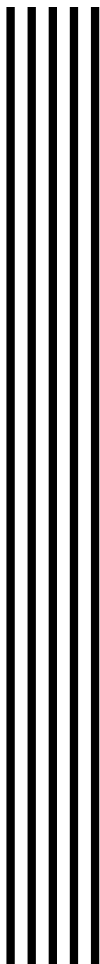


Министерство образования и науки,
молодежи и спорта Украины
Севастопольский национальный технический университет



Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Методические указания и контрольные задания
для самостоятельной работы
по дисциплине «Высшая математика»
студентов инженерных и экономических специальностей

Севастополь
2011

УДК 51

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. Методические указания для самостоятельной работы по дисциплине «Высшая математика» студентов инженерных и экономических специальностей / Сост. Н.Г. Плаксина. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2011. – 48 с.

Целью настоящих методических указаний является помощь студенту при изучении темы: «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных» курса высшей математики. В них приведены варианты 30 индивидуальных заданий и подробное решение варианта-образца.

Методические указания предназначены для студентов дневной и заочной форм обучения инженерных и экономических специальностей.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры высшей математики, протокол № 8 от 24.03.2011 г.

Допущено учебно-методическим центром и научно-методическим Советом СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензенты: Амелькович В.Г., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики СевНТУ;

Ледяев С.Ф., канд. техн. наук, доцент кафедры высшей математики СевНТУ.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Содержание варианта-образца	4
2. Решение варианта-образца	5
3. Варианты индивидуальных заданий	24
Библиографический список использованной литературы	47

Для выполнения предложенных заданий необходимо освоить соответствующие теоретические вопросы дифференциального исчисления функций многих переменных ([1], гл.8, §8.1 – 8.19 или [2], гл. 8, §1-19)

СОДЕРЖАНИЕ ВАРИАНТА-ОБРАЗЦА

1. Найти и изобразить на чертеже область определения функций:

$$\text{а) } z = \sqrt{\ln \frac{x^2}{y-1}}; \quad \text{б) } z = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\log_2(2 - x^2 - 2y^2)}$$

2. Найти полное приращение Δz и полный дифференциал dz функции $z = x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 3y + 4$ в точке $M_0(2; -1)$ при $\Delta x = 0,02$ и $\Delta y = 0,01$. Вычислить абсолютную погрешность, которая получается при замене полного приращения функции ее полным дифференциалом.

3. Показать, что данная функция $z = e^{-\cos(x+2y)}$ удовлетворяет данному уравнению $4 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

4. Найти производную сложной функции:

$$\text{а) } z = \operatorname{arctg} \frac{x^2 + y}{2} + \ln(x + y^2),$$

$$\text{где } x = u^2 v^3, \quad y = u^3 - v^2, \quad \frac{\partial z}{\partial u} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} - ?$$

$$\text{б) } z = \sin^2 \frac{1}{y} \sqrt{\operatorname{tg} 2^x}, \quad \text{где } y = e^{-\sqrt{x}}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} - ? \quad \frac{dz}{dx} - ?$$

5. При каких значениях постоянной $a (a \neq 0)$ функция $z = 2a^2 x^3 y - 2xy^3$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$?

6. Найти экстремум функции $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

7. Найти условный экстремум функции $z = x^2 + y^2$, если $xy = 4$, методом множителей Лагранжа.

8. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ в замкнутой области D , ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$.

9. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{1} = 1$ в точке $M_0(\sqrt{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}; 0)$.

10. Найти производную функции $z = \ln^2(x^2 + 2xy)$ в точке $M_0(1; 2)$ в направлении:

а) указанного вектора $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$; б) ее градиента.

11. Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу по экспериментальным данным о значениях x и y , приведенным в таблице

x	0	1	1,5	2,1	3
y	2,9	6,3	7,9	10,0	13,2

На одном чертеже построить экспериментальные точки и график аппроксимирующей функции. Вычислить среднюю квадратичную погрешность.

