки z_1 образует с положительным направлением оси Ox угол $\varphi = 0$. Значит, $\arg z_1 = 0$.

Тригонометрическая форма:

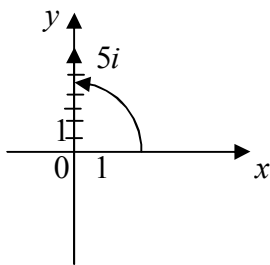
$$z_1 = 8 = 8(\cos 0 + i \sin 0)$$

и показательная форма $z_1 = 8e^{0i}$.

б) $z_2 = -7$, $|z_2| = 7$, радиус-вектор точки z_2 образует угол $\varphi = \pi$ с положительным направлением оси Ox , $\arg z_2 = \pi$,
 $-7 = 7(\cos \pi + i \sin \pi)$, $-7 = 7e^{i\pi}$.

в) $z_3 = 5i$ $|z_3| = 5$

(точка z_3 находится от начала координат на расстоянии 5 единиц)



$$\arg z_3 = \varphi_3 = \frac{\pi}{2}$$

$5i = 5(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$ – тригонометрическая форма.

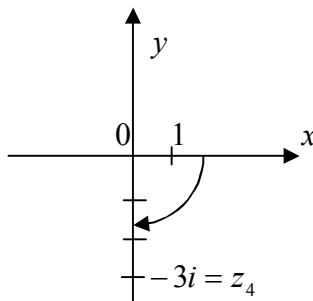
$5i = 5e^{\frac{\pi}{2}i}$ – показательная форма.

г) $z_4 = -3i$, $|z_4| = 3$

Радиус-вектор точки z_4 образует с положительным направлением

оси Ox угол $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

$$\arg z_4 = -\frac{\pi}{2}$$



$$3i = 3(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2})), \quad -3i = 3e^{-\frac{\pi}{2}i}.$$

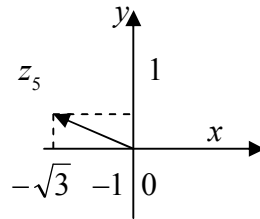
12

Для заданий д), е) используем формулы (2), (3), (4)

$$\text{д) } z_5 = -\sqrt{3} + i$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|z_5| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$



Так как число расположено во II четверти, то для отыскания аргумента воспользуемся формулой

$$z = x + iy, \quad x < 0, \quad y > 0,$$

$$\arg z = \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi$$

Для нашего случая $x = -\sqrt{3}$, $y = 1$.

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi = \pi - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Представим z_5 в тригонометрической форме:

$$-\sqrt{3} + i = 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)$$

и в показательной форме $-\sqrt{3} + i = 2e^{\frac{5\pi}{6}i}$.

$$\text{е) } z_6 = 1 - i$$

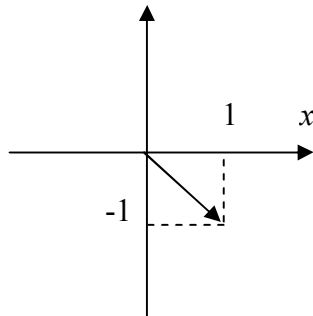
$$|z_6| = \sqrt{1^2 + (-1)^2}$$

Число z расположено в IV четверти, поэтому:

$$\varphi = \arg z_6 = \operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}.$$

Тогда $1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right),$

$$1 - i = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}.$$



При записи чисел в тригонометрической форме не следует преобразовывать запись $\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))$ таким образом $\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})) = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})$, так как полученное выражение не будет тригонометрической формой числа $1-i$, а просто комплексным числом, равным $1-i$. А при различных вычислениях эти преобразования возможны.

Пример выполнения задания V.

Вычислить, пользуясь представлением комплексного числа в тригонометрической форме и формулой Муавра. Решение:

При возведении в степень используем формулу Муавра

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$(-2 - 2\sqrt{3}i)^{60}, \quad z = -2 - 2\sqrt{3}i.$$

Представим число z в тригонометрической форме $|z| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4$, так как $x < 0, y < 0$, то воспользуемся формулой

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{-2\sqrt{3}}{-2} - \pi = \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$$

$$-2 - 2\sqrt{3}i = 4(\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\sin(-\frac{2\pi}{3})).$$

Тогда используем формулу Муавра $z^n = |z|^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

$$\begin{aligned} (-2 - 2\sqrt{3}i)^{60} &= 4^{60}(\cos(-\frac{60 \cdot 2\pi}{3}) + i\sin(-\frac{60 \cdot 2\pi}{3})) = \\ &= 4^{60}(\cos(-40\pi) + i\sin(-40\pi)) = 4^{60}(1 + i \cdot 0) = 4^{60}. \end{aligned}$$

Пример выполнения задания VI.

Представить число $z_1 = \left(\frac{\sqrt{15} + i\sqrt{5}}{-2 - 2i} \right)^{24}$ в показательной форме.

Решение:

Представим комплексные числа $\sqrt{15} + \sqrt{5}i$ и $-2 - 2i$ в показательной форме $|\sqrt{15} + \sqrt{5}i| = \sqrt{15 + 5} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Найдем аргумент этого числа, расположенного в I четверти

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{15}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}; \quad \sqrt{15} + \sqrt{5}i = 2\sqrt{5}e^{\frac{\pi}{6}i}.$$

$$|-2 - 2i| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}.$$

Число $-2 - 2i$ расположено в III четверти

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{-2}{-2} - \pi = \operatorname{arctg} 1 - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}; \quad -2 - 2i = 2\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}.$$

$$\frac{\sqrt{15} + \sqrt{5}i}{-2 - 2i} = \frac{2\sqrt{5}e^{\frac{\pi}{6}i}}{2\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}} = \sqrt{\frac{5}{2}}e^{\left(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4}\right)i} = \sqrt{\frac{5}{2}}e^{\frac{11\pi}{12}i}$$

$$z_1 = \left(\frac{\sqrt{15} + \sqrt{5}i}{-2 - 2i} \right)^{24} = \left(\sqrt{\frac{5}{2}}e^{\frac{11\pi}{12}i} \right)^{24} = \left(\frac{5}{2} \right)^{12} e^{22\pi i}.$$

Не следует преобразовывать число $\frac{\sqrt{15} + i\sqrt{5}}{-2 - 2i}$, умножая числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю. Это может затруднить решение задачи.

Пример решения задачи VII.

Найти действительные решения уравнения

$$(2 + 3i)x + (4 - i)y = 8 + 5i.$$

Решение: Выделим в левой части уравнения действительную и мнимую части

$$(2 + 3i)x + (4 - i)y = (2x + 4y) + i(3x - y).$$

Тогда $(2x + 4y) + i(3x - y) = 8 + 5i$.

Согласно определению равенства двух комплексных чисел получаем систему:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 8, \\ 3x - y = 5. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $x = 2$, $y = 1$.

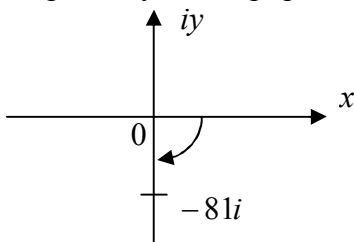
Пример решения задачи VIII.

Найти все решения уравнения $z^4 + 81i = 0$ и изобразить их точками на комплексной плоскости.

Решение:

Запишем уравнение $z^4 = -81i$.

Для отыскания корней уравнения нужно извлечь корень четвертой степени из числа $-81i$. Представим число в тригонометрической форме (можно и в показательной). Используем геометрическую интерпретацию этого числа.



Расстояние от начала координат до точки $-81i$ составляет 81 единицу, т.е. $|-81i| = 81$. $\varphi = \arg z = -\frac{\pi}{2}$ (Исходя из рисунка).

