

Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный технический университет

ПРЕДЕЛ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Методические указания и контрольные задания
к практическим занятиям
по дисциплине «Высшая математика»
для студентов всех специальностей и форм обучения

Часть 1

Севастополь
2011

Предел. Непрерывность. Метод. указания и контрольные задания к практическим занятиям по дисциплине «Высшая математика» для студентов всех специальностей и форм обучения: в 2 ч. / Сост. Л.Н. Григорюк. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2011. Ч. 1. – 56 с.

Целью методических указаний является усвоение студентами основных теоретических сведений по теории пределов и привитие практических навыков при решении задач, связанных с вычислением пределов и исследованием функций на непрерывность.

Методические указания предназначены для студентов всех специальностей и форм обучения.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры «Высшая математика» 29.12.2010 г., протокол № 6.

Допущено учебно-методическим центром и научно-методическим советом СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: Агаханянц Р.Е., старший преподаватель кафедры высшей математики

СОДЕРЖАНИЕ

1. Предел последовательности.....	4
2. Свойства сходящихся последовательностей	7
3. Предел функции.....	17
4. Свойства бесконечно малых функций.....	19
5. Теоремы о пределе функции	20
6. Первый замечательный предел	25
7. Второй замечательный предел.....	31
8. Сравнение бесконечно малых функций.....	37
9. Односторонние пределы.....	44
10. Непрерывность функции.....	46
10.1. Непрерывность функции в точке	46
10.2. Классификация точек разрыва	47
10.3. Некоторые свойства непрерывных функций.....	49
Библиографический список	56

1. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Если каждому натуральному числу n по определенному закону поставлено в соответствие некоторое число x_n , то говорят, что определена бесконечная числовая последовательность (или просто последовательность) $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ и обозначают ее символом x_n .

Число x_n называется членом (элементом) последовательности, а n - номером члена.

Рассмотрим несколько последовательностей, изобразим их графически и по рисункам попробуем сделать вывод о поведении последовательности при достаточно больших n .

Пример 1. Изобразить графически несколько членов последовательности $\{x_n\} = \frac{n}{n+1}$ или

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}, \frac{10}{11}, \frac{11}{12}, \frac{12}{13}, \frac{13}{14}, \frac{14}{15}, \dots$$

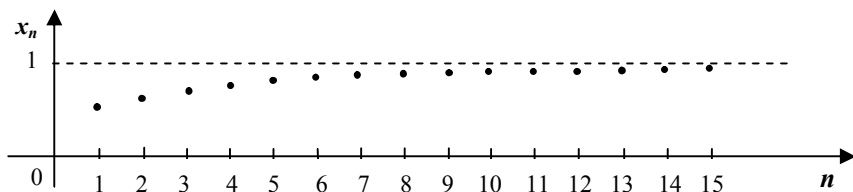


Рисунок 1

Видно, что члены последовательности «накапливаются» возле значения 1. Иначе, точка 1 является «точкой сгущения» (т.е. все x_n «близки» к 1). Понятие «близко» - «не близко» следует уточнить, ведь оно может быть различным при различных условиях.

Если модуль расстояния между точками x_1 и x_2 меньше какого-то $\varepsilon > 0$, выбранного нами,

$$|x_1 - x_2| < \varepsilon,$$

то считаем, что x_1 и x_2 близки. В нашем примере «близки» понимаем как $|x_n - 1| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Модуль расстояния между точками x_n и 1 меньше того числа ε , которое нас устраивает. Учтем, что неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$ можно записать так:

$$-\varepsilon < x_n - 1 < \varepsilon,$$

$$1 - \varepsilon < x_n < 1 + \varepsilon.$$

Если возьмем окрестность точки 1 при $\varepsilon = \frac{1}{4}$, тогда в интервал $\left(1 - \frac{1}{4}; 1 + \frac{1}{4}\right)$, т.е. $\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$ попадут все члены последовательности кроме трех: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$.

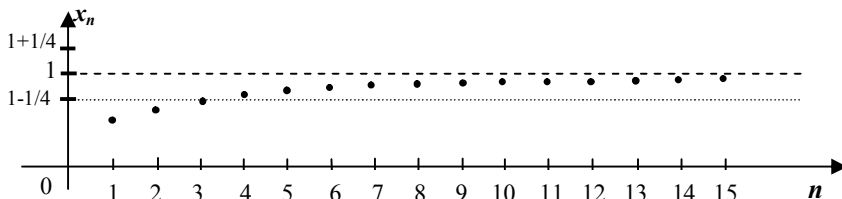


Рисунок 2

Если возьмем $\varepsilon = \frac{1}{10}$, то в интервал $\left(1 - \frac{1}{10}; 1 + \frac{1}{10}\right)$, т.е. $\left(\frac{9}{10}; \frac{11}{10}\right)$ попадут все члены последовательности, кроме девяти первых

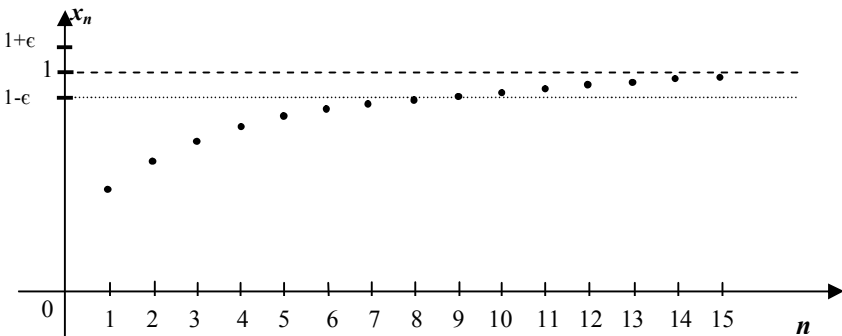


Рисунок 3

С изменением ε различное количество членов последовательности попадают в интервал $(1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon)$, но во всех случаях число членов, входящих в этот интервал будет бесконечным.

Пример 2. $\{x_n\} = n^{(-1)^n}$.

Запишем несколько членов последовательности

1; 2; $\frac{1}{3}$; 4; $\frac{1}{5}$; 6; $\frac{1}{7}$; 8; $\frac{1}{9}$; 10.

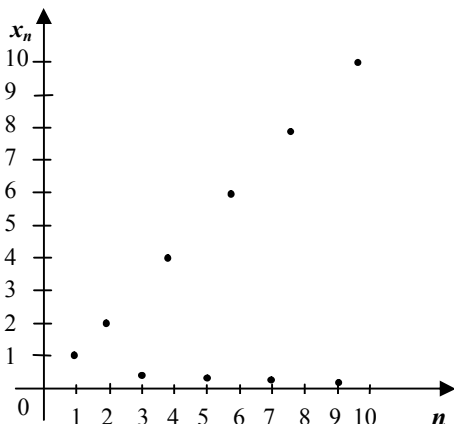


Рисунок 4

Для этой последовательности нет «точки сгущения», вокруг которой «скапливались» бы все члены последовательности. В примере № 1 для всех больших n члены последовательности оказываются близкими к 1. Во втором примере при больших n члены последовательности ведут себя по-разному. Некоторые значения x_n оказываются близкими к нулю (при нечетных n), при четных номерах n значения x_n удаляются от нуля.

Определение. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется натуральное число N , зависящее от ε , такое, что все члены последовательности с номерами n , большими N , удовлетворяют неравенству

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Геометрически это значит, что в произвольной ε -окрестности точки a содержится бесконечное множество элементов последовательности $\{x_n\}$, а вне этой окрестности или нет ни одного элемента, или лишь конечное число элементов (пример 1).

Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел a , то ее называют сходящейся, в противном случае – расходящейся.

Точку, изображающую геометрически число a , называют предельной точкой последовательности. Предельная точка может как принадлежать, так и не принадлежать последовательности.

2. СВОЙСТВА СХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

1) Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел a , то этот предел единственный

2) Если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, то для произвольного действительного числа c существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (cx_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

3) Если существуют $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, то существует

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;

в) если $y_n \neq 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$, то существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$.

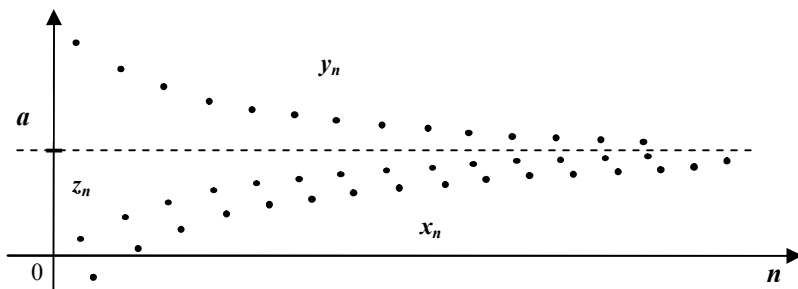
4) Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ и, начиная с некоторого n выполняются неравенства $x_n \leq z_n \leq y_n$,

тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$. Это теорема о «зажатой» последовательности.

Эту теорему еще называют «теорема о двух милиционерах».

$a \leftarrow x_n \leftarrow z_n \leftarrow y_n$ (см. рисунок 5).

а)



б)

Рисунок 5 – Иллюстрация к теореме

Напомним пределы таких числовых последовательностей

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 1. \quad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1, \\ \infty, & |q| > 1, \\ 1, & q = 1. \end{cases}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Пример 3. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{n}{n+1}$ имеет предел, равный единице.

Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Чтобы доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$, нужно указать номер N такой, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$, т.е.

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| -\frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon. \quad \text{Откуда } n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Пусть, например, $\varepsilon = \frac{1}{20}$. Тогда $N = E\left(\frac{1}{\frac{1}{20}} - 1\right) = 19$, то есть

для всех $n > 19$ следует, что $\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$.

При $n = 20$ получим $\left| \frac{20}{20+1} - 1 \right| = \frac{1}{21} < \frac{1}{20}$. Следовательно, в интервале $\left(1 - \frac{1}{20}, 1 + \frac{1}{20}\right)$, т.е. $\left(\frac{19}{20}, \frac{21}{20}\right)$ находится бесконечное множество элементов данной последовательности, а вне этой последовательности – не более 19 элементов.