РЕШЕНИЕ ВАРИАНТА-ОБРАЗЦА

1. Найти и изобразить на чертеже область определения функций:

$$а) z = \sqrt{\ln \frac{x^2}{y-1}};$$

$$б) z = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\log_2(2 - x^2 - 2y^2)}$$

$$а) z = \sqrt{\ln \frac{x^2}{y-1}}.$$

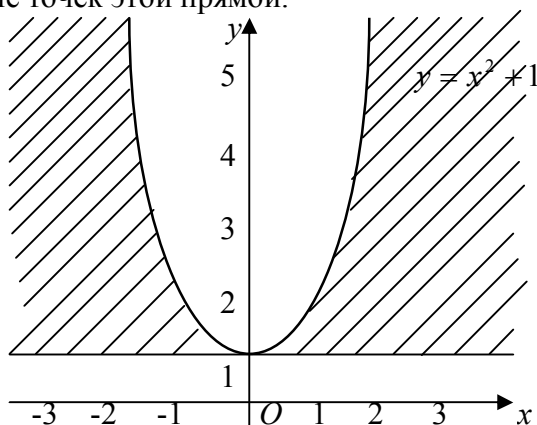
Решение

Область определения данной функции определяется из условий:

$$\begin{cases} \ln \frac{x^2}{y-1} \geq 0 \\ y-1 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{y-1} \geq 1 \\ y > 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - y + 1}{y-1} \geq 0 \\ y > 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y + 1 \geq 0 \\ y > 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq x^2 + 1 \\ y > 1 \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

Этим условиям удовлетворяет множество точек плоскости xOy , лежащих вне параболы $y = x^2 + 1$, включая точки самой параболы, кроме вершины, и выше прямой $y = 1$, кроме точек этой прямой.



$$\text{б) } z = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\log_2(2 - x^2 - 2y^2)}$$

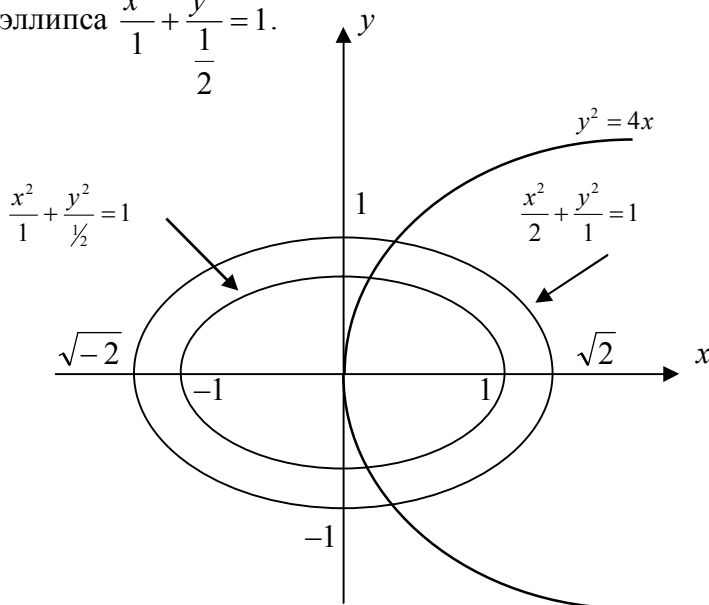
Решение

Область существования этой функции определена следующими условиями:

$$\begin{cases} 4x - y^2 \geq 0 \\ 2 - x^2 - 2y^2 > 0 \\ \log_2(2 - x^2 - 2y^2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 \leq 4x \\ x^2 + 2y^2 < 2 \\ 2 - x^2 - 2y^2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 \leq 4x \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} < 1 \\ \frac{2}{x^2 + 2y^2} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 \leq 4x \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} < 1, \\ \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} \neq 1 \end{cases}$$

которым удовлетворяет множество точек плоскости xOy , лежащих между параболой $y^2 = 4x$ и эллипсом $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$, включая точки параболы и исключая точки этого эллипса, а также эллипса $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$.



2. Найти полное приращение Δz и полный дифференциал dz функции $z = x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 3y + 4$ в точке $M_0(2; -1)$ при $\Delta x = 0,02$ и $\Delta y = 0,01$. Вычислить абсолютную погрешность, которая получается при замене полного приращения функции ее полным дифференциалом.