Корень n -й степени из комплексного числа z найдем по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Для нашей задачи

$$\sqrt[4]{-81i} = \sqrt[4]{81} \left(\cos \frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{4} \right) \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$k=0, \quad z_0 = 3(\cos(-\frac{\pi}{8}) + i \sin(-\frac{\pi}{8}))$$

$$k=1, \quad z_1 = 3(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8})$$

$$k=2, \quad z_2 = 3(\cos \frac{7\pi}{8} + i \sin \frac{7\pi}{8})$$

$$k=3, \quad z_3 = 3(\cos \frac{11\pi}{8} + i \sin \frac{11\pi}{8})$$

Изобразим полученные значения z_0, z_1, z_2, z_3 на комплексной плоскости. Проведем такие преобразования:

$$z_0 = 3(\cos(-\frac{\pi}{8}) + i \sin(-\frac{\pi}{8})) = 3(\cos \frac{\pi}{8} - i \sin \frac{\pi}{8}) = 3 \cos \frac{\pi}{8} - i 3 \sin \frac{\pi}{8}.$$

Так как $3 \cos \frac{\pi}{8} > 0$, то число z_0 расположено в IV четверти.

$$z_1 = 3(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8}), \quad \cos \frac{3\pi}{8} > 0, \quad \sin \frac{3\pi}{8} > 0, \quad \text{число } z_1$$

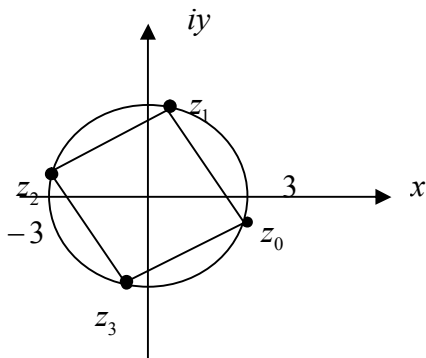
расположено в I четверти.

$$z_2 = 3(\cos \frac{7\pi}{8} + i \sin \frac{7\pi}{8}), \quad \cos \frac{7\pi}{8} < 0, \quad \sin \frac{7\pi}{8} > 0, \quad \text{число } z_2$$

расположено во II четверти.

$$z_3 = 3(\cos \frac{11\pi}{8} + i \sin \frac{11\pi}{8}), \quad \cos \frac{11\pi}{8} < 0, \quad \sin \frac{11\pi}{8} < 0, \quad \text{число } z_3$$

расположено в III четверти.



Значения z_0, z_1, z_2, z_3 расположены в вершинах правильного четырехугольника, вписанного в окружность радиуса 3, с центром в начале координат.

Пример решения задачи IX.

Решить биквадратное уравнение $z^4 + 8z^2 + 1 = 0$.

Решение.

Введем новую переменную $z^2 = t$. Получим

$$t^2 + 8t + 1 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, найдем

$$t_1 = -1, \quad t_2 = -7.$$

Возвратимся к прежней переменной

$$\begin{cases} z^2 = -1 \\ z^2 = -7 \end{cases} \quad \text{тогда} \quad \begin{cases} z_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i, \\ z_{3,4} = \sqrt{-7} = \pm i\sqrt{7}. \end{cases}$$

Ответ: $\pm i, \pm i\sqrt{7}$.

Пример решения задачи X.

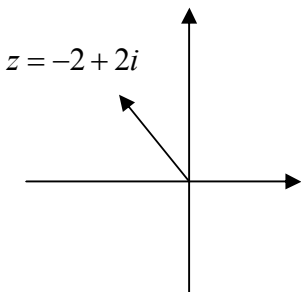
Найти все решения корня $\sqrt[3]{-2+2i}$.

Решение:

Представим число $z = -2 + 2i$ в показательной форме

$$z = |z| e^{i\varphi}$$

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2^{\frac{3}{2}}.$$



Так как число $z = -2 + 2i$ расположено во II четверти, то

$$\arg z = \pi + \arctg\left(\frac{2}{-2}\right) = \pi - \arctg 1.$$

$$\arg z = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}, \quad \varphi = \frac{3\pi}{4},$$

$$-2 + 2i = 2^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Найдем все значения корня, используя формулу

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad \varphi = \arg z.$$

Для нашего случая $k = 0, 1, 2$.

$$w_k = \sqrt[3]{2^{\frac{3}{2}}} e^{i \frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3}},$$

$$k=0, \quad w_0 = \sqrt{2} e^{i \frac{3\pi}{12}} = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}},$$

$$k=1, \quad w_1 = \sqrt{2} e^{i \frac{\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi\right)}{3}} = \sqrt{2} e^{i \frac{11\pi}{12}},$$

$$k=2, \quad w_2 = \sqrt{2} e^{i \frac{\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi \cdot 2\right)}{3}} = \sqrt{2} e^{i \frac{19\pi}{12}}.$$

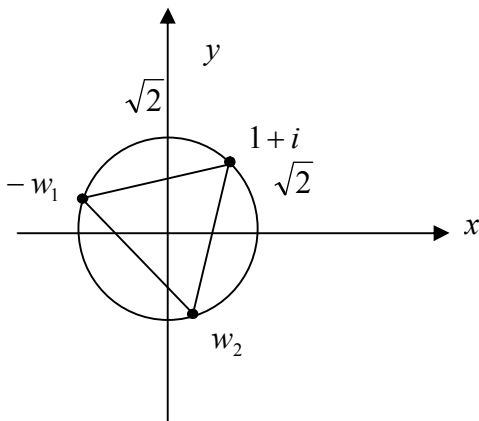
Можно представить числа w_0, w_1, w_2 в тригонометрической форме:

$$w_0 = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i,$$

$w_1 = \sqrt{2} e^{i \frac{11\pi}{12}} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right)$. Так как $\frac{\pi}{2} < \frac{11\pi}{12} < \pi$, то число w_1 расположено во II четверти.

$w_2 = \sqrt{2} e^{i \frac{19\pi}{12}} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right)$, $\frac{3\pi}{2} < \frac{19\pi}{12} < 2\pi$, число

w_2 расположено в IV четверти. Так как модули чисел w_0, w_1, w_2 равны между собой и равны $\sqrt{2}$, то эти числа располагаются на окружности радиуса $\sqrt{2}$ с центром в начале координат в вершинах правильного треугольника, вписанного в эту окружность.



Пример решения задачи XI.

При решении задачи №11 следует помнить, что $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, знать определение модуля z , $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$; затем, используя и навыки действий с комплексными числами и элементарные тождественные преобразования функций, получить уравнение кривой.

Пример. Определить, какая линия определяется уравнением

$$|z| - \operatorname{Re} z = 12.$$

Так как $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{Re} z = x$, получим $\sqrt{x^2 + y^2} - x = 12 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = x + 12$.

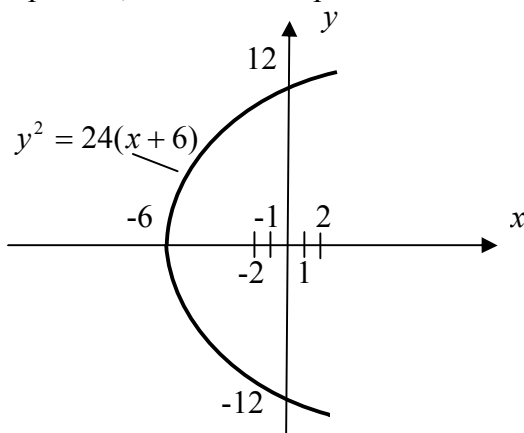
Так как $\sqrt{x^2 + y^2}$ – величина неотрицательная, то запишем ограничения $x + 12 \geq 0$. После этого можно возвести обе части равенства в квадрат.

$$x^2 + y^2 = x^2 + 24x + 144 \Rightarrow 24x = y^2 - 144$$

$$y^2 = 24x + 144$$

$$y^2 = 24(x + 6)$$

Это парабола, осью симметрии является ось Ox .