Если $\varepsilon = \frac{1}{4}$, то $N = E\left(\frac{1}{\frac{1}{4}} - 1\right) = 3$.

При всех $n > 3$ $\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \frac{1}{4}$.

Иллюстрацией этого является рисунок 2 к примеру 1. Вне окрестности $\left(1 - \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4}\right)$, т.е. $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$ находится только три элемента последовательности, остальные (бесконечное множество элементов) находятся в этой окрестности. И рисунок 1 тоже служит иллюстрацией того, что члены последовательности $x_n = \frac{n}{n+1}$ «скапливаются» возле значения 1.

Итак, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ доказано.

Докажем, что число 2 не является пределом последовательности $x_n = \frac{n}{n+1}$.

Рассмотрим модуль разности x_n и числа 2.

$$\left| \frac{n}{n+1} - 2 \right| = \left| \frac{n - 2n - 2}{n+1} \right| = \left| -\frac{n+2}{n+1} \right| = \frac{n+2}{n+1} = \frac{(n+1)+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}.$$

При любом натуральном n сумма $1 + \frac{1}{n+1} > 1$, т.е. $\left| \frac{n}{n+1} - 2 \right| > 1$.

Левая часть неравенства не может быть меньше произвольно заданного положительного числа ε . Значит, число 2 не является пределом последовательности.

При отыскании пределов применяются свойства сходящихся последовательностей. Однако их непосредственное применение бывает в особых ситуациях, когда нарушаются условия теорем. Получаются выражения, которые называются неопределенностями, например

$$\frac{\infty}{\infty}; \quad \infty - \infty; \quad 0 \cdot \infty.$$

Уточним название неопределенность.

В случае $\infty + \infty = \infty$, $\infty \cdot \infty = \infty$ нет затруднений, нет неопределенности. Но возьмем отношение $\frac{\infty}{\infty}$. Так как $\infty \cdot a = \infty$,

то $\frac{\infty}{\infty} = a$, где a - любое число, отличное от нуля. Так как a -

любое, то называем отношение $\frac{\infty}{\infty}$ неопределенностью.

Аналогично, для любого числа a

$$\infty + a = \infty, \quad \text{тогда} \quad \infty - \infty = a$$

a - любое число, значит $\infty - \infty$ - неопределенность.

Нужно провести преобразования, чтобы вычислить предел, т.е. раскрыть неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty - \infty$; $0 \cdot \infty$.

При этом можно получить в ответе и ноль, и число, отличное от нуля, и бесконечность. Общего правила раскрытия неопределенностей указать нельзя.

Рассмотрим некоторые приемы раскрытия неопределенностей.

Пример 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^4 - 5n^3 - 4n^2 + 1)$.

Неясно, к чему стремится выражение в скобках при $n \rightarrow \infty$, так как n^4 стремится к $+\infty$, а выражение $(-5n^3 - 4n^2)$ стремится к $-\infty$. Вынесем за скобки n^4 , так как это старшая степень

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^4 - 5n^3 - 4n^2 + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n^4 \left(1 - \frac{5}{n} - \frac{4}{n^2} + \frac{1}{n^4} \right) \right] = +\infty.$$

$$\text{Множитель } n^4 \rightarrow +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} = 0, \\ \left(1 - \frac{5}{n} - \frac{4}{n^2} + \frac{1}{n^4} \right) \rightarrow 1 \neq 0.$$

Можно показать, что предел многочлена при $n \rightarrow \infty$ будет равен пределу члена наиболее высокой степени многочлена.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_m(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 n^m = \pm \infty.$$

Пример 5. а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 + 8}{5n^2 + 1}$, б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n + 8}{5n^2 + 1}$, в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^3 + 8}{5n^2 + 1}$.

Числитель и знаменатель каждой дроби представляют собой расходящиеся последовательности: числитель дроби стремится к бесконечности, знаменатель дроби тоже стремится к бесконечности. Это неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$, непосредственно этот предел найти нельзя. Вынесем множитель n^2 за скобки и в

числителе, и в знаменателе (n^2 - старшая степень и знаменателя, и числителя).

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 + 8}{5n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(7 + \frac{8}{n^2})}{n^2(5 + \frac{1}{n^2})}.$$

В числителе $\lim_{n \rightarrow \infty} 7 = 7$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^2} = 0$, значит,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(7 + \frac{8}{n^2} \right) = 7 + 0 = 7.$$

В знаменателе $\lim_{n \rightarrow \infty} 5 = 5$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{1}{n^2} \right) = 5 + 0 = 5$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 + 8}{5n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 + \frac{8}{n^2}}{5 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(7 + \frac{8}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{1}{n^2} \right)} = \frac{7}{5}.$$

Обратим внимание на то, что $\frac{7}{5}$ - это отношение коэффициентов при старших степенях числителя и знаменателя

$$б) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n + 8}{5n^2 + 1} = .$$

Как числитель, так и знаменатель дроби стремятся к бесконечности, старшая степень знаменателя n^2 , делим на n^2 числитель и знаменатель дроби:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n + 8}{5n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\frac{7}{n} + \frac{8}{n^2} \right)}{n^2 \left(5 + \frac{1}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{7}{n} + \frac{8}{n^2}}{5 + \frac{1}{n^2}}.$$

В числителе $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^2} = 0$, а для знаменателя используем результаты предыдущего примера а)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n + 8}{5n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{7}{n} + \frac{8}{n^2}}{5 + \frac{1}{n^2}} = \frac{0 + 0}{5 + 0} = \frac{0}{5} = 0.$$

Заметим, что степень числителя дроби меньше степени знаменателя.

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^3 + 8}{5n^2 + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right].$$

Числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности, старшая степень знаменателя n^2 , вынесем n^2 за скобки и в числителе, и в знаменателе.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^3 + 8}{5n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(7n + \frac{8}{n^2} \right)}{n^2 \left(5 + \frac{1}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n + \frac{8}{n^2}}{5 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\infty}{5} = \infty, \text{ так как}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 7n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{1}{n^2} \right) = 5.$$

В этом примере степень числителя больше степени знаменателя.

Во всех трех примерах неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ раскрывали, разделив числитель и знаменатель на старшую степень знаменателя. Можно показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^m + a_1 n^{m-1} + \dots + a_{m-1} n + a_m}{b_0 n^l + b_1 n^{l-1} + \dots + b_{l-1} n + b_l} = \begin{cases} 0, & m < l; \\ \frac{a_0}{b_0}, & m = l; \\ \infty, & m > l. \end{cases}$$

Предел частного двух многочленов при $n \rightarrow \infty$ равен отношению коэффициентов при старших членах, если степени числителя и знаменателя равны; предел этот равен нулю, если степень числителя меньше степени знаменателя и равен бесконечности, если степень числителя больше степени знаменателя.

Аналогично можно поступать при отыскании предела дроби (при $n \rightarrow \infty$), содержащей иррациональности.

$$\text{Пример 6. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12n + 5}{\sqrt[3]{27n^3 + 6n^2 + 8}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right].$$

При $n \rightarrow \infty$ числитель и знаменатель стремятся к бесконечности, получаем неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Так как в числителе многочлен первой степени и наивысшая степень знаменателя тоже первая, то можно воспользоваться сформулированным правилом и записать

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12n + 5}{\sqrt[3]{27n^3 + 6n^2 + 8}} = \frac{12}{\sqrt[3]{27}} = \frac{12}{3} = 4.$$

Можно было решить иначе:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12n + 5}{\sqrt[3]{27n^3 + 6n^2 + 8}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(12 + \frac{5}{n})}{\sqrt[3]{n^3(27 + \frac{6}{n} + \frac{8}{n^3})}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(12 + \frac{5}{n})}{n \cdot \sqrt[3]{27 + \frac{6}{n} + \frac{8}{n^3}}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12 + \frac{5}{n}}{\sqrt[3]{27 + \frac{6}{n} + \frac{8}{n^3}}} = \frac{12}{\sqrt[3]{27}} = 4, \text{ так как } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(12 + \frac{5}{n}\right) = 12 + 0 = 12, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n} &= 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^3} = 0. \end{aligned}$$

Пример 7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{n^5 + 2} + 3\sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt[6]{n^4 + 2} + \sqrt{n^3 + 1}} \stackrel{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} 0.$

Получили неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Старшая степень числителя $\frac{5}{4}$, а старшая степень знаменателя $\frac{3}{2}$. Так как $\frac{3}{2} > \frac{5}{4}$, то предел частного при $n \rightarrow \infty$ равен 0.

Пример 8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6\sqrt{n} + \sqrt[5]{32n^{10} + 1}}{(n + \sqrt[4]{n})\sqrt[3]{n^3 - 1}} \stackrel{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} .$

При $n \rightarrow \infty$ и числитель, и знаменатель дроби стремятся к бесконечности. Старшая степень n^2 в числителе, в знаменателе тоже n^2 . Делим на n^2 числитель и знаменатель, значит, выражение, стоящее под знаком кубического корня нужно

разделить на n^6 , а выражение, стоящее под знаком корня пятой степени, нужно разделить на n^{10} .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6 \sqrt[n]{n} + \sqrt[5]{32n^{10} + 1} \left[\frac{\infty}{\infty} \right]}{\left(n + \sqrt[4]{n} \right) \sqrt[3]{n^3 - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{7/6}} + \sqrt[5]{32 + \frac{1}{n^{10}}}}{\left(1 + \frac{1}{n^{3/4}} \right) \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n^3}}} = \frac{\sqrt[5]{32}}{1} = 2.$$

Можно было воспользоваться сформулированным правилом и найти предел быстрее.

Пример 9. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+3} - \sqrt{n-1}).$

Здесь неопределенность $[\infty - \infty]$. Можно вынести за скобку $\sqrt{n}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+3} - \sqrt{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(\sqrt{2 + \frac{3}{n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right) = +\infty, \text{ так как}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + \frac{3}{n}} = 2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \frac{1}{n}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty.$$

Можно было решить иначе.