Решение

По определению полное приращение функции

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Для данной функции $\Delta z = (x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 - 2(x + \Delta x)(y + \Delta y) + 2(x + \Delta x) - 3(y + \Delta y) + 4 - (x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 3y + 4) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2 - 2xy - 2x\Delta y - 2y\Delta x - 2\Delta x\Delta y + 2x + 2\Delta x - 3y - 3\Delta y + 4 - x^2 - y^2 + 2xy - 2x + 3y - 4 = 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2 - 2x\Delta y - 2y\Delta x - 2\Delta x\Delta y + 2\Delta x - 3\Delta y = (2x - 2y + 2)\Delta x + (2y - 2x - 3)\Delta y + (\Delta x^2 + \Delta y^2 - 2\Delta x\Delta y)$. Согласно определению $dz = (2x - 2y + 2)\Delta x + (2y - 2x - 3)\Delta y$. Обратим внимание на то, что полный дифференциал dz — главная часть полного приращения Δz , линейная относительно Δx и Δy . Так как $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, то $dz = (2x - 2y + 2)dx + (2y - 2x - 3)dy$.

Поэтому $\Delta z = dz + (\Delta x^2 + \Delta y^2 - 2\Delta x\Delta y)$, очевидно, что $\Delta z \neq dz$ при $\Delta x \neq \Delta y$. dz отличается от Δz на величину $(\Delta x^2 + \Delta y^2 - 2\Delta x\Delta y) = (\Delta x - \Delta y)^2$, которая при $\Delta x \neq \Delta y$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx и Δy . Поэтому в приближенных вычислениях можно заменять Δz на dz . Величина $|\Delta z - dz|$ является абсолютной погрешностью, которая получается при замене полного приращения функции ее полным дифференциалом.

$$|\Delta z - dz| = |\Delta x^2 + \Delta y^2 - 2\Delta x\Delta y| = (\Delta x - \Delta y)^2 \text{ при } \Delta x \neq \Delta y.$$

Вычислим Δz , dz и абсолютную погрешность $|\Delta z - dz|$ в точке $M_0(2; -1)$ при заданных $\Delta x = 0,02$ и $\Delta y = 0,01$.

$$\Delta z = (2 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) + 2) \cdot 0,02 + (2 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 - 3) \cdot 0,01 + (0,02^2 + 0,01^2 - 2 \cdot 0,02 \cdot 0,01) = 8 \cdot 0,02 - 9 \cdot 0,01 + 0,0004 + 0,0001 - 0,0004 = 0,0701;$$

$$dz = 8 \cdot 0,02 - 9 \cdot 0,01 = 0,07.$$

$$|\Delta z - dz| = 0,0701 - 0,07 = 0,0001.$$

Обратим внимание на то, что вычисление Δz — более громоздкая задача, чем вычисление dz . Поэтому понятно, почему на практике при малых приращениях независимых переменных Δx и Δy значение Δz с достаточной точностью заменяют значением dz .

$$\text{Ответ: } \Delta z = 0,0701, \quad dz = 0,07, \quad |\Delta z - dz| = 0,0001.$$

3. Показать, что данная функция $z = e^{-\cos(x+2y)}$ удовлетворяет данному уравнению $4 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Решение

$$z = e^{-\cos(x+2y)}, \quad 4 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Убедимся в том, что функция z является решением данного уравнения, т.е. обращает ее в тождество. Для этого вычислим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy}.$$

Используя правило нахождения частных производных функции $z = f(x, y)$:

$$z'_x = e^{-\cos(x+2y)} \cdot (-\cos(x+2y))'_x = e^{-\cos(x+2y)} \cdot \sin(x+2y) \cdot 1;$$

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= (e^{-\cos(x+2y)})'_x \cdot \sin(x+2y) + e^{-\cos(x+2y)} \cdot (\sin(x+2y))'_x = \\ &= e^{-\cos(x+2y)} \cdot \sin(x+2y) \sin(x+2y) + e^{-\cos(x+2y)} \cdot \cos(x+2y) = \\ &= e^{-\cos(x+2y)} \cdot (\sin^2(x+2y) + \cos(x+2y)); \end{aligned}$$

$$z'_y = e^{-\cos(x+2y)} \cdot (-\cos(x+2y))'_y = e^{-\cos(x+2y)} \cdot \sin(x+2y) \cdot 2;$$

$$z''_{yy} = (e^{-\cos(x+2y)})'_y \sin(x+2y) \cdot 2 + e^{-\cos(x+2y)} \cdot \cos(x+2y) \cdot 4 =$$

$$= 4e^{-\cos(x+2y)} \cdot (\sin^2(x+2y) + \cos(x+2y)).$$

Обратим внимание на то, что при вычислении $z'_x(z'_y)$
 $y = \text{const}(x = \text{const})$.