Пример решения задачи XII.

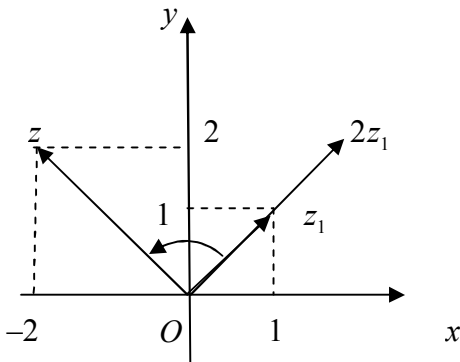
Дан вектор изображающий комплексное число z_1 . Его растянули в два раза и повернули на угол $\frac{\pi}{2}$. Найти комплексное число z , соответствующее новому вектору

$$z_1 = 1 + i, \quad t = 2, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Решение.

Строим радиус-вектор числа $z_1 = 1 + i$. Растягиваем его в два раза и поворачиваем на угол $\frac{\pi}{2}$.

Получим вектор z . Ему соответствует число $z = -2 + 2i$.



Эту задачу можно решить иначе.

При умножении чисел в тригонометрической или показательной формах их модули перемножаются, аргументы складываются. Геометрически умножение одного комплексного числа на другое комплексное число, отличное от нуля, означает поворот радиуса-вектора числа z_1 против часовой стрелки на угол, равный аргументу числа z_2 и умножение этого вектора на модуль числа z_2 . Представим число $z_1 = 1 + i$ в тригонометрической и показательной формах.

$$|z_1| = \sqrt{2}, \quad \varphi_1 = \arg z_1 = \arctg \frac{1}{1} = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{4}.$$

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}.$$

Найдем число z . Учитывая условие задачи $|z_2| = 2$, нужно растянуть вектор в два раза; аргумент z_2 будет равен $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, а

$$z_2 = 2e^{i \frac{\pi}{2}}.$$

$$\text{Тогда } z = z_1 z_2 = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}} 2e^{i \frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2} e^{i \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right)} = 2\sqrt{2} e^{i \frac{3\pi}{4}}.$$

Запишем полученное число в алгебраической форме, используя формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

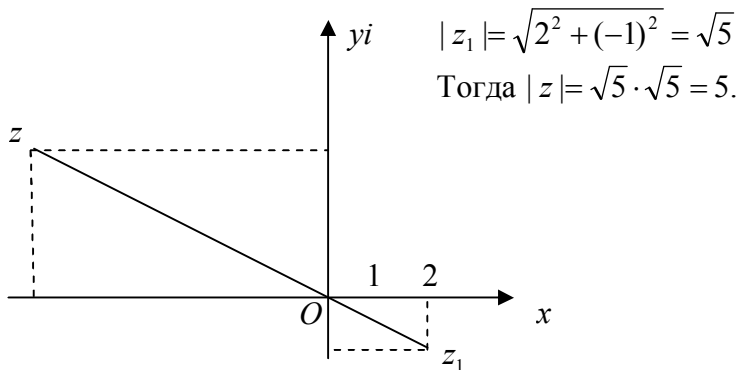
$$2\sqrt{2} e^{i \frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -2 + 2i,$$

$$\text{так как } \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

При выполнении этого задания могут возникнуть трудности при отыскании аргумента числа z . В этом случае лучше воспользоваться первым способом решения задачи.

Например.

Дано число $z_1 = 2 - i$. Вектор, соответствующий этому числу растянули в $\sqrt{5}$ раз и повернули на угол π .



Отмечаем число z_1 на комплексной плоскости и строим радиус-вектор точки z_1 . Поворачиваем вектор на угол π . Расположение точки z находим, учитывая, что длина нового вектора должна быть равна 5.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задача I.. Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел z_1 и z_2 , изобразить на плоскости данные числа и результаты операций, пользуясь векторным представлением.

1. $z_1 = -2 + i$, $z_2 = 3 - i$;
2. $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -2 - 3i$;
3. $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -3 - 2i$;
4. $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -1 + 2i$;
5. $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = -1 + i$;
6. $z_1 = 1 - 4i$, $z_2 = -2 - 3i$;
7. $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = 1 + i$;
8. $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -3 - i$;
9. $z_1 = -1 + 3i$, $z_2 = 1 - 2i$;
10. $z_1 = 3 + i$, $z_2 = -1 + 2i$;
11. $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -1 - 2i$;
12. $z_1 = 5 + 3i$, $z_2 = 1 - i$;
13. $z_1 = -5 - 2i$, $z_2 = 3 + i$;
14. $z_1 = 6 + i$, $z_2 = -1 + i$;
15. $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3 - i$;
16. $z_1 = 1 + 4i$, $z_2 = -3 + i$;
17. $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = -2 - 4i$;
18. $z_1 = -2 + 4i$, $z_2 = 1 + 3i$;
19. $z_1 = -1 - 5i$, $z_2 = -1 + 3i$;
20. $z_1 = -2 + 4i$, $z_2 = -1 - 2i$;
21. $z_1 = -3 + i$, $z_2 = 2 + 3i$;
22. $z_1 = 3 - i$, $z_2 = -4 - i$;
23. $z_1 = -1 + 4i$, $z_2 = 2 - 3i$;

24. $z_1 = -2 - 3i, \quad z_2 = 2 + i;$

25. $z_1 = 2 - 4i, \quad z_2 = -3 + i;$

26. $z_1 = 1 - 5i, \quad z_2 = -1 + 3i;$

27. $z_1 = 2 + 3i, \quad z_2 = 4 - i;$

28. $z_1 = 5 - 2i, \quad z_2 = -1 + 2i;$

29. $z_1 = 2 - 3i, \quad z_2 = 3 - 2i;$

30. $z_1 = 1 + 5i, \quad z_2 = -i + 2.$

Задача II. Выполнить действия и представить результат в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

1. $4 \operatorname{Re} \left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i} \right) + (\overline{i^6 - \sqrt{3}i});$

2. $\operatorname{Im} \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i} \right) + (\overline{i-1})^2 + (1+i) \cdot i^3;$

3. $5i^5 \left(\frac{\overline{1-i}}{1+2i} \right) + \operatorname{Re}(2-i)^2;$

4. $\frac{(1-2i)(2+i)^2}{5i} + \operatorname{Im}(2-i)^2 + i^9;$

5. $\frac{(1-i)^3}{1+i} + (\overline{2-i}) + \operatorname{Im}(i^7);$

6. $\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right)^2 \cdot \frac{\overline{(1-i)^2}}{i^3} - \operatorname{Re}(\sqrt{3}+i)^2;$

7. $(-1+i\sqrt{3})^3 \cdot \left(\frac{i}{2} \right) \cdot \operatorname{Im}(1-i)^2;$

8. $\left(\frac{2-i}{1+2i} \right)^2 \cdot (\overline{-2-i}) \operatorname{Im}(1+2i)^2 + 10i^9;$

9. $\frac{\operatorname{Im}(\sqrt{3}-i)^2}{(\sqrt{3}+i)^2} + \frac{\overline{(-\sqrt{3}+i^3)}}{2} i^5;$