При вычислении пределов, содержащих иррациональности, часто используют перевод иррациональности из знаменателя в числитель или наоборот. Напомним, что для выражения $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ сопряженным будет $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$, их произведение $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$ не будет содержать иррациональности. Эти преобразования значительно облегчают вычисление пределов.

Домножим и разделим выражение $(\sqrt{2n+3} - \sqrt{n-1})$ на сопряженное $(\sqrt{2n+3} + \sqrt{n-1})$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+3} - \sqrt{n-1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2n+3} - \sqrt{n-1})(\sqrt{2n+3} + \sqrt{n-1})}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{n-1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3 - (n-1)}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+4}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{n-1}} = +\infty, \text{ так как степень} \end{aligned}$$

числителя больше степени знаменателя.

Пример 10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^2+5)(n^4+2)} - \sqrt{n^6-3n^3+5}}{n}.$

Так как в числителе неопределенность $\infty - \infty$, то домножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю.

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\sqrt{(n^2+5)(n^4+2)} - \sqrt{n^6-3n^3+5}\right)}{n\left(\sqrt{(n^2+5)(n^4+2)} + \sqrt{n^6-3n^3+5}\right)} = \\ &= \frac{5n^4 + 3n^3 + 2n^2 + 5}{n\left(\sqrt{(n^2+5)(n^4+2)} + \sqrt{n^6-3n^3+5}\right)} = \\ &= \frac{5 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{5}{n}}{\sqrt{\left(1 + \frac{5}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^4}\right)} + \sqrt{1 - \frac{3}{n^3} + \frac{5}{n^6}}}. \end{aligned}$$

Делим числитель и знаменатель на n^4 .

Подкоренное выражение делим на n^6 .

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^3} \left(\sqrt{(n^2+5)(n^4+2)} + \sqrt{n^6-3n^3+5} \right) = \sqrt{\frac{(n^2+5)(n^4+2)}{n^6}} + \\ &+ \sqrt{\frac{n^6-3n^3+5}{n^6}} = \sqrt{\left(1 + \frac{5}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^4}\right)} + \sqrt{1 - \frac{3}{n^3} + \frac{5}{n^6}}. \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{5}{n^4}}{\sqrt{\left(1 + \frac{5}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^4}\right)} + \sqrt{1 - \frac{3}{n^3} + \frac{5}{n^6}}} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Пример 11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n-1} \right)^{[\infty-\infty]} =$

Для раскрытия неопределенности домножим и разделим выражение $\left(\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n-1}\right)$ на неполный квадрат суммы этого выражения

$$\frac{\left(\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n-1}\right)\left(\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n(n-1)} + \sqrt[3]{(n-1)^2}\right)}{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n(n-1)} + \sqrt[3]{(n-1)^2}} =$$

$$= \frac{n - (n - 1)}{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n(n-1)} + \sqrt[3]{(n-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n(n-1)} + \sqrt[3]{(n-1)^2}}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n(n-1)} + \sqrt[3]{(n-1)^2}} = 0.$$

Решая примеры №№ 9-11, убедились, что раскрывая неопределенность $[\infty - \infty]$, можно получить в ответе и число, и ноль и бесконечность.

3. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Определение. Число A называется пределом функции $f(x)$ при x , стремящемся к x_0 , если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = x_0$, за исключением, может быть точки x_0 и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$ справедливо неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Пишут $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Определение означает, что при значениях x , близких к x_0 , значения функции $f(x)$ близки к A .

Запись $|x - x_0| > 0$ означает, что $x \neq x_0$. Иначе, число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если для произвольной ε -окрестности точки $y = A$ существует δ -окрестность точки $x = x_0$, для всех точек которой (кроме, может быть, точки $x = x_0$) значения функции $f(x)$ попадают в ε -окрестность точки A .

Размер δ -окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ определяется размером ε -окрестности $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$, т.е. δ зависит от ε , δ есть функция от ε , что подчеркивается обозначением $\delta(\varepsilon)$.

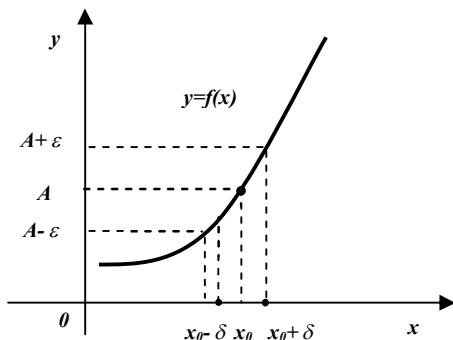


Рисунок 6

На рисунке 6 график функции $f(x)$ дает геометрическую иллюстрацию равенства $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

Для $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ график размещается внутри полосы, ограниченной прямыми $y = A + \varepsilon$ и $y = A - \varepsilon$.

Функцию $f(x)$ называют бесконечно большой при $x \rightarrow x_0$, если для произвольного сколь угодно большого $M > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x , для которых $0 < |x - x_0| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x)| > M$.

Это обозначают так: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

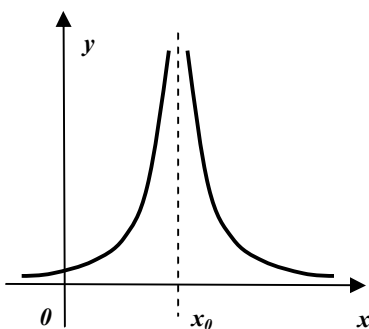


Рисунок 7

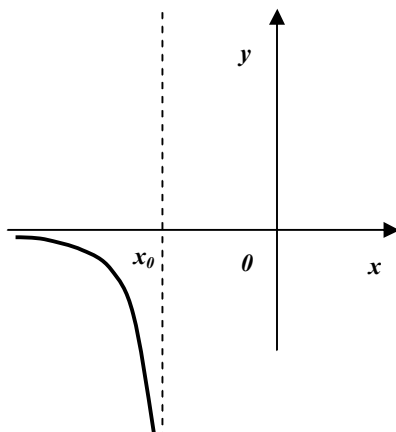


Рисунок 8

Если $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow x_0$ и при этом $f(x)$ принимает только положительные значения или только отрицательные значения, то соответственно пишут:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \text{ (см. рисунки 7 и 8).}$$

Функцию $\alpha(x)$ называют бесконечно малой при $x \rightarrow x_0$, если ее предел равен нулю при $x \rightarrow x_0$, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0.$$

4. СВОЙСТВА БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЙ

1) Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

2) Произведение бесконечно малой функции $\alpha(x)$ на функцию ограниченную $f(x)$ есть функция бесконечно малая.

3) Произведение конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

4) Частное $\frac{\alpha(x)}{f(x)}$ от деления величины бесконечно малой $\alpha(x)$ на функцию, предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно малая.

Если же рассмотреть произведение бесконечно малой $\alpha(x)$ и функции $f(x)$, стремящейся к ∞ , то получаем выражение, которое называется неопределенностью $0 \cdot \infty$. Устраняют такие неопределенности различными преобразованиями.

5. ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛЕ ФУНКЦИИ

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы при $x \rightarrow x_0$, тогда имеют место соотношения.

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} c = c, \quad (c = \text{const}).$$

$$4) \lim_{x \rightarrow x_0} (cf(x)) = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad c = \text{const}.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0.$$

Если же функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют конечных пределов или получаются выражения, которые в общем виде не дают результата, то снова получаем неопределенность.

При нахождении предела функции в случае, если c - постоянная величина, то выполняются такие правила:

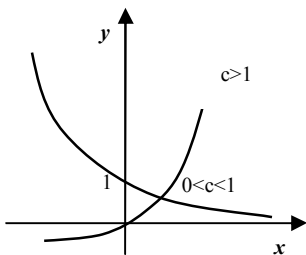


Рисунок 9

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{c}{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{c} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} c^x = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < c < 1 \\ +\infty, & \text{если } c > 1. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} c^x = \begin{cases} +\infty, & \text{если } 0 < c < 1 \\ 0, & \text{если } c > 1. \end{cases}$$

При нахождении предела функции

$$R(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} \quad \text{при } x \rightarrow \infty \quad (\text{неопределенность})$$

типа $\frac{\infty}{\infty}$), числитель и знаменатель можно разделить на x^m .

В общем случае

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } n < m \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{если } n = m \\ \infty, & \text{если } n > m. \end{cases}$$

Пример 12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2} + \sqrt[3]{2x-1}} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \frac{2}{\sqrt{3}}.$

Так как высшая степень числителя $\sqrt{x}$, знаменателя тоже $\sqrt{x}$, то предел равен отношению коэффициентов $\frac{2}{\sqrt{3}}.$

Пример 13. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 + 1} \right) \stackrel{[\infty - \infty]}{=} .$

И при $x \rightarrow +\infty$, и при $x \rightarrow -\infty$ получаем разность двух бесконечно больших функций. Умножим и разделим это выражение на $\left(\sqrt{x^2 + 4x} + \sqrt{x^2 + 1} \right).$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 + 1} \right) \left(\sqrt{x^2 + 4x} + \sqrt{x^2 + 1} \right)}{\left(\sqrt{x^2 + 4x} + \sqrt{x^2 + 1} \right)} &= \\ = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 4x - x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + 4x} + \sqrt{x^2 + 1}} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x - 1}{\sqrt{x^2 + 4x} + \sqrt{x^2 + 1}} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \\ = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \left(4 - \frac{1}{x} \right)}{\left| x \right| \left(\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right)} \cdot & \end{aligned}$$

Так как $\sqrt{x^2} = |x|$, то

$$\sqrt{x^2 + 4x} = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{4}{x}\right)} = |x| \sqrt{1 + \frac{4}{x}}.$$

$$\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(4 - \frac{1}{x})}{|x| \left(\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(4 - \frac{1}{x})}{x \left(\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4 - \frac{1}{x})}{\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{4}{1+1} = 2. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(4 - \frac{1}{x})}{|x| \left(\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right)} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(4 - \frac{1}{x})}{x \left(\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right)} = - \frac{4}{1+1} = -2.$$

$$\text{Учили, что } |x| = \begin{cases} x, & \text{при } x \geq 0 \\ -x, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Если $P(x)$ и $Q(x)$ - целые многочлены и $P(x_0) \neq 0$ или $Q(x_0) \neq 0$, то предел рациональной дроби $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$ находим непосредственно.