Подставим выражения z''_{xx} и z''_{yy} в данное уравнение:

$$\begin{aligned} 4e^{-\cos(x+2y)} \cdot (\sin^2(x+2y) + \cos(x+2y)) &\equiv \\ &\equiv 4e^{-\cos(x+2y)} \cdot (\sin^2(x+2y) + \cos(x+2y)). \end{aligned}$$

Значит, данная функция удовлетворяет данному уравнению.

4. Найти производную сложной функции:

$$\text{a) } z = \arctg \frac{x^2 + y}{2} + \ln(x + y^2),$$

$$\text{где } x = u^2 v^3, \quad y = u^3 - v^2, \quad \frac{\partial z}{\partial u} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} - ?$$

Решение

Функция $z = f(x, y)$ является функцией двух переменных x и y , которые в свою очередь зависят от u и v . Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}; \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}. \end{aligned}$$

(Формулы аналогичны формуле производной сложной функции одной переменной).

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{x^2 + y}{2} \right)^2} \cdot x + \frac{1}{x + y^2} \right) \cdot 2uv^3 + \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{x^2 + y}{2} \right)^2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2y}{x + y^2} \right) \cdot 3u^2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{x^2 + y}{2} \right)^2} \cdot x + \frac{1}{x + y^2} \right) \cdot 3u^2v^2 + \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{x^2 + y}{2} \right)^2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2y}{x + y^2} \right) \cdot (-2v).$$

б) $z = \sin^2 \frac{1}{y} \sqrt{\operatorname{tg} 2^x}$, где $y = e^{-\sqrt{x}}$, $\frac{\partial z}{\partial x} - ?$ $\frac{dz}{dx} - ?$

Решение

Функция $z = f(x, y)$ зависит от двух переменных x и y , а y в свою очередь зависит от x . Поэтому можно найти

частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$, полагая $y = \text{const}$, и полную

производную $\frac{dz}{dx}$ по формуле $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sin^2 \frac{1}{y} (\sqrt{\operatorname{tg} 2^x})'_x = \sin^2 \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} 2^x}} \cdot (\operatorname{tg} 2^x)' =$$

$$= \sin^2 \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} 2^x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 2^x} \cdot 2^x \cdot \ln 2;$$

$$\frac{dz}{dx} = \sin^2 \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} 2^x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 2^x} \cdot 2^x \cdot \ln 2 +$$

$$+ \sqrt{\operatorname{tg} 2^x} \cdot 2 \sin \frac{1}{y} \cos \frac{1}{y} \left(-\frac{1}{y^2} \right) \cdot e^{-\sqrt{x}} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) =$$

$$= \frac{\sin^2 \left(\frac{x}{y} \right) 2^{x-1} \ln 2}{\cos^2 2^x \sqrt{\operatorname{tg} 2^x}} + \frac{\sqrt{\operatorname{tg} 2^x} \sin \frac{2}{y}}{2\sqrt{x} y^2 e^{\sqrt{x}}}.$$

5. При каких значениях постоянной $a (a \neq 0)$ функция $z = 2a^2 x^3 y - 2xy^3$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0?$$

Решение

$$z = 2a^2x^3y - 2xy^3$$

Вычислим z''_{xx} и z''_{yy} и подставим их в уравнение Лапласа:

$$z'_x = 6a^2x^2y - 2y^2, \quad z''_{xx} = 12a^2xy,$$

$$z'_y = 2a^2x^3 - 6xy^2, \quad z''_{yy} = -12xy,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0; \quad 12a^2xy - 12xy = 0,$$

$$a^2 - 1 = 0, \quad a = \pm 1.$$

Ответ: $a = \pm 1$.

6. Найти экстремум функции $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

Решение.

$$z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

Данную функцию будем исследовать на экстремум по следующему правилу:

- 1) найдем область определения функции z ;
- 2) найдем z'_x и z'_y ; рассмотрим случаи, когда z'_x и z'_y равны 0 или не существуют;
- 3) для каждой точки M_0 вычисляем

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

$$A = z''_{xx}(M_0), \quad C = z''_{yy}(M_0), \quad B = z''_{xy}(M_0).$$

Если $AC - B^2 > 0$, то в критической точке M_0 есть экстремум, а именно максимум, если A и $C < 0$, и минимум, если A и $C > 0$.