10. $\frac{\operatorname{Re}(2-3i)^2 + \overline{(5i)}}{1-i} i^{12};$
11. $\frac{\operatorname{Im}(1-i)^3 \operatorname{Re}(2+3i)^2}{2+i} + 2i^8;$
12. $\frac{(2-i)^3 - \overline{(2+i)} - 10}{\operatorname{Re}(2+i)^2 + 2};$
13. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 + \operatorname{Im}(1+i)^2 - \operatorname{Re}(i)^8;$
14. $\left(\frac{i^5 + 2}{i^3 + 1}\right)^2 + \operatorname{Re}(-2+i)^2 + \frac{1}{4}i^3;$
15. $\frac{(1-i)^3 - (1+i)^3}{i^4 \operatorname{Re}(2-i)} + \overline{(3-5i)};$
16. $\frac{(1+2i)^2(1-2i)}{(2+i)} - \frac{5}{3}\operatorname{Re}(2-i)^2;$
17. $7\operatorname{Im}\frac{(1+i)(2+i)}{3-i} + \overline{(3-2i)^2};$
18. $\frac{(2i+i^2)^2}{\operatorname{Re}(2+i)^3} + \left(\frac{1}{2} - i\right);$
19. $\frac{\operatorname{Im}(1-3i)}{1-i} + \overline{(1+i)^3};$
20. $\operatorname{Re}\frac{(2-i^3)\overline{(3-i)}}{1+i} + (2+3i)^3;$
21. $\frac{(1-i)^3 \operatorname{Re}(2-i)^2}{(1+i)^3 \operatorname{Im}(2+i)} i^7;$
22. $\frac{(2-i)\overline{(1-2i)}}{\operatorname{Im}(1-i)^2} - (i^2 + \frac{i^3}{2});$
23. $\frac{(\sqrt{2}+i)^2}{(1-i\sqrt{2})^2} \cdot i^5 + \operatorname{Re}(\overline{\sqrt{2}-i})^2;$

$$24. \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - i\sqrt{3} \right)^2 - \frac{\overline{(3+i)}i^9}{\operatorname{Im}(2+i)^2 - 1};$$

$$25. \frac{5(i^3 - 1)^2}{(2 + i^3)} + \operatorname{Re}(\sqrt{3} + i)^2;$$

$$26. \frac{[\operatorname{Im}(3+i)^2](\sqrt{3} + i)}{1 - i\sqrt{3}} + i^{13} \operatorname{Re}(\overline{5i - \sqrt{3}});$$

$$27. \operatorname{Re} \left(\frac{(3-i)(\overline{2+i})}{1+i} \right) + i^{21} \operatorname{Im}(2-3i)^2;$$

$$28. \left(\frac{3+i}{1-i} \right)^2 (4-i) \operatorname{Im}(2+i)^2 + 5i^7;$$

$$29. (2-i)^3 \operatorname{Re}(\overline{\sqrt{3}i - 1}) + i^{25} \operatorname{Im}(4-1)^2;$$

$$30. (\overline{i^9 + i\sqrt{3}}) \operatorname{Im} \left(\frac{(2-i)(3+i)}{4+i} \right) + i^{17} \operatorname{Re}(5-3i).$$

Задача III. Вычертить область, заданную неравенствами.

$$1. \begin{cases} z \cdot \bar{z} \leq 2; \\ \operatorname{Re} z < 1; \\ \operatorname{Im} z > -1. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} |z - 2i| \geq 1; \\ \operatorname{Im} z > 2; \\ 0 < \arg z < \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 1 < z \cdot \bar{z} < 3; \\ \operatorname{Re} z > 0; \\ 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1. \end{cases} \quad 4. \begin{cases} |z - 2 - i| \geq 1; \\ 1 \leq \operatorname{Re} z < 3; \\ 0 < \operatorname{Im} z \leq 3. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} |z - 1| > 1; \\ -3 \leq \operatorname{Im} z < 0; \\ 0 < \operatorname{Re} z < 3. \end{cases} \quad 6. \begin{cases} 1 \leq |z + 2 + i| < 2; \\ \operatorname{Im} z < 0; \\ -\frac{5\pi}{6} < \arg z < -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} |z - 2i| \leq 2; \\ \operatorname{Im} z > 0; \\ 0 < \arg z < \frac{2\pi}{3}. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} |z + i| > 1; \\ \operatorname{Re} z > 0; \\ -\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} |z - i| < 2; \\ \operatorname{Im} z \leq 0; \\ -\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq 0. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} |z - 1 + i| \leq 3; \\ \operatorname{Re} z > 1; \\ -\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} |z| \geq 2; \\ -1 \leq \operatorname{Im} z < 2; \\ -\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} |z - i| \leq 3; \\ \operatorname{Im} z \geq 1; \\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} |z - 2| \geq \frac{1}{2}; \\ |\operatorname{Im} z| \leq 1; \\ -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 1 < |z - 1| < 2; \\ \operatorname{Re} z \geq 0; \\ -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} |z - 2 - i| \leq 2; \\ 1 < \operatorname{Re} z < 2; \\ \operatorname{Im} z \geq 1. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 1 \leq |z - 2 + i| < 2; \\ \operatorname{Im} z \geq 0; \\ \frac{\pi}{6} \leq \arg z < \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} |z + 1 - i| \leq 2; \\ -2 \leq \operatorname{Re} z < 0; \\ 0 < \arg z \leq \pi. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} |z - i| \leq 2; \\ 0 < \operatorname{Re} z < 2; \\ -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} |z-1| < 2; \\ \operatorname{Re} z \leq 3; \\ -\pi < \arg z \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} |z+2i| > 1; \\ \operatorname{Im} z < 0; \\ -\frac{3\pi}{4} < \arg z < 0. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} |z-3| \leq 2; \\ 0 \leq \arg z < \frac{1}{2}; \\ \operatorname{Re} z > 2. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} |z+2i| > 1; \\ \operatorname{Im} z > 2; \\ 0 < \arg z < \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} |z-i| < 3; \\ \operatorname{Re} z < 2; \\ 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 1 \leq |z-1| \leq 3; \\ -1 \leq \operatorname{Re} z < 2; \\ -\frac{\pi}{2} < \arg z < -\pi. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} |z-1| \leq 3; \\ 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 3; \\ 0 \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} |z-2+i| < 2; \\ \operatorname{Im} z < 0; \\ -\frac{\pi}{3} \leq \arg z < 0. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 1 \leq |z-i| < 3; \\ \operatorname{Re} z > -1; \\ -\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} |z-2+2i| \geq 1; \\ 1 > \operatorname{Re} z < 2; \\ -\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} |z-2+i| > 1; \\ \operatorname{Im} z \geq -3; \\ -\frac{\pi}{3} \leq \arg z \leq \pi. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} |z+i| > 2; \\ \operatorname{Im} z < 1; \\ -\frac{\pi}{2} < \arg z \leq \pi. \end{cases}$$

Задача IV. Изобразить числа точками на комплексной плоскости, представить их в тригонометрической и показательной формах. Для заданий а), б), в), г) главное значение аргумента находим, используя геометрическую интерпретацию чисел.