Если же $P(x)$ и $Q(x)$ при $x \rightarrow x_0$ не имеют конечных пределов или получаются выражения, которые не дают окончательного результата в общем виде, то снова получается неопределенность. Можем получить следующие виды неопределенностей: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$.

Рассмотрим некоторые приемы раскрытия неопределенностей.

Если при вычислении предела $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$ $Q(x_0) = P(x_0) = 0$,

то получаем неопределенность $\frac{0}{0}$ и нужно дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$

сократить один или несколько раз на бином $(x - x_0)$. В этом случае $(x - x_0)$ - критический множитель.

Пример 14. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^3 - 8} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} .$

Предел числителя при $x \rightarrow 2$ равен нулю, предел знаменателя при $x \rightarrow 2$ равен нулю, получили неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Разложим на множители числитель и знаменатель. Для $x \neq 2$ можно сократить на общий множитель $(x - 2)$, который обращает в нуль знаменатель и числитель (т.е. критический множитель).

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 4)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 4}{x^2 + 2x + 4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) \rightarrow \left[\frac{0}{0}\right]}{\psi(x) \rightarrow \left[\frac{0}{0}\right]} \Rightarrow \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{(x - a)\varphi_1(x)}{(x - a)\psi_1(x)}.$$

Предел функции не зависит от того, определена функция в предельной точке или нет.

Рассмотрим примеры.

Пример 15. а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x - 2} - 1}{x^2 - 4x + 3};$ б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5 - x} - 2}{\sqrt{2 - x} - 1}.$

В этих примерах при подстановке вместо x предельного значения получаем нули в числителе и в знаменателе.

Если при отыскании предела выражения, содержащего иррациональности, получаем неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$, значит, критический множитель содержится в скрытой форме, и для его выделения нужно провести преобразования. Если иррациональность содержится в числителе, то нужно перевести ее в знаменатель, а если в знаменателе, то перевести в числитель, домножая и числитель и знаменатель на выражение, сопряженное иррациональности.

Во всех случаях иррациональности остаются, но получаем сумму; при вычислении предела уже не будет неопределенности.

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x - 2} - 1}{x^2 - 4x + 3} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x - 2} - 1)(\sqrt{x - 2} + 1)}{(x - 1)(x - 3)(\sqrt{x - 2} + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2-1}{x-3} \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-1)(\sqrt{x-2}+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x-3} \cdot \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}.$$

Домножили числитель и знаменатель на выражение $(\sqrt{x-2}+1)$, числитель освободили от иррациональности, а в знаменателе множитель $(\sqrt{x-2}+1)$ (сумма!) не стремится к нулю при $x \rightarrow 3$.

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x}-2 \begin{smallmatrix} [0 \\ 0 \end{smallmatrix}}{\sqrt{2-x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(...)}{(x-1)(...)}.$$

Для выделения критического множителя нужно домножить числитель и знаменатель на $(\sqrt{5-x}+2)(\sqrt{2-x}+1)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{5-x}-2)(\sqrt{5-x}+2)(\sqrt{2-x}+1)}{(\sqrt{2-x}-1)(\sqrt{2-x}+1)(\sqrt{5-x}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(5-x-4)(\sqrt{2-x}+1)}{(2-x-1)(\sqrt{5-x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(\sqrt{2-x}+1)}{(1-x)(\sqrt{5-x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x}+1}{\sqrt{5-x}+2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Пример 16. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1 \begin{smallmatrix} [0 \\ 0 \end{smallmatrix}}{\sqrt{1+x}-1} =$$

При $x \rightarrow 0$ получили неопределенность $\begin{smallmatrix} [0 \\ 0 \end{smallmatrix}$. Домножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю $\left(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1\right)$, (т.е. дополним до разности кубов), и на выражение $(\sqrt{1+x}+1)$, сопряженное знаменателю.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt{1+x}-1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{1+x}-1)(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1)(\sqrt{1+x}+1)}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left((\sqrt[3]{1+x})^3 - 1^3\right)(\sqrt{1+x}+1)}{(1+x-1)(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Можно решить этот пример, используя замену переменной. В числителе иррациональность $\sqrt[3]{1+x}$, в знаменателе $\sqrt{1+x}$. Для показателей степеней, т.е. дробей $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$ наименьший общий знаменатель будет 6. Поэтому вводим замену $(1+x) = t^6$. При $x \rightarrow 0$ новая переменная $t \rightarrow 1$. Оформить лучше так:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{\sqrt{1+x} - 1} = \left[\begin{array}{l} 1+x = t^6 \\ \sqrt[3]{1+x} = t^2 \quad x \rightarrow 0 \\ \sqrt{1+x} = t^3 \quad t \rightarrow 1 \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 - 1}{t^3 - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)(t^2 + t + 1)} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t+1}{t^2 + t + 1} = \frac{2}{3}.$$

6. ПЕРВЫЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

Предел отношения синуса угла к величине угла при стремлении угла к нулю равен единице

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad (*)$$

(x — радианная мера угла).

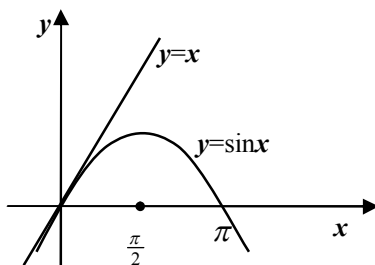


Рисунок 10

При наличии неопределенности $\left[\frac{0}{0} \right]$ помимо изложенных ранее методов (разложение на множители, перевод иррациональности из числителя в знаменатель и наоборот) для устранения неопределенности используется первый

замечательный предел. Роль независимой переменной x может играть некоторая функция $\varphi(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$.

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(\varphi(x))}{\varphi(x)} = 1$, если $\varphi(x) \rightarrow 0$, $\sin \varphi(x) \rightarrow 0$, то есть помимо

предела $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ всякий предел вида

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(\varphi(x))}{\varphi(x)} \quad (**)$$

равен 1, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$.

Например, каждый из пределов

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x}, \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x - \pi)}{x - \pi} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 3x + 2)}{x^2 - 3x + 2} = 1.$$

Этого нельзя сказать ни об одном из пределов

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x},$$

хотя в первых двух примерах $\sin 7x \rightarrow 0$, $\sin^2 x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$ и нужно преобразовать выражения, стоящие под знаком предела, чтобы применить первый замечательный предел.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] \quad \text{Домножим и разделим эту дробь на 7.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x \cdot 7}{7x} = 7 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} = 7 \cdot 1 = 7.$$

Использовали соотношение (**), так как при $x \rightarrow 0$ $\sin 7x \rightarrow 0$ и $7x \rightarrow 0$.

Рассмотрим примеры.

Пример 17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x}$.

При $x \rightarrow 0$ и числитель, и знаменатель стремятся к нулю. Чтобы применить формулу (**), домножим числитель и знаменатель на число k .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k \sin kx}{kx} = k \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx} = k \cdot 1 = k.$$

Следовательно, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k.$

Используя этот результат, можно быстрее решить пример

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x} = 7, \text{ так как } k = 7.$$

Пример 18.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 1 \cdot 0 = 0.$$

Пример 19. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \sin x = .$

Так как $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, а $|\sin x| \leq 1$, то можно применить теорему о пределе произведения величины бесконечно малой на величину ограниченную

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \sin x = 0.$$

Пример 20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = .$

Так как $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Итак, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$

Этим результатом мы будем пользоваться в дальнейшем, раскрывая неопределенности вида $\left[\frac{0}{0} \right]$, содержащие тригонометрические функции.

$$\text{Пример 21. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} mx}{\sin nx} \stackrel{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{=} \quad \begin{array}{l} m = \text{const}, \\ n = \text{const}. \end{array}$$

Поделив числитель и знаменатель на x , получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} mx}{\sin nx} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} mx \cdot x}{x \cdot \sin nx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} mx}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin nx} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} mx}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin nx}{x}} = \frac{m}{n}, \text{ так как} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} mx}{x} = m, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{x} = n.$$

$$\text{Пример 22. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{1 - \cos x} \stackrel{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{=} .$$

Так как $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$, $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$, то

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{x}{2} = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin \frac{x}{2}}{x}} \cdot 1 = 2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = 4. \end{aligned}$$

$$\text{Пример 23. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+9}-3} \stackrel{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{=} .$$

При $x \rightarrow 0$ знаменатель и числитель стремятся к нулю. Освободимся от иррациональности в знаменателе, домножив числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю, т.е. $(\sqrt{x+9}+3)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+9}-3} &\stackrel{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\sqrt{x+9}+3)}{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x+9-9} \times \\ &\times \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+9}+3) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot 6 = 1 \cdot 6 = 6. \end{aligned}$$

Пример 24. $\lim_{x \rightarrow 2} (2-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} = \frac{0}{0}$.

При $x \rightarrow 2$ получили неопределенность $0 \cdot \infty$. Для раскрытия неопределенности сделаем замену переменной. Так как $x \rightarrow 2$, то и замену удобно сделать такую $x - 2 = t$, тогда $x = t + 2$. При $x \rightarrow 2$ $t \rightarrow 0$; $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} (t + 2) \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi t}{4} \right) =$

$$= -\operatorname{ctg} \frac{\pi t}{4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\begin{array}{l} x - 2 = t, \quad x = t + 2, \\ x \rightarrow 2, \quad t \rightarrow 0. \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} t \operatorname{ctg} \frac{\pi t}{4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin \frac{\pi t}{4}} \cdot \cos \frac{\pi t}{4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin \frac{\pi t}{4}}{t}} \cdot 1 = \frac{1}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}.$$

Видно, что удобно заменить аргумент функции так, чтобы новый аргумент стремился к нулю.

Пример 25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \frac{0}{0}$.