Если $AC - B^2 < 0$, то в критической точке нет экстремумов.

Если $AC - B^2 = 0$, то никакого заключения о характере критической точки сделать нельзя и требуется дополнительное исследование.

4) вычислим значение z в каждой точке экстремума.

Для данной функции вся координатная плоскость является областью определения.

$$\text{Найдем } z'_x \text{ и } z'_y: z'_x = 4x^3 - 4x + 4y, \quad z'_y = 4y^3 + 4x - 4y.$$

Так как функция z дифференцируема всюду на xOy , то образуем систему:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \quad (\text{случай, когда } z'_x \text{ и } z'_y \text{ не существуют,}$$

отсутствует);

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{cases}.$$

После сложения уравнений имеем $4x^3 + 4y^3 = 0$ или $x = -y$.

Подставим значение x в первое уравнение системы:

$$-4y^3 + 4y + 4y = 0, \quad y(2 - y^2) = 0, \quad y_1 = 0, \quad y_{2,3} = \pm\sqrt{2}.$$

Тогда $x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \mp\sqrt{2}$.

Итак, получим три критические точки:

$$P_1(0;0), \quad P_2(\sqrt{2};-\sqrt{2}), \quad P_3(-\sqrt{2};\sqrt{2}).$$

Вычислим производные второго порядка:

$$z''_{xx} = 12x^2 - 4, \quad z''_{xy} = 4, \quad z''_{yy} = 12y^2 - 4.$$

Посчитаем $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$ для каждой критической точки:

$$\text{а) } P_1(0;0): A = z''_{xx}(0;0) = -4; \quad C = z''_{yy}(0;0) = -4; \quad B = 4.$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 16 - 16 = 0 - \text{никакого заключения о точке}$$

$P_1(0;0)$ по этому правилу сделать нельзя и требуется дополнительное исследование.

$$\text{б) } P_2(\sqrt{2};-\sqrt{2}): A = z''_{xx}(\sqrt{2};-\sqrt{2}) = 12 \cdot 2 - 4 = 20; \quad B = 4;$$

$$C = z''_{yy}(\sqrt{2}; -\sqrt{2}) = 12 \cdot 2 - 4 = 20; \quad \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} > 0 \quad - \text{ в точке}$$

P_2 есть экстремум, а именно минимум, так как A и $C > 0$.

$$\text{в) } P_3(-\sqrt{2}; \sqrt{2}) : A = z''_{xx}(-\sqrt{2}; \sqrt{2}) = 20; \quad B = 4;$$

$$C = z''_{yy}(-\sqrt{2}; \sqrt{2}) = 20; \quad \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} > 0 \quad - \text{ в точке } P_3 \text{ есть}$$

экстремум, а именно минимум, так как A и $C > 0$.

$$\text{В заключение вычислим } z_{\min} = z(P_2) = z(P_3) = 4 + 4 - 4 + 4 \cdot (-2) - 2 \cdot 2 = -8.$$

$$\text{Ответ: } z_{\min} = -8.$$

7. Найти условный экстремум функции $z = x^2 + y^2$, если $xy = 4$, методом множителей Лагранжа.

Решение

Данную функцию исследуем на условный экстремум методом множителей Лагранжа, согласно которому:

1) образуем функцию Лагранжа $z^*(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$, где $\varphi(x, y) = 0$ — уравнение связи между независимыми переменными x и y ;

2) составим необходимые условия экстремума

$$\begin{cases} z'^*_x = 0 \\ z'^*_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}.$$

В результате решения этой системы получаются критические точки.

3) Составим выражение для d^2z по формуле:

$$d^2z = z''_{xx} dx^2 + 2z''_{xy} dx dy + z''_{yy} dy^2.$$

Определим знак d^2z^* в каждой критической точке M_0 .

Если $d^2z^*(M_0) > 0$, то критическая точка M_0 является точкой условного минимума; если $d^2z^*(M_0) < 0$, то

критическая точка M_0 является точкой условного максимума; если $d^2 z^*(M_0) = 0$, то требуется дополнительное исследование этой критической точки.

4) Вычислим значение z в точках условного экстремума.

В данной задаче $z = \underbrace{x^2 + y^2}_{f(x,y)}$ и уравнение связи $\underbrace{xy - 4}_{\varphi(x,y)} = 0$.