1. а) $z_1 = -3$, б) $z_2 = 5$, в) $z_3 = 4i$, г) $z_4 = -7i$,
 д) $z_5 = 1 - i\sqrt{3}$, е) $z_6 = -2 - 2i$.
2. а) $z_1 = 2$, б) $z_2 = -8$, в) $z_3 = 3i$, г) $z_4 = -5i$,
 д) $z_5 = -\sqrt{3} - i$, е) $z_6 = -6 + 6i$.
3. а) $z_1 = -4$, б) $z_2 = 3$, в) $z_3 = -2i$, г) $z_4 = 7i$,
 д) $z_5 = 2\sqrt{3} - 2i$, е) $z_6 = 4 - 4i$.
4. а) $z_1 = -2$, б) $z_2 = 4$, в) $z_3 = 6i$, г) $z_4 = -3i$,
 д) $z_5 = -3 + 3i$, е) $z_6 = -2 + i\sqrt{3}$.
5. а) $z_1 = -5$, б) $z_2 = 6$, в) $z_3 = 2i$, г) $z_4 = -8i$,
 д) $z_5 = -1 + i\sqrt{3}$, е) $z_6 = -3 - 3i$.
6. а) $z_1 = -7$, б) $z_2 = 6$, в) $z_3 = -5i$, г) $z_4 = 7i$,
 д) $z_5 = 2 - 2i$, е) $z_6 = -3\sqrt{3} + i3$.
7. а) $z_1 = -6$, б) $z_2 = 9$, в) $z_3 = -4i$, г) $z_4 = 8i$,
 д) $z_5 = \sqrt{3} - i$, е) $z_6 = -5 - 5i$.
8. а) $z_1 = 1,5$, б) $z_2 = -9$, в) $z_3 = -9i$, г) $z_4 = 7,5i$,
 д) $z_5 = -2 - 2i\sqrt{3}$, е) $z_6 = 6 - 6i$.
9. а) $z_1 = -0,5$, б) $z_2 = 10$, в) $z_3 = -6i$, г) $z_4 = 7i$,
 д) $z_5 = 3 - 3i$, е) $z_6 = -\sqrt{5} + i\sqrt{15}$.
10. а) $z_1 = 9$, б) $z_2 = -2,5$, в) $z_3 = -1,5i$, г) $z_4 = 7,5i$,
 д) $z_5 = -7 - 7i$, е) $z_6 = -\sqrt{6} + i\sqrt{2}$.
11. а) $z_1 = 3,5$, б) $z_2 = -5$, в) $z_3 = 8i$, г) $z_4 = 2,5i$,
 д) $z_5 = 4,5 - 4,5i$, е) $z_6 = -4\sqrt{3} + 4i$.

12. а) $z_1 = 6$, б) $z_2 = -3,5$, в) $z_3 = 4,5i$, г) $z_4 = -6,5i$,
 д) $z_5 = -4 - 4i$, е) $z_6 = -\sqrt{15} + i\sqrt{5}$.
13. а) $z_1 = -4,5$, б) $z_2 = 4$, в) $z_3 = -8i$, г) $z_4 = 5,5i$,
 д) $z_5 = 7 - 7i$, е) $z_6 = \sqrt{5} - i\sqrt{15}$.
14. а) $z_1 = 5,5$, б) $z_2 = -2$, в) $z_3 = 3i$, г) $z_4 = -2,5i$,
 д) $z_5 = -1 - i\sqrt{3}$, е) $z_6 = -4,5 - i4,5$.
15. а) $z_1 = -5,5$, б) $z_2 = 3$, в) $z_3 = 6i$, г) $z_4 = -2,5i$,
 д) $z_5 = -2\sqrt{3} - 2i$, е) $z_6 = \sqrt{5} + i\sqrt{15}$.
16. а) $z_1 = -7,5$, б) $z_2 = 4,5$, в) $z_3 = 10i$, г) $z_4 = -3,5i$,
 д) $z_5 = -1,5 + 1,5i$, е) $z_6 = -\sqrt{5} - i\sqrt{15}$.
17. а) $z_1 = -4$, б) $z_2 = 8,5$, в) $z_3 = -6i$, г) $z_4 = 1,5i$,
 д) $z_5 = -6 - 6i$, е) $z_6 = \sqrt{6} - i\sqrt{3}$.
18. а) $z_1 = 5$, б) $z_2 = -10$, в) $z_3 = -4i$, г) $z_4 = 6,5i$,
 д) $z_5 = -7 + 7i$, е) $z_6 = 3\sqrt{3} + i3$.
19. а) $z_1 = 2$, б) $z_2 = -8,5$, в) $z_3 = -9i$, г) $z_4 = 5,5i$,
 д) $z_5 = -4 + 4i$, е) $z_6 = -\sqrt{6} - i\sqrt{3}$.
20. а) $z_1 = 6,5$, б) $z_2 = -1,5$, в) $z_3 = 8i$, г) $z_4 = -5,5i$,
 д) $z_5 = -4,5 + i4,5$, е) $z_6 = 3 - i3\sqrt{3}$.
21. а) $z_1 = -9,5$, б) $z_2 = 2,5$, в) $z_3 = 10i$, г) $z_4 = -2,5i$,
 д) $z_5 = 1,5 - 1,5i$, е) $z_6 = -4\sqrt{3} - 4i$.
22. а) $z_1 = -8$, б) $z_2 = 3,5$, в) $z_3 = 9i$, г) $z_4 = -2,5i$,
 д) $z_5 = -3,5 + 3,5i$, е) $z_6 = 2 + i2\sqrt{3}$.
23. а) $z_1 = 7$, б) $z_2 = -5,5$, в) $z_3 = -8i$, г) $z_4 = 4,5i$,
 д) $z_5 = 2,5 + 2,5i$, е) $z_6 = -3 + i3\sqrt{3}$.
24. а) $z_1 = -3$, б) $z_2 = 7,5$, в) $z_3 = -2i$, г) $z_4 = 5i$,
 д) $z_5 = -1,5 - 1,5i$, е) $z_6 = 3\sqrt{3} - 3i$.

- 25) а) $z_1 = 4$; б) $z_2 = -6,5$; в) $z_3 = -9i$; г) $z_4 = 1,5i$;
 д) $z_5 = -2\sqrt{3} + 2i$; е) $z_6 = 5 - 5i$.
- 26) а) $z_1 = -6$; б) $z_2 = 4,5$; в) $z_3 = -2i$; г) $z_4 = 3,5i$;
 д) $z_5 = -2 + 2i$; е) $z_6 = -3\sqrt{3} - 3i$.
- 27) а) $z_1 = 7,5$; б) $z_2 = -10$; в) $z_3 = -1,5i$; г) $z_4 = 2,5i$;
 д) $z_5 = -\sqrt{3} + i$; е) $z_6 = 2,5 - 2,5i$.
- 28) а) $z_1 = -9$; б) $z_2 = 9,5$; в) $z_3 = 4i$; г) $z_4 = -7i$;
 д) $z_5 = 2 - i \cdot 2\sqrt{3}$; е) $z_6 = -5 + 5i$.
- 29) а) $z_1 = -3,5$; б) $z_2 = 6,5$; в) $z_3 = -10i$; г) $z_4 = 5,5i$;
 д) $z_5 = -2,5 - i \cdot 2,5$; е) $z_6 = -3 - i \cdot 3\sqrt{3}$.
- 30) а) $z_1 = 9$; б) $z_2 = -4,5$; в) $z_3 = -7i$; г) $z_4 = 2,5i$;
 д) $z_5 = -3,5 - i \cdot 3,5$; е) $z_6 = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$.

Задача V. Вычислить, пользуясь представлением комплексного числа в тригонометрической форме и формулой Муавра.

- 1) $(-2 + 2i)^{10}$; 2) $(-\sqrt{12} - 2i)^{20}$; 3) $(\sqrt{2} - \sqrt{6}i)^8$;
 4) $(3\sqrt{3} + 9i)^{15}$; 5) $(-\sqrt{6} + i\sqrt{2})^{18}$; 6) $(5 - 5i)^{20}$;
 7) $(6\sqrt{3} - 6i)^{35}$; 8) $(-3 - 3\sqrt{3}i)^{24}$; 9) $(-4 - 4i)^{22}$;
 10) $(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})^{10}$; 11) $(4 + 4i)^{44}$; 12) $(\sqrt{3} - i)^{48}$;
 13) $(-6 + 2\sqrt{3}i)^{18}$; 14) $(\sqrt{3} + 3i)^{27}$; 15) $(4 - 4\sqrt{3}i)^{33}$;
 16) $(-7 + 7i)^{52}$; 17) $(-2\sqrt{3} - 2i)^{42}$; 18) $(-3 - i\sqrt{3})^{40}$;
 19) $(8 + 8\sqrt{3}i)^{45}$; 20) $(-12 - 12i)^{28}$; 21) $(1 - i\sqrt{3})^{51}$;
 22) $(-9 + 9i)^{48}$; 23) $(11 - 11i)^{34}$; 24) $(-5 - 5\sqrt{3}i)^{45}$;
 25) $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^{66}$; 26) $(-1 + i\sqrt{3})^{54}$; 27) $(\sqrt{2} - \sqrt{6}i)^{21}$;
 28) $(\sqrt{3} - i\sqrt{3})^{60}$; 29) $(-\sqrt{3} + i)^{28}$; 30) $(-5\sqrt{3} - 15)^{39}$;