При $x \rightarrow 0$ получаем неопределенность $\frac{0}{0}$. Чтобы использовать первый замечательный предел, сделаем замену переменной.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{ll} \arcsin x = t & x = \sin t \\ \sin(\arcsin x) = \sin t & x \rightarrow 0, t \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1.$$

Получили результат, которым будем пользоваться в дальнейшем.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

Пример 26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \frac{0}{0}$.

Сделав замену $\arctg x = t$ и решая аналогично предыдущему примеру, получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x} = 1.$$

Пример 27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x \sin x - 2 \sin^2 x}{7x^2 - 4x \sin x + \sin^2 x} = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}.$

Разделим числитель и знаменатель на x^2 , чтобы использовать первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x \sin x - 2 \sin^2 x}{7x^2 - 4x \sin x + \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 3 \frac{\sin x}{x} - 2 \frac{\sin^2 x}{x^2}}{7 - 4 \frac{\sin x}{x} + \frac{\sin^2 x}{x^2}} = \frac{1 + 3 - 2}{7 - 4 + 1} = \frac{1}{2}, \quad \text{так}$$

как $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 1.$

При нахождении пределов вида $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{\varphi(x)} = C$ нужно учитывать:

1) Если существуют пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B$,

$A > 0$, то $C = A^B$.

2) Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq 1$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \pm \infty$, то предел

$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{\varphi(x)}$ находим так:

если $A < 1$, $\varphi(x) \rightarrow +\infty$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\varphi(x)} = 0$;

если $A > 1$, $\varphi(x) \rightarrow +\infty$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\varphi(x)} = \infty$.

3) Случай, когда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$ рассмотрим

отдельно, так как получаем неопределенность 1^∞ .

Если бы в основании была бы точно единица, то в любой степени получили бы единицу. Но в нашем случае единице равен предел выражения в основании, поэтому получаем неопределенность 1^∞ .

7. ВТОРОЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

Многие задачи математического анализа связаны со вторым замечательным пределом

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \stackrel{[1^\infty]}{=} e.$$

Если в равенстве положить $\frac{1}{x} = \alpha$, $x = \frac{1}{\alpha}$ при $x \rightarrow \infty$,

$$\alpha \rightarrow 0, \text{ то } \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \stackrel{[1^\infty]}{=} e.$$

Этот предел раскрывает неопределенность вида 1^∞ .

Для предела $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$ (аналогично для $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$)

характерно, что выражение в скобках $(1 + \alpha)$, т.е. единица плюс бесконечно малая величина, возводится в степень, которая является обратной величиной для бесконечно малой (показатель степени – бесконечно большая величина).

Следовательно, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e$.

Такая же структура каждого из пределов

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 5x)^{\frac{1}{5x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \cos x)^{-\frac{1}{\cos x}} \text{ и}$$

поэтому все они равны e .

$$[1^\infty] - \text{ищем число } e.$$

Пример 28. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{7x} \stackrel{[1^\infty]}{=} .$

При $x \rightarrow \infty$ $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, величина $\left(1 + \frac{1}{x}\right) \rightarrow 1$, $7x \rightarrow \infty$. Получим неопределенность $[1^\infty]$. Преобразуем функцию так, чтобы использовать второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{7x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right]^7 = e^7.$$

Пример 29. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{mx} \stackrel{[\infty]}{=} .$

Сделаем замену переменной: $\frac{k}{x} = \alpha$, $x = \frac{k}{\alpha}$, при $x \rightarrow \infty$,

$\alpha \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{mx} = \begin{bmatrix} \frac{k}{x} = \alpha, & x = \frac{k}{\alpha} \\ \alpha \rightarrow 0, & x \rightarrow \infty \end{bmatrix} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{mk}{\alpha}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \right]^{mk} = e^{mk}.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)} \rightarrow \infty} \stackrel{\downarrow 0}{=} e.$$

Пример 30. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+2} \right)^{2x+1} .$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-3}{x+2} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x+1) = \infty$. Получили неопределенность 1^∞ .

Преобразуем функцию так, чтобы использовать 2-й замечательный предел. Выделим в дроби $\frac{x-3}{x+2}$ целую часть.

$$\frac{x-3}{x+2} = 1 + \frac{x-3}{x+2} - 1 = 1 + \frac{x-3-x-2}{x+2} = 1 + \frac{-5}{x+2}.$$

Это общий прием. А можно выделить целую часть иначе, если функция представляет собой отношение многочленов.

$$\frac{x-3}{x+2} = \frac{(x+2)-2-3}{x+2} = \frac{x+2}{x+2} + \frac{-5}{x+2} = 1 + \frac{-5}{x+2}.$$

Записали в числителе то, что записано в знаменателе, а затем, чтобы равенство не нарушилось, вычли (-5).

Итак, $\frac{x-3}{x+2} = 1 + \frac{-5}{x+2}.$

При $x \rightarrow \infty$ выражение $\frac{-5}{x+2}$ стремится к нулю.

Используем формулу $\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}} \xrightarrow{\downarrow 0} e$.

Будем считать $f(x) = \frac{-5}{x+2}$.

Для построения выражения $(1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}}$

запишем $\left(1 + \frac{-5}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{-5}}$, а чтобы равенство не нарушилось, то

запишем $\left[\left(1 + \frac{-5}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{-5}}\right]^{-\frac{5}{x+2}(2x+1)}$.

$$\begin{aligned} \text{Итак, } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{2x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-5}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{-5}}\right]^{-\frac{5(2x+1)}{x+2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{5(2x+1)}{x+2}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-10x-5}{x+2}} = e^{-10}. \end{aligned}$$

Предел выражения в квадратных скобках $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-5}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{-5}} = e$,

так как предел основания степени равен числу, то можно перейти к пределу в показателе степени.

Можно этот пример решить иначе. Разделим числитель и знаменатель дроби $\frac{x-3}{x+2}$ на x , получим $\frac{1 + \frac{-3}{x}}{1 + \frac{2}{x}}$.

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{-3}{x}}{1 + \frac{2}{x}}\right)^{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{-3}{x}\right)^{2x+1}}{\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{2x+1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{-3}{x}\right)^{2x+1}}{\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{2x+1}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-3}{x}\right)^{-\frac{x}{3}}\right]^{-\frac{3}{x}(2x+1)}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{\frac{2}{x}(2x+1)}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{6x-3}{x}}}{\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{4x+2}{x}}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-6-\frac{3}{x}}}{\lim_{x \rightarrow \infty} e^{4+\frac{2}{x}}} = \frac{e^{-6}}{e^4} = e^{-10}.$$

Предел выражений в квадратных скобках и в числителе, и в знаменателе равен e .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{x}\right)^{-\frac{x}{3}} = e, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = e.$$

Пример 31. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{3x+4}\right)^{x^2}$ (нет неопределенности).

Предел выражения в скобках $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{3x+4} = \frac{2}{3}$, так как степень числителя равна степени знаменателя; а показатель степени x^2 при $x \rightarrow \infty$ стремится к бесконечности.

Поэтому используем формулу $\lim c^\infty = 0$, если $|c| < 1$ и вычисляем предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{3x+4}\right)^{x^2} = 0$.

Пример 32. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+4}{2x^2+5}\right)^{x^2-1}$ (нет неопределенности).

Вычисляем непосредственно $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+4}{2x^2+5} = \frac{3}{2}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2-1) = \infty$.

Так как $\lim c^\infty = \infty$, если $|c| > 1$, то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+4}{2x^2+5}\right)^{x^2-1} = \infty.$$

Пример 33. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = [1^\infty]$.

При $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $\sin x \rightarrow 1$, $\operatorname{tg} x \rightarrow \infty$, ищем e . Для удобства

сделаем замену переменной $x - \frac{\pi}{2} = t$, $x = \frac{\pi}{2} + t$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = \lim_{\substack{x - \frac{\pi}{2} = t \\ x = \frac{\pi}{2} + t \\ x \rightarrow \frac{\pi}{2}, t \rightarrow 0}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} + t \right) \right)^{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + t \right)} = \lim_{t \rightarrow 0} (\cos t)^{-\operatorname{ctg} t}.$$

Для построения выражения $(1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}}$ запишем

$$(\cos t)^{-\operatorname{ctg} t} = (1 + \cos t - 1)^{-\operatorname{ctg} t} = (1 - (1 - \cos t))^{-\operatorname{ctg} t} =$$

$$= \left[1 + \left(-2 \sin^2 \frac{t}{2} \right) \right]^{\frac{1}{-2 \sin^2 \frac{t}{2}}} = \left[1 + \left(-2 \sin^2 \frac{t}{2} \right) \right]^{\frac{-2 \sin^2 \frac{t}{2} \cdot \cos t}{\sin t}} =$$

$$\text{При } t \rightarrow 0 \quad \left(-2 \sin^2 \frac{t}{2} \right) \rightarrow 0, \text{ а } \left(-\frac{1}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} \right) \rightarrow \infty.$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (\cos t)^{-\operatorname{ctg} t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[1 + \left(-2 \sin^2 \frac{t}{2} \right) \right]^{\frac{1}{-2 \sin^2 \frac{t}{2}}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[1 + \left(-2 \sin^2 \frac{t}{2} \right) \right]^{\frac{-2 \sin^2 \frac{t}{2} \cdot \cos t}{\sin t}} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} e^{\frac{2 \sin^2 \frac{t}{2} \cdot \cos t}{2 \sin^2 \frac{t}{2} \cdot \cos \frac{t}{2}}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \sin \frac{t}{2} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t}{\cos \frac{t}{2}}} = e^{0 \cdot 1} = e^0 = 1.$$

Можно решить иначе. Представим $\sin x = (1 - \cos^2 x)^{\frac{1}{2}}$.
Получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x)^{\frac{\operatorname{tg} x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[(1 - \cos^2 x)^{\frac{-1}{\cos^2 x}} \right]^{\frac{-\cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x}{2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} e^{\frac{-\cos^2 x \sin x}{2 \cos x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{-\sin x \cos x}{2} \right)} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

Для вычисления предела функции в точке используют соотношения (которые доказываются позже в разделе «Непрерывность функций»)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log_c f(x) = \log_c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \log_c x = -\infty, \quad c > 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_c x = +\infty, \quad c > 1.$$

Часто используют формулы, которые являются следствиями второго замечательного предела

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a > 0.$$

Пример 34. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(2x+1) - \ln(x+2)] \stackrel{[\infty-\infty]}{=} =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(2x+1) - \ln(x+2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{2x+1}{x+2} = \ln \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x+2} = \ln 2.$$

Пример 35. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e} \stackrel{\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right]}{=} \left[\begin{smallmatrix} x - e = t, & x \rightarrow e \\ x = t + e, & t \rightarrow 0 \end{smallmatrix} \right] =$ (так как

$x - e \rightarrow 0$ при $x \rightarrow e$ то применяем замену $x - e = t$).