Задача VI. Представить числа в показательной форме.

$$1. \quad z_1 = \frac{-2\sqrt{3} + 2i}{1 + i}, \quad z_2 = \left(\frac{-4 + 4i}{\sqrt{3} - i} \right)^{12};$$

$$2. \quad z_1 = \frac{-5 + 5i}{1 + \sqrt{3}i}, \quad z_2 = \left(\frac{6 - i6\sqrt{3}}{-5 - 5i} \right)^{20};$$

$$3. \quad z_1 = \frac{2\sqrt{3} + 2i}{-3 + 3i}, \quad z_2 = \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2 + 2i} \right)^{28};$$

$$4. \quad z_1 = \frac{\sqrt{3} - i}{-2 - 2i}, \quad z_2 = \left(\frac{-\sqrt{6} + i\sqrt{3}}{-4 - 4i} \right)^{24};$$

$$5. \quad z_1 = \frac{-5\sqrt{3} - 15i}{3 - 3i}, \quad z_2 = \left(\frac{3\sqrt{3} + 9i}{-2 + 2i} \right)^{20};$$

$$6. \quad z_1 = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2 - 2i}, \quad z_2 = \left(\frac{-12 + 12i}{\sqrt{2} - i\sqrt{6}} \right)^{12};$$

$$7. \quad z_1 = \frac{5 - 5i}{2 + 2\sqrt{3}i}, \quad z_2 = \left(\frac{\sqrt{3} - i\sqrt{3}}{4 + 4i} \right)^{20};$$

$$8. \quad z_1 = \frac{-\sqrt{3} + i3}{1 - i}, \quad z_2 = \left(\frac{-8 + i8\sqrt{3}}{-7 - 7i} \right)^{10};$$

$$9. \quad z_1 = \frac{4 + 4\sqrt{3}i}{-1 - i}, \quad z_2 = \left(\frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{3 + 3i} \right)^{24};$$

$$10. \quad z_1 = \frac{-1 + i}{3\sqrt{3} + 3i}, \quad z_2 = \left(\frac{-5\sqrt{3} + 15i}{4 - 4i} \right)^{28};$$

$$11. \quad z_1 = \frac{2 - 2\sqrt{3}i}{-1 + i}, \quad z_2 = \left(\frac{-9 + 9i}{\sqrt{3} + i} \right)^{24};$$

$$12. \quad z_1 = \frac{-8\sqrt{3} + 8i}{5 + 5i}, \quad z_2 = \left(\frac{-\sqrt{2} - i\sqrt{6}}{-7 + 7i} \right)^{46};$$

$$13. z_1 = \frac{-2-2\sqrt{3}i}{7-7i}, \quad z_2 = \left(\frac{5\sqrt{3}-15i}{-11-11i} \right)^{20};$$

$$14. z_1 = \frac{-12-12i}{7+7\sqrt{3}i}, \quad z_2 = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{7+7i} \right)^{28};$$

$$15. z_1 = \frac{8+8\sqrt{3}i}{-3-3i}, \quad z_2 = \left(\frac{-5+5i}{\sqrt{2}+i\sqrt{6}} \right)^{30};$$

$$16. z_1 = \frac{5+i5\sqrt{3}}{-7+7i}, \quad z_2 = \left(\frac{5\sqrt{3}+15i}{4-4i} \right)^{24};$$

$$17. z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{-5+5i}, \quad z_2 = \left(\frac{7-7\sqrt{3}i}{-6-6i} \right)^{28};$$

$$18. z_1 = \frac{-6+6i}{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}, \quad z_2 = \left(\frac{8-8\sqrt{3}i}{11+11i} \right)^{24};$$

$$19. z_1 = \frac{3\sqrt{3}-3i}{-7-7i}, \quad z_2 = \left(\frac{-12-12i}{\sqrt{3}+i} \right)^{40};$$

$$20. z_1 = \frac{-11+11i}{\sqrt{2}-i\sqrt{6}}, \quad z_2 = \left(\frac{-5\sqrt{3}-15i}{2-2i} \right)^{28};$$

$$21. z_1 = \frac{-8-8\sqrt{3}i}{3+3i}, \quad z_2 = \left(\frac{-11+11i}{-3-i\sqrt{3}} \right)^{20};$$

$$22. z_1 = \frac{-9+9i}{1-i\sqrt{3}}, \quad z_2 = \left(\frac{5\sqrt{3}+15i}{8-8i} \right)^{60};$$

$$23. z_1 = \frac{6-2\sqrt{3}i}{5+5i}, \quad z_2 = \left(\frac{-5\sqrt{3}-15i}{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}} \right)^{48};$$

$$24. z_1 = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}i}{-1-i\sqrt{3}}, \quad z_2 = \left(\frac{-2\sqrt{3}-2i}{-1-i} \right)^{42};$$

$$25. z_1 = \frac{-2\sqrt{3} + 2i}{-5 + 5i}, \quad z_2 = \left(\frac{-12 - i4\sqrt{3}}{3 - 3i} \right)^{10};$$

$$26. z_1 = \frac{-4 + 4\sqrt{3}i}{-3 - 3i}, \quad z_2 = \left(\frac{\sqrt{5} + i\sqrt{15}}{6 - 6i} \right)^{24};$$

$$27. z_1 = \frac{-7 + 7i}{8 - 8\sqrt{3}i}, \quad z_2 = \left(\frac{-5 + 5i}{2\sqrt{3} - 2i} \right)^{20};$$

$$28. z_1 = \frac{-12 - 12i}{1 - \sqrt{3}i}, \quad z_2 = \left(\frac{-5\sqrt{3} + 15i}{2 - 2i} \right)^{10};$$

$$29. z_1 = \frac{5\sqrt{3} - 15i}{2 + 2i}, \quad z_2 = \left(\frac{-\sqrt{15} + i\sqrt{5}}{4 - 4i} \right)^{28};$$

$$30. z_1 = \frac{-\sqrt{3} + 3i}{-4 - 4i}, \quad z_2 = \left(\frac{5 + 5i}{-6\sqrt{3} - 6i} \right)^{20}.$$

Задача VII. Найти действительные решения уравнений.

1. $(1 + i)x + (-2 + 5i)y = -4 + 17i;$
2. $12[(2x + i)(1 + i) + (x + y)(3 - 2i)] = 17 + 6i;$
3. $(4 + 2i)x + (5 - 3i)y = 13 + i;$
4. $(3x - i)(2 + i) + (x - iy)(1 + 2i) = 5 + 6i;$
5. $(2 + i)x - (1 - i)y = 7 + 8i;$
6. $(-2 + 3i)x + (3 - 5i)y = -9 + 14i;$
7. $(x - 2i)(3 + i) + (7 - i)(x - y) = 2 - i;$
8. $(1 + i)x + (-2 + 5i)y = -4 + 17i;$
9. $(x - iy)i^2 + (2 - 3i)(x + y) = 3 - i;$
10. $(x + i)(i - 1) - y(x + 1) = 5 + 3i;$
11. $(3x - i)(2 - i) + (x - iy)(1 + 2i) = 3 + 6i;$
12. $2(x - yi)(1 - 3i) = 20i^5;$
13. $(4 + 2i)x + (5 - 3i)y = 17 + i;$

14. $(2 - yi)x + (4 + i)xi = 6 + 2i$;
15. $3x(-1 + i) - (x + y)(2 - i) = 7 - 2i$;
16. $(2x - i)(3 + i) - (y - x)(5 - 2i) = -2 + 7i$;
17. $xi + (2x - i)(3 + i) - y(1 + i) = 10 - 6i$;
18. $(-3 + i)(x - 2y) + y(-1 + 2i) = i^3 + 8$;
19. $(2 + i)(i^3 - 1)x + (5 - i)(y + 2i) = 12i^9$;
20. $(x - yi)(2 + i) + i^2(-y + i) = 5$;
21. $(3 - 2i)x + (i - 1)(y + 1) = 3 - 5i$;
22. $(4 - 3i)(x + y) + (2 + i)(x - y) = 10i$;
23. $xy(1 - i) + x(2 - 3i) + y(i - x) = 4 - i$;
24. $(x + 2i)(3 - i) + y(i^3 - 3i^4) = -1 + i$;
25. $(2 + i)(x - yi) - (1 + i)(y - xi) = -6 + 3i$;
26. $(2 - 3i)x + (2 + 3i)(x - yi) = -1 - 2i$;
27. $(1 - i)(x - 3i) + y(2 - i) + xi = 2 - i$;
28. $(1 - i)(x + 3) - (2 + i)(y - 2) = -2 + 2i$;
29. $(2x + i)(1 - i) + yi^3(i - 4) = 6 + 11i$;
30. $(y + xi)(5 - 2i) + (x - y)(2 - 3i) = 5 - i$.

Задача VIII. Найти все значения корней уравнения и изобразить их точками на комплексной плоскости.

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------|
| 1. $z^3 + 8i = 0$; | 16. $z^3 - \frac{i}{216} = 0$; |
| 2. $z^3 + \frac{1}{8} = 0$; | 17. $z^3 + \frac{i}{64} = 0$; |
| 3. $z^3 + 27 = 0$; | 18. $z^3 + 216i = 0$; |
| 4. $z^3 - 8i = 0$; | 19. $z^4 + 16 = 0$; |
| 5. $z^3 - \frac{i}{125} = 0$; | 20. $z^3 + 64i = 0$; |

6. $z^4 + 81 = 0;$

7. $z^3 + 125i = 0;$

8. $z^3 + \frac{i}{8} = 0;$

9. $z^3 + 27i = 0;$

10. $z^4 + 256 = 0;$

11. $z^3 - 216i = 0;$

12. $z^3 + 125 = 0;$

13. $z^3 - 27i = 0;$

14. $z^3 - 125i = 0;$

15. $z^4 + 64 = 0;$

21. $z^3 + \frac{i}{125} = 0;$

22. $z^3 - \frac{i}{8} = 0;$

23. $z^3 - 64i = 0;$

24. $z^3 + \frac{i}{27} = 0;$

25. $z^3 - \frac{i}{64} = 0;$

26. $z^4 + 16i = 0;$

27. $z^4 + \frac{1}{64} = 0;$

28. $z^3 - \frac{i}{27} = 0;$

29. $z^3 + \frac{i}{216} = 0;$

30. $z^3 + \frac{1}{125} = 0.$

Задача IX. Решить биквадратные уравнения.

1. $2z^4 + z^2 - 3 = 0;$

2. $z^4 + 7z^2 + 6 = 0;$

3. $z^4 - z^2 - 2 = 0;$

4. $3z^4 + 4z^2 + 1 = 0;$

5. $z^4 + 4z^2 + 3 = 0;$

6. $5z^4 - z^2 - 4 = 0;$

7. $z^4 + 18z^2 + 81 = 0;$

8. $z^4 - z^2 - 6 = 0;$

16. $z^4 + 3z^2 - 4 = 0;$

17. $z^4 + 11z^2 + 24 = 0;$

18. $6z^4 + 5z^2 + 1 = 0;$

19. $z^4 - 4z^2 - 12 = 0;$

20. $4z^4 - 3z^2 - 1 = 0;$

21. $4z^4 + z^2 - 5 = 0;$

22. $z^4 - 2z^2 - 8 = 0;$

23. $z^4 + 6z^2 - 7 = 0;$

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| 9. $z^4 + 8z^2 - 20 = 0;$ | 24. $z^4 + 3z^2 - 18 = 0;$ |
| 10. $2z^4 - 3z^2 - 2 = 0;$ | 25. $z^4 - 2z^2 - 15 = 0;$ |
| 11. $z^4 + 3z^2 - 10 = 0;$ | 26. $z^4 + 5z^2 + 4 = 0;$ |
| 12. $3z^4 - 2z^2 - 8 = 0;$ | 27. $3z^4 - 7z^2 + 4 = 0;$ |
| 13. $2z^4 - z^2 - 6 = 0;$ | 28. $9z^4 - 8z^2 - 1 = 0;$ |
| 14. $6z^4 + z^2 - 2 = 0;$ | 29. $z^4 + 8z^2 - 9 = 0;$ |
| 15. $z^4 + 5z^2 - 6 = 0;$ | 30. $z^4 + 5z^2 - 36 = 0.$ |

Задача X. Найти все значения корня.

- | | | |
|--|---|--|
| 1. $\sqrt[4]{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}};$ | 2. $\sqrt[4]{8-i8\sqrt{3}};$ | 3. $\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}};$ |
| 4. $\sqrt[4]{\frac{1-i\sqrt{3}}{32}};$ | 5. $\sqrt[4]{\frac{-1-i\sqrt{3}}{32}};$ | 6. $\sqrt[4]{-4-i4\sqrt{3}};$ |
| 7. $\sqrt[4]{-128+i128\sqrt{3}};$ | 8. $\sqrt[4]{\frac{-1+i\sqrt{3}}{32}};$ | 9. $\sqrt[4]{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}};$ |
| 10. $\sqrt[3]{-2-2i};$ | 11. $\sqrt[4]{2\sqrt{3}-2i};$ | 12. $\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}};$ |
| 13. $\sqrt[4]{-3\sqrt{3}+3i};$ | 14. $\sqrt[4]{8+i8\sqrt{3}};$ | 15. $\sqrt[3]{-4+i4\sqrt{3}};$ |
| 16. $\sqrt[4]{-128-i128\sqrt{3}};$ | 17. $\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}};$ | 18. $\sqrt[4]{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}};$ |
| 19. $\sqrt[3]{-13,5\sqrt{5}-i\cdot 13,5\cdot \sqrt{2}};$ | 20. $\sqrt[4]{128-i\sqrt{3}\cdot 128};$ | 21. $\sqrt[4]{8-i8\sqrt{3}};$ |
| 22. $\sqrt[4]{-2\sqrt{3}+2i};$ | 23. $\sqrt[4]{-2\sqrt{3}-2i};$ | 24. $\sqrt[4]{-15+i5\sqrt{3}};$ |
| 25. $\sqrt[4]{\frac{1+i\sqrt{3}}{32}};$ | 26. $\sqrt[4]{4-i4\sqrt{3}};$ | 27. $\sqrt[3]{2+2i};$ |
| 28. $\sqrt[4]{-6+i6\sqrt{3}};$ | 29. $\sqrt[4]{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}};$ | 30. $\sqrt[4]{-6\sqrt{3}+6i}.$ |

Задача XI. Указать какие линии определяются уравнением:

- 1) $|z| - 3 \operatorname{Im} z = 6$;
- 2) $|z - i| + |z + i| = 4$;
- 3) $|z| = 1 + \operatorname{Re} z$;
- 4) $|z + 2| = 2|z - i|$;
- 5) $|z - i| = |z + 2|$;
- 6) $\operatorname{Re}(1 + z) - |z| = 0$;
- 7) $\left| \frac{z - i}{z + i} \right| = 1$;
- 8) $|\operatorname{Re} z| = \operatorname{Im} z$;
- 9) $|z - 1| + |z + 1| = 4$;
- 10) $\operatorname{Re}(z^2 - z) = 0$;
- 11) $\frac{1}{\operatorname{Re} z^2} = 2$;
- 12) $\operatorname{Im} z^2 = 2$;
- 13) $|z + 3| = 2|z - 2|$;
- 14) $|z - i| = |z + 1|$;
- 15) $2 \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} \bar{z} = 1$;
- 16) $\operatorname{Im} \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$;
- 17) $2 \operatorname{Im} z + |z|^2 = 0$;
- 18) $z^2 + \bar{z}^2 = 1$;
- 19) $\left| \frac{z + 2i}{z - 2i} \right| = \sqrt{2}$;
- 20) $\operatorname{Re} z = |z| + 1$;
- 21) $\operatorname{Re} \bar{z}^2 + 2 \operatorname{Re} z = 3$;
- 22) $\operatorname{Re} \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{4}$;
- 23) $|z + 2| + |\bar{z} + 2| = 4$;
- 24) $\left| \frac{z - i}{z + i} \right| = 2$;
- 25) $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{1}{6}$;
- 26) $\operatorname{Im} \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{2}$;
- 27) $1 - z^2 = \bar{z}^2$;
- 28) $|\bar{z} - 2| + |\bar{z} + 2| = 4$;
- 29) $\operatorname{Im} \bar{z}^2 + 2 = 0$;
- 30) $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{1}{8}$.

Задача XII. Дан вектор, изображающий комплексное число z_1 . Его растянули в t раз и повернули на угол φ . Найдите комплексное число z_2 , соответствующее новому вектору. Постройте полученные векторы.

- 1) $z_1 = 1 + i, \quad t = \sqrt{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$;

$$2) \quad z_1 = 2 + 3i, \quad t = 2, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2};$$

$$3) \quad z_1 = -2 + i, \quad t = 3, \quad \varphi = \pi;$$

$$4) \quad z_1 = -1 + 2i, \quad t = 2, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2};$$

$$5) \quad z_1 = -1 - i, \quad t = \sqrt{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{3};$$

$$6) \quad z_1 = -1 + i, \quad t = \sqrt{2}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{3};$$

$$7) \quad z_1 = 2 + i, \quad t = 2, \quad \varphi = \frac{\pi}{2};$$

$$8) \quad z_1 = 3 + 2i, \quad t = 3, \quad \varphi = \pi;$$

$$9) \quad z_1 = -2 - i, \quad t = 2, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2};$$

$$10) \quad z_1 = 2 + i, \quad t = 3, \quad \varphi = \frac{\pi}{2};$$

$$11) \quad z_1 = 1 - i, \quad t = 2\sqrt{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{3};$$

$$12) \quad z_1 = 1 - 2i, \quad t = 2, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2};$$

$$13) \quad z_1 = -3 + 2i, \quad t = 1,5, \quad \varphi = -\pi;$$

$$14) \quad z_1 = 2 - i, \quad t = 2, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2};$$

$$15) \quad z_1 = -3 - 2i, \quad t = 2, \quad \varphi = \pi;$$

$$16) \quad z_1 = -2 - i, \quad t = 3, \quad \varphi = \frac{\pi}{2};$$

$$17) \quad z_1 = -2 + 3i, \quad t = 1,5, \quad \varphi = \pi;$$

$$18) \quad z_1 = 2 + 2i, \quad t = \sqrt{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4};$$

$$19) \quad z_1 = -2 + 3i, \quad t = 2, \quad \varphi = \frac{\pi}{2};$$

$$20) z_1 = -3 + 3i, \quad t = \sqrt{2}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{4};$$

$$21) z_1 = -2 - 3i, \quad t = 2, \quad \varphi = \pi;$$

$$22) z_1 = -2 + 2i, \quad t = 2\sqrt{2}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{4};$$

$$23) z_1 = 4 + 3i, \quad t = 2, \quad \varphi = -\pi;$$

$$24) z_1 = 3 - 3i, \quad t = 2\sqrt{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4};$$

$$25) z_1 = -4 + 3i, \quad t = 1,5, \quad \varphi = \frac{\pi}{2};$$

$$26) z_1 = -2 - 2i, \quad t = \sqrt{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4};$$

$$27) z_1 = -4 - 3i, \quad t = 2, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2};$$

$$28) z_1 = -3 - 3i, \quad t = \sqrt{2}, \quad \varphi = -\pi;$$

$$29) z_1 = 2 - 2i, \quad t = 2\sqrt{2}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{4};$$

$$30) z_1 = 4 - 3i, \quad t = 2, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Задача XIII.

- 1) При каком условии сумма двух комплексных чисел есть действительное число?
- 2) Может ли сумма квадратов двух комплексных чисел быть отрицательной?
- 3) При каком условии разность двух комплексных чисел есть действительное число?
- 4) Могут ли быть сопряженными действительное и мнимое число?

- 5) При каком условии сумма двух комплексных чисел есть чисто мнимое число?
- 6) Какое число сопряжено с $\bar{z}$?
- 7) Могут ли быть сопряженными два чисто мнимых числа?
- 8) При каком условии разность двух комплексных чисел есть чисто мнимое число?
- 9) Может ли сумма квадратов двух комплексных чисел быть отрицательной?
- 10) Что можно сказать о модулях двух сопряженных комплексных чисел?
- 11) Пусть $\arg z = \varphi$. Чему равен $\arg \bar{z}$; $\arg(-z)$?
- 12) Какое множество точек комплексной плоскости задается условием: $\arg z = 0$?
- 13) В каких пределах заключено главное значение аргумента комплексного числа, расположенного в I четверти?
- 14) Чему равен аргумент любого отрицательного числа?
- 15) Чему равен аргумент нуля?
- 16) Чему равен аргумент чисто мнимого числа?
- 17) В каких пределах заключено главное значение аргумента комплексного числа, расположенного во второй четверти?
- 18) В каких пределах заключено главное значение аргумента комплексного числа, расположенного в III четверти?

- 19) Как располагаются векторы, изображающие два комплексных числа, если модуль суммы этих чисел равен сумме их модулей?
- 20) В каких пределах заключено главное значение аргумента комплексного числа, расположенного в IV четверти?
- 21) Приведите пример комплексных чисел, которым соответствуют два перпендикулярных вектора.
- 22) Напишите условие того, что точка z_1 находится на расстоянии 2 от точки z_2 .
- 23) Чему равен аргумент любого положительного числа?
- 24) Какое множество точек комплексной плоскости задается условием $\arg z = \pi$?
- 25) При каком условии квадрат комплексного числа $x + iy$ является чисто мнимым числом?
- 26) Может ли квадратное уравнение с действительными коэффициентами иметь корни $1 + i$ и $1 + 2i$?
- 27) Что можно сказать о комплексных числах, для которых соответствующие точки расположены на прямой, параллельной оси y ?
- 28) Как располагаются векторы, изображающие два комплексных числа, если модуль суммы этих чисел равен разности модулей?

- 29) Что можно сказать о комплексных числах, для которых соответствующие точки расположены на прямой, параллельной оси x ?
- 30) Как изменится модуль и аргумент комплексного числа z в результате умножения его на $2i$?
- 31) При каких условиях модуль разности двух комплексных чисел равен сумме модулей уменьшаемого и вычитаемого?
- 32) Как изменится модуль и аргумент комплексного числа z в результате умножения его на $(-3i)$?
- 33) Как изменится модуль и аргумент комплексного числа z в результате деления его на $4i$?

Библиографический список

1. Краснов М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. / М.Л. Краснов, А.И. Кисилев, Г.И. Макаренко. – М.: Наука, 1981. – 485 с.
2. Алгебра и начала анализа. / под ред. Г.Н. Яковлева. – Ч. 2. – М.: Наука, 1981. – 412 с.
3. Гурский Г.И. Руководство к решению задач по высшей математике. / Г.И. Гурский. – Ч.1. – Минск: Высшая школа, 1989. – 302 с.