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+e) - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+e) - \ln e}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{e+t}{e}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{t}{e})}{t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{t}{e})}{e \cdot \frac{t}{e}} = \frac{1}{e} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{t}{e})}{\frac{t}{e}} = \frac{1}{e} \cdot 1 = \frac{1}{e}, \text{ так как } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1.$$

Пример 36.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1} \stackrel{\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right]}{=} \left[\begin{smallmatrix} x - 1 = t, & x \rightarrow 1 \\ x = t + 1, & t \rightarrow 0 \end{smallmatrix} \right] =$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{t+1} - e}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e(e^t - 1)}{t} = e \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = e \cdot 1 = e.$$

8. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЙ

Если существует предел отношения двух бесконечно малых функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$, то их можно сравнить.

1. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются

бесконечно малыми одного порядка, обозначаем

$$\alpha(x) = O(\beta(x)).$$

Пример 37. $\alpha(x) = \sqrt{9+x} - 3$, $\beta(x) = x$, $x \rightarrow x_0$.

Сравним $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, которые являются бесконечно малыми при $x \rightarrow 0$. Найдем предел.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{9+x} - 3)(\sqrt{9+x} + 3)}{x(\sqrt{9+x} + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9+x-9}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{9+x} + 3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Значит, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые функции одного порядка.

$$\text{Иначе: } \alpha(x) = O(\beta(x)).$$

2. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ является бесконечно малой

функцией более высокого порядка малости, чем $\beta(x)$, обозначаем

$$\alpha(x) = o(\beta(x)).$$

Пример 38. $\alpha(x) = \operatorname{tg} x^3$, $\beta(x) = x$, $x \rightarrow 0$.

Сравним $\alpha(x)$ и $\beta(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x^3}{x^3} \cdot x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x^3}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 1 \cdot 0 = 0.$$

Следовательно, $\alpha(x) = \operatorname{tg} x^3$ является бесконечно малой высшего порядка малости по сравнению с x .

$$\operatorname{tg} x^3 = o(x).$$

3. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то $\alpha(x)$ является бесконечно малой

более низкого порядка малости, чем $\beta(x)$, т.е.

$$\beta(x) = o(\alpha(x)).$$

Пример 39. $\alpha(x) = \sin x$, $\beta(x) = x^2$, $x \rightarrow 0$.

$$\text{Найдем } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = 1 \cdot \infty = \infty.$$

Значит, $\alpha(x) = \sin x$ есть бесконечно малая низшего порядка малости по сравнению с $\beta(x) = x^2$.

$$x^2 = o(\sin x).$$

Пример 40. $\alpha(x) = x \cos \frac{1}{x^2}$, $\beta(x) = x$, $x \rightarrow 0$.

$$\text{Сравним эти бесконечно малые, т.е. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos \frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x^2}.$$

Этот предел не существует. Значит, бесконечно малая $\alpha(x) = x \cos \frac{1}{x^2}$ не сравнима с бесконечно малой $\beta(x) = x$ при $x \rightarrow 0$.

4. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — эквивалентные

бесконечно малые, обозначают $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Пример 41. $\alpha(x) = \sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}$, $\beta(x) = x$, $x \rightarrow 0$.

При $x \rightarrow 0$ $\alpha(x) \rightarrow 0$, $\beta(x) \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x})(\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x})}{x(\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - 1 + \sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x} \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1. \quad \alpha(x) \sim \beta(x).$$

Используя уже рассмотренные пределы

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x \ln a} = 1 \quad \text{можно записать при } x \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \sin x &\sim x, \quad \operatorname{tg} x \sim x, & \arcsin x &\sim x, & \operatorname{arctg} x &\sim x, \\ e^x - 1 &\sim x, & \ln(1+x) &\sim x, & a^x - 1 &\sim x \ln a. \end{aligned}$$

Отсюда вытекают более общие соотношения:

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$, то при $x \rightarrow x_0$ имеет место

Таблица эквивалентности бесконечно малых

$\sin u(x) \sim u(x),$	$\operatorname{tg} u(x) \sim u(x),$	$\arcsin u(x) \sim u(x),$
$\operatorname{arctg} u(x) \sim u(x),$	$e^{u(x)} - 1 \sim u(x),$	$\ln(1 + u(x)) \sim u(x),$
$a^{u(x)} - 1 \sim u(x) \ln a,$	$\sqrt[n]{1 + u(x)} - 1 \sim \frac{u(x)}{n}.$	

При вычислении предела отношения двух бесконечно малых функций полезно использовать следующие теоремы:

1) Предел отношения бесконечно малых функций при $x \rightarrow x_0$ не изменится, если каждую из них или только одну заменить другой, эквивалентной бесконечно малой, т.е.

Если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \rightarrow x_0$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

2) Если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \rightarrow x_0$, то

$$\alpha(x)\beta(x) \sim \alpha_1(x)\beta_1(x).$$

Утверждение справедливо для произведения любого конечного числа бесконечно малых функций.

Пример 42.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\ln(1+4x)} \stackrel{[0]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{4x} = \frac{5}{4}, \text{ так как } \sin 5x \sim 5x, \ln(1+4x) \sim 4x.$$

$$\textbf{Пример 43.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \sqrt[3]{x} \arcsin(8x^2) \stackrel{[0]}{=}}{(\operatorname{arctg} \sqrt{x})^2 (e^{\sqrt{x}} - 1)} =$$

Пользуясь таблицей эквивалентности бесконечно малых, получим:

$$\operatorname{tg} \sqrt[3]{x} \sim \sqrt[3]{x}, \arcsin(8x^2) \sim 8x^2, \operatorname{arctg} \sqrt{x} \sim \sqrt{x}, e^{\sqrt{x}} - 1 \sim \sqrt{x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \sqrt[3]{x} \arcsin(8x^2)}{(\operatorname{arctg} \sqrt{x})^2 (e^{\sqrt{x}} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} \cdot 8x^2}{(\sqrt{x})^2 \cdot \sqrt{x}} = 8 \lim_{x \rightarrow 0} (x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{2}}) = 0.$$

Нужно обратить внимание на то, что если при вычислении предела в сумме (или разности) бесконечно малых функций заменить отдельные слагаемые эквивалентными функциями, то это может привести к неправильному результату.

Пример 44.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3 \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{x^2}{4}}{x^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

А при замене $\operatorname{tg} x$ на x и $\sin x$ на x получили бы $\frac{0}{x^3}$ и правильный ответ не получили бы.

При решении примеров полезно использовать утверждение:

3) В сумме или разности эквивалентные заменить нельзя, так как алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций эквивалентна слагаемому самого низкого порядка малости.

Пример 45. $3 \sin x + 4x^2 + 5x^3 \sim 3 \sin x \sim 3x$ при $x \rightarrow 0$, так как $\sin x$ — бесконечно малая более низкого порядка по сравнению с x^2 и x^3 .

Пример 46. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 \sin x - 2 \sin^5 x + \arcsin^6 x \overset{[0]}{}}{\operatorname{tg} x + 3 \sin^2 x + 5x^4} = .$

В числителе и в знаменателе б/м разных порядков, поэтому $7 \sin x - 2 \sin^5 x + \arcsin^6 x \sim 7 \sin x \sim 7x$;
 $\operatorname{tg} x + 3 \sin^2 x + 5x^4 \sim \operatorname{tg} x \sim x$.

Получим $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 \sin x - 2 \sin^5 x + \arcsin^6 x}{\operatorname{tg} x + 3 \sin^2 x + 5x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 \sin x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{x} = 7$.

Пример 47. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e \overset{[0]}{}}{\sin(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e(e^{x-1} - 1)}{\sin[(x-1)(x+1)]} .$

При $x \rightarrow 1$ числитель и знаменатель являются бесконечно малыми функциями

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e(e^{x-1} - 1)}{\sin(x^2 - 1)} = e \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2 - 1} = e \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)} = e \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{e}{2} .$$

Использовали $e^{x-1} - 1 \sim x - 1$ при $x \rightarrow 1$,
 $\sin(x^2 - 1) \sim (x^2 - 1)$ при $x \rightarrow 1$.

Пример 48. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 - 3x + 3) \overset{[0]}{}}{x - 2} =$

При $x \rightarrow 2$ $\ln(x^2 - 3x + 3) \rightarrow 0$.

Чтобы воспользоваться таблицей эквивалентности, запишем

$$\ln(x^2 - 3x + 3) = \ln(1 + (x^2 - 3x + 2)).$$

$x^2 - 3x + 2 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 2$, поэтому

$$\ln(1 + (x^2 - 3x + 2)) \sim x^2 - 3x + 2 .$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 - 3x + 3)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(1 + (x^2 - 3x + 2))}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-1) = 1 . \end{aligned}$$

Получили, что $\ln(x^2 - 3x + 3) \sim (x - 2)$ при $x \rightarrow 2$.

Пример 49. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(e^{x-1} - 1) \Big|_{\frac{0}{0}}}{\ln x} =$

Так как $x \rightarrow 1$, то критическим множителем будет $(x-1)$, поэтому для удобства сделаем замену $(x-1) = t$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(e^{x-1} - 1) \Big|_{\frac{0}{0}}}{\ln x} = \left[\begin{array}{l} x-1 = t \\ x = t+1 \\ x \rightarrow 1, t \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(e^t - 1)}{\ln(t+1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1.$$

Значит, $\sin(e^{x-1} - 1) \sim \ln x$ при $x \rightarrow 1$.

Для более точного сравнения бесконечно малых функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$ в том случае, когда $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, т.е. $\alpha(x)$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем $\beta(x)$, находят предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = c \neq 0, \infty \quad (k > 0)$.

В этом случае функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой k -го порядка по сравнению с $\beta(x)$

Аналогично вводится понятие бесконечно больших различных порядков.

Пример 50. Пусть $x \rightarrow 0$. Определить порядок следующих бесконечно малых функций $\alpha(x)$ относительно $\beta(x) = x$.

$$\alpha_1(x) = \cos x - \cos 3x.$$

$$\alpha_2(x) = \sqrt{1+x^3} - 1.$$

$$\alpha_3(x) = e^x - \cos x.$$

Чтобы найти порядок малости бесконечно малой $\alpha(x)$ относительно $\beta(x) = x$, нужно установить, при каком k предел

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{x^k}$ будет равняться конечному числу, отличному от нуля.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x \Big|_{\frac{0}{0}}}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \sin 2x}{x^k} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 2x}{x^k} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{k-2}} = 4.$$

Этот предел будет равен числу только при $k = 2$. Значит, $\alpha_1(x)$ имеет порядок малости 2 относительно x .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^3} - 1}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{0}}{x^k} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^k} = \frac{1}{2} \text{ при } k = 3.$$

Использовали $\sqrt[n]{1+u(x)} - 1 \sim \frac{u(x)}{n}$ при $u(x) \rightarrow 0$.

Бесконечно малая $\alpha_2(x)$ имеет порядок малости 3 по сравнению с $\beta(x) = x$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{x^k} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{0}}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) + (1 - \cos x)}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + 2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^k} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^k} + 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^k} + 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{4}}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{k-1}} + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^k} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{k-1}} + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{k-2}} = 1. \end{aligned}$$

Предел будет равен числу, отличному от нуля, только при $k = 1$. Поскольку получили $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{x} = 1$, то $e^x - \cos x \sim x$.

Пример 51. Найти порядок малости бесконечно малой $\alpha(x) = \ln \cos 2x$ относительно $\beta(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$ при $x \rightarrow 0$.

Найдем предел

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{(\sqrt{\operatorname{tg} x})^k} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x - 1 + 1)}{(\operatorname{tg} x)^{\frac{k}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + (-2 \sin^2 x))}{x^{\frac{k}{2}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 x}{x^{\frac{k}{2}}} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^{\frac{k}{2}}} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{\frac{k}{2}-2}} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{\frac{k-4}{2}}} = -2 \quad \text{при} \\ &k = 4. \end{aligned}$$

Иначе: $-2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^{\frac{k}{2}}} = -2$ при $k = 4$.

Приравняли степени числителя и знаменателя $2 = \frac{k}{2} \Rightarrow k = 4$.

Бесконечно малая $\alpha(x) = \ln \cos 2x$ является бесконечно малой функцией порядка 4 относительно бесконечно малой $\beta(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$ при $x \rightarrow 0$.

9. ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ

Если $f(x)$ стремится к пределу A_1 при $x \rightarrow x_0$ так, что x принимает только значения, меньше x , то пишут

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = A_1,$$

и называют A_1 пределом функции $f(x)$ в точке x_0 слева.

Если x принимает значения больше, чем x_0 , то пишут:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = A_2,$$

и называют A_2 пределом функции $f(x)$ в точке x_0 справа.

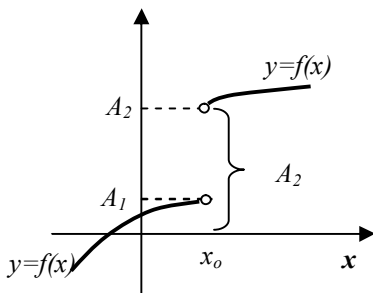


Рисунок 11

Если $x_0 = 0$, то пишут просто $x \rightarrow +0$ или $x \rightarrow -0$ (соответственно $f(+0)$ и $f(-0)$).

Теорема. Для того, чтобы функция $f(x)$ в точке x_0 имела предел, равный A , необходимо и достаточно, чтобы для нее в точке x_0 существовали пределы слева и справа, каждый из которых равен A .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A.$$

Пример 52. Найти односторонние пределы функции

$$f(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq -1 \\ 3x+5, & x > -1 \end{cases} \quad \text{при } x \rightarrow -1.$$

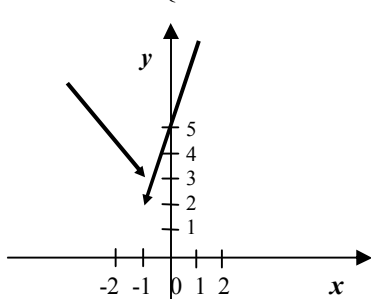


Рисунок 12

Решение. Если $x \leq -1$, то $f(x) = 2 - x$. Следовательно,

$$f(-1-0) = \lim_{x \rightarrow -1-0} (2-x) = 3. \quad \text{Это}$$

найден предел слева при $x \rightarrow -1$.

Если $x > -1$, то $f(x) = 3x + 5$, тогда $f(-1+0) = \lim_{x \rightarrow -1+0} (3x+5) = 2$,

это предел справа.

Пример 53. Найти односторонние пределы функции

$$f(x) = \frac{2}{x-1} \quad \text{при } x \rightarrow 1.$$

Найдем предел слева

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2}{x-1} = -\infty.$$

Если $x \rightarrow 1$, оставаясь меньше единицы, то разность $(x-1)$ будет бесконечно малой отрицательной величиной, обратная функция

$\frac{2}{x-1}$ будет бесконечно большой.

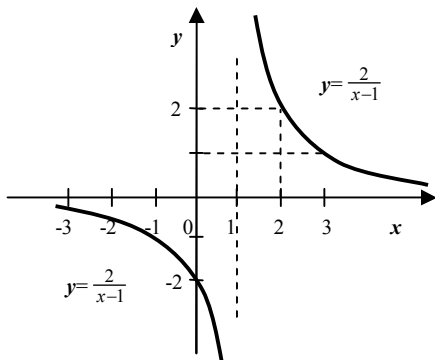


Рисунок 13

Найдем $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2}{x-1} = +\infty$.

Если $x \rightarrow 1+0$, т.е. x стремится к единице, оставаясь больше единицы, то разность $(x-1)$ будет бесконечно малой

положительной величиной, а $\frac{2}{x-1}$ будет бесконечно большой.

10. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

10.1. Непрерывность функции в точке

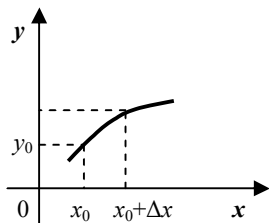


Рисунок 14

Пусть $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 , $y_0 = f(x_0)$. Если аргумент получит приращение Δx и примет значение $x_0 + \Delta x$, то функция получит приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, т.е. бесконечно малому приращению Δx аргумента соответствует бесконечно малое приращение Δy функции в точке x_0 .

Отметим, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$. Предел функции равен функции предела, т.е. в случае непрерывности функции можно менять местами знак функции и знак предела.

Пример 54. Доказать, что функция $y = x^2$ непрерывна в любой точке x_0 .

Доказательство.

Покажем, что для любого $x = x_0$ функция удовлетворяет определению 1.

$$y(x_0) = x_0^2, \quad y(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2.$$

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$$

. Устремим $\Delta x \rightarrow 0$.

Найдем $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0\Delta x + (\Delta x)^2) = 0$, т.е. бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy .

Определение 2. Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0 .

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если

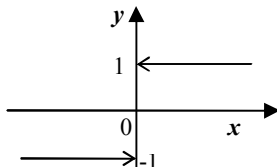
- 1) существует $f(x_0)$;
- 2) существует конечный $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$
существует конечный $f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$
- 3) $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$

Если не выполняется хотя бы одно из этих условий в точке x_0 , то она называется точкой разрыва функции $y = f(x)$.

10.2. Классификация точек разрыва

Если $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ конечны и

$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$, то x_0 - точка разрыва I рода.



Разрыв I рода

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

Рисунок 15

Разность $\Delta f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ называют скачком функции $f(x)$ в точке x_0 .

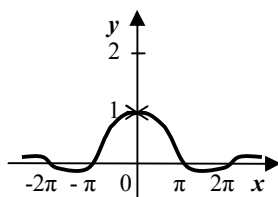
Среди точек разрыва I рода выделяется частный случай.

Если $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$ или

$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$, а функция $f(x)$ не определена

в точке x_0 , то x_0 - точка устранимого разрыва, так как разрыв

можно устранить либо доопределив функцию, либо переопределив ее в точке x_0 .

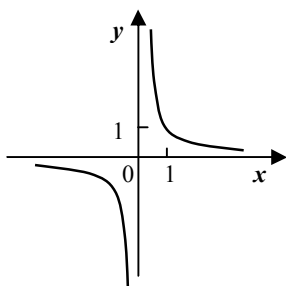


устранимый разрыв

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

Рисунок 16

2) Если хотя бы один из пределов $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ равен ∞ или не существует, то x_0 называют точкой разрыва II рода.



Разрыв II рода

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Рисунок 17

10.3. Некоторые свойства непрерывных функций

Имеют место теоремы.

Теорема 1. Основные элементарные функции непрерывны в области определения.

Опираясь на свойства пределов можно доказать следующие свойства непрерывных функций:

Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в точке x_0 , то:

1) $f_1(x) \pm f_2(x)$ непрерывна в точке x_0 ;

2) $f_1(x) \cdot f_2(x)$ непрерывна в точке x_0 ;

3) $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ непрерывна в точке x_0 ($f_2(x_0) \neq 0$);

4) если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 , $f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то $f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0 .

Используя все эти свойства, можно доказать теорему.

Теорема 2. Всякая элементарная функция непрерывна в любой точке, в которой она определена.

Пример 55. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + 3}{5} & \text{при } x \leq 1 \\ 6 - 5x & \text{при } 1 \leq x < 3 \\ x - 3 & \text{при } x \geq 3 \end{cases} \quad \text{найти точки разрыва, если они}$$

существуют. Определить скачки функций в точках, где имеются разрывы первого рода.

Решение. Область определения функции – вся числовая ось, но применить теорему 2 нельзя, так как данная функция не является элементарной. На интервалах $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$ и $(3, \infty)$ функция непрерывна, а разрывы возможны в тех точках, где

меняется аналитическое задание функции, т.е. в точках $x=1$, $x=3$.

Проверим выполнение определения непрерывности функции в точке для $x=1$.

Значение функции в точке $x=1$ определяется первым аналитическим выражением, т.е. $f(1) = \frac{2 \cdot 1^2 + 3}{5} = 1$. Найдем

$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x)$, т.е. когда $x \rightarrow 1$, оставаясь меньше 1.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1-0 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2x^2 + 3}{5} = 1.$$

При нахождении $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x)$ используем второе аналитическое выражение.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1+0 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (6 - 5x) = 1.$$

Так как $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = f(1)$, то при $x=1$ функция непрерывна.

Рассмотрим точку $x=3$.

Значение функции в точке $x=3$ определяется третьим аналитическим выражением, т.е. $f(3) = 3 - 3 = 0$.

Найдем левосторонний предел $\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x)$, т.е. когда $x \rightarrow 3$, оставаясь меньше 3.

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} (6 - 5x) = 6 - 15 = -9.$$

Найдем правосторонний предел, т.е. $x \rightarrow 3$, оставаясь больше 3.

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} (x - 3) = 0.$$

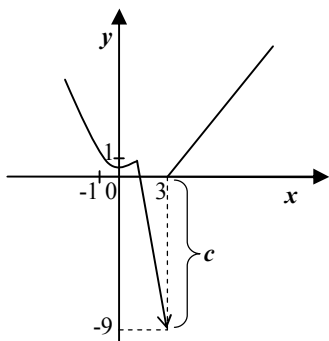


Рисунок 18

Левосторонний и правосторонний пределы конечны, но не равны между собой, поэтому при $x=3$ функция имеет разрыв первого рода.

Найдем скачок функции в точке разрыва

$$c = f(3+0) - f(3-0) = 0 - (-9) = 9.$$

Разрыв функции в точке $x=3$ объясняется разрывом ее графика «по вертикали», а не «по горизонтали» (функция определена на всей числовой оси).

Пример 56. При каком значении a функция $f(x)$ будет непрерывной?

$$f(x) = \begin{cases} 4 \cdot 3^x & \text{при } x < 0, \\ 2a + x & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Функция определена на всей числовой оси, при $x=0$ изменяется аналитическое задание функции. Используя определение непрерывности функции в точке, запишем

$$f(0) = 2a, \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} 4 \cdot 3^x = 4, \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} (2a + x) = 2a.$$

Чтобы функция была непрерывна при $x=0$, должно выполняться равенство:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x), \text{ т.е. } 2a = 4 = 2a.$$

Отсюда $a = 2$.

Тогда

$$f(x) = \begin{cases} 4 \cdot 3^x & \text{при } x < 0 \\ 4 + x & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

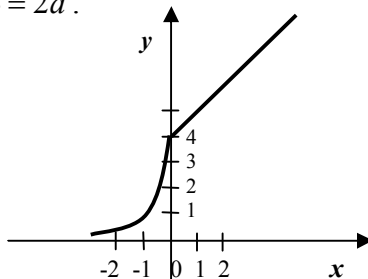


Рисунок 19

Разрывные функции отражают скачкообразные процессы, встречающиеся в природе. Например, при ударе величина скорости тела меняется скачкообразно. Многие качественные переходы сопровождаются скачками.

Пример 57. Известно, что лед массой 1 кг при температуре 0°C имеет больший объем, чем та же масса воды при той же температуре. О разрыве какой функции и в какой точке говорит этот факт?

В данном случае зависимость $V = f(t)$ между температурой t и объемом V является разрывной функцией при $t = 0$.

Пример 58. Исследовать функцию на непрерывность

$$y = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad (\text{см. рисунок 18}).$$

Функция определена во всех точках за исключением $x = 1$. Найдем односторонние пределы функции в этих точках

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x+1) = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x+1) = 2.$$

$$y(1-0) = y(1+0).$$

Значит, $x = 1$ - точка устранимого разрыва функции. Доопределим функцию в точке $x = 1$, положим $y = 2$, если $x = 1$,

$$\text{тогда } y = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1. \end{cases}$$

Теперь функция стала непрерывной (см. рисунок 19).

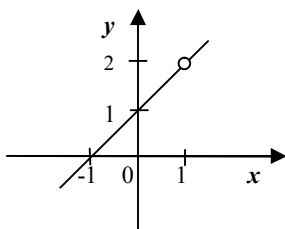


Рисунок 20

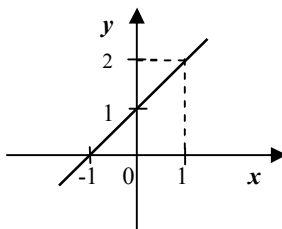


Рисунок 21

Конечный предел функции в точке x_0 существует либо у функций, непрерывных в этой точке, либо имеющих в ней «устранимый» разрыв.

Пример 59. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{при } x \neq 0 \\ 3 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Функция определена на всей числовой оси, но при $x=0$ меняется аналитическое задание функции. Найдём односторонние пределы при $x \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \text{но } f(0) = 3.$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} f(x) \neq f(0).$$

При $x=0$ функция имеет устранимый разрыв. Для устранения разрыва переопределим функцию, положив $f(0)=1$.

Получим
$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{при } x \neq 0 \\ 1 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Пример 60. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } x \leq 1 \\ \frac{2}{x-1} & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Функция определена на всей числовой оси, но поскольку она не является элементарной, то может иметь разрыв при $x = 1$.

Воспользуемся определением 2 при исследовании.

$$f(1) = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (-x) = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2}{x-1} = +\infty, \quad \text{так как при } x \rightarrow 1+0$$

знаменатель стремится к нулю, оставаясь больше нуля.

При $x = 1$ разрыв II рода.

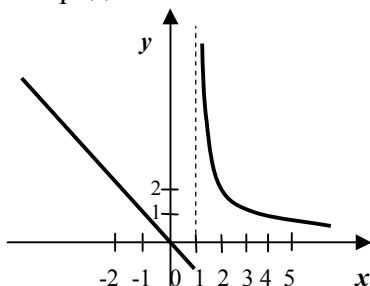


Рисунок 22 – К примеру 60

Пример 61. Исследовать на непрерывность функцию $y = 5^{\frac{1}{4-x}}$.

Функция определена, т.е. может быть вычислена при всех значениях x , кроме $x = 4$. Эта функция элементарная, поэтому она непрерывна во всей области определения:

$$x \in (-\infty, 4) \cup (4, +\infty).$$

При $x = 4$ функция имеет разрыв.

Найдем односторонние пределы этой функции при стремлении x к 4 слева и справа.

$$\lim_{x \rightarrow 4-0} 5^{\frac{1}{4-x}} = 5^{\lim_{x \rightarrow 4-0} \frac{1}{4-x}} = +\infty, \quad \text{так как при } x \rightarrow 4-0 \text{ величина}$$

$(4-x)$ остается положительной бесконечно малой, а обратная ей

величина $\frac{1}{4-x}$ является положительной бесконечно большой.

$$\lim_{x \rightarrow 4+0} 5^{\frac{1}{4-x}} = 5^{\lim_{x \rightarrow 4+0} \frac{1}{4-x}} = 0.$$

При $x \rightarrow 4+0$, величина $(4-x)$ является отрицательной бесконечно малой величиной, обратная ей величина $\frac{1}{4-x}$ будет бесконечно большой отрицательной величиной, тогда $5^{-\infty} = \frac{1}{5^{\infty}} = 0$.

Можно было вычислить предел с заменой переменной

$$\lim_{x \rightarrow 4+0} 5^{\frac{1}{4-x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 4+\alpha \\ \alpha \rightarrow 0}} 5^{\frac{1}{4-x}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} 5^{\frac{1}{4-(4+\alpha)}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} 5^{-\frac{1}{\alpha}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{5^{\frac{1}{\alpha}}} = 0$$

$\alpha \rightarrow 0$, $\frac{1}{\alpha} \rightarrow \infty$, $5^{\frac{1}{\alpha}} \rightarrow \infty$, а дробь $\frac{1}{5^{\frac{1}{\alpha}}} \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$.

Так как $\lim_{x \rightarrow 4-0} 5^{\frac{1}{4-x}} = \infty$, то при $x = 4$ разрыв функции II рода.

Построим график функции. Для построения графика найдем пределы

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 5^{\frac{1}{4-x}} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 5^{\frac{1}{4-x}} = 1.$$

($x = 4$ и $y = 1$ – асимптоты).

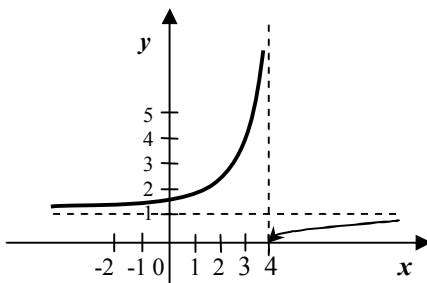


Рисунок 23 - К примеру 61

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: в 2 т. Учебник для втузов / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1976. – Т.1. – 456 с.
2. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике / Л.А. Кузнецов. – М.: Высш. шк., 1983. – 176 с.
3. Задачник по курсу математического анализа / Под ред. Н.Я. Виленкина. – М.: Просвещение, 1971. – 350 с.
4. Математический анализ в вопросах и задачах / В.Ф. Бугузов [и др.] – М.: Высш. шк. – 1984. – 200 с.

Заказ № _____ от _____ 2011 г. Тираж _____ экз.
Изд-во СевНТУ