Составим функцию Лагранжа:

$z^*(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(xy - 4)$, где λ – множитель Лагранжа.

2. Составим систему необходимых условий условного экстремума:

$$\begin{cases} z^*_{x'} = 2x + \lambda y = 0 \\ z^*_{y'} = 2y + \lambda x = 0 \\ xy - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{2x}{y} \\ \lambda = -\frac{2y}{x} \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{y} = \frac{2y}{x} \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ x^2 y^2 = 4^2 \end{cases}$$

или $\begin{cases} |x| = |y| \\ x^4 = 16 \end{cases}$.

Отсюда $x = \pm 2$, $y = \pm 2$.

Обратим внимание на то, что из первого и второго уравнения определяем λ , их значение приравниваем и сводим систему трех уравнений к системе двух уравнений.

В результате получим две критические точки $M_1(2;2)$ и $M_2(-2;-2)$.

3. Составим выражение $d^2 z^*$:

$$z^*_{xx} = 2; \quad z^*_{xy} = \lambda; \quad z^*_{yy} = 2;$$

$$d^2 z^* = 2dx^2 + 2\lambda dx dy + 2dy^2 = 2(dx^2 + dy^2) + 2\lambda dx dy.$$

Знак $d^2 z^*$ зависит от знака выражения $2\lambda dx dy$.

Зависимость между dx и dy можно найти, вычислив $d\varphi$:

$$d\varphi = d(xy - 4) = (xy - 4)'_x dx + (xy - 4)'_y dy = y dx + x dy;$$

$$y dx + x dy = 0, \text{ т.к. } \varphi(x, y) = 0.$$

$$dx = -\frac{xdy}{y}, \quad y \neq 0.$$

$$d^2 z^* = 2(dx^2 + dy^2) + 2\lambda\left(-\frac{x}{y}\right)dy^2.$$

$$\text{В точке } M_1(2;2) \text{ имеем: } \lambda = -\frac{2 \cdot 2}{2} = -2.$$

$$d^2 z^*(M_1) = 2(dx^2 + dy^2) - 4\left(-\frac{2}{2}\right)dy^2 = 2dx^2 + 6dy^2 > 0.$$

Значит, точка $M_1(2;2)$ является точкой условного минимума.

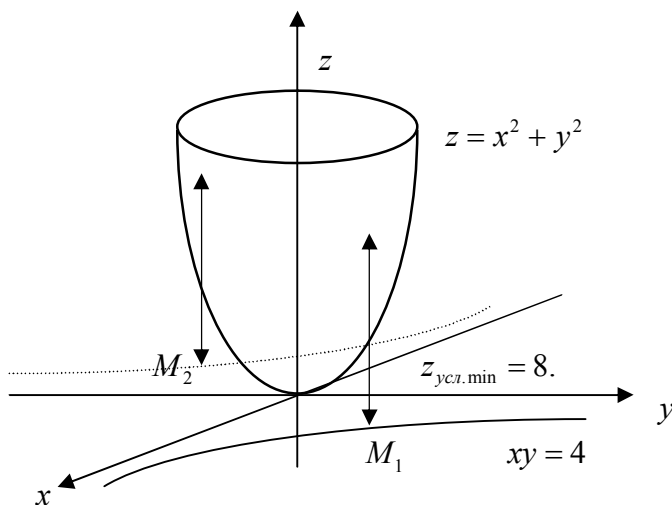
$$\text{В точке } M_2(-2;-2) \text{ имеем: } \lambda = -\frac{2 \cdot (-2)}{-2} = -2.$$

$$d^2 z^*(M_2) = 2(dx^2 + dy^2) - 4\left(-\frac{-2}{-2}\right)dy^2 = 2dx^2 + 6dy^2 > 0.$$

Значит, точка $M_2(-2;-2)$ является точкой условного минимума.

В заключение вычислим $z_{\text{усл. min}} = z(M_1) = z(M_2) = 4 + 4 = 8$.

Построим график $z = x^2 + y^2$ и укажем точки условного минимума.



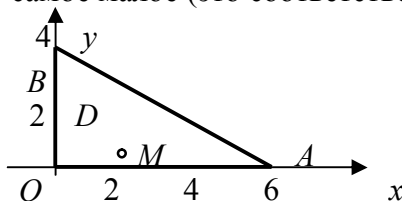
Ответ: $z_{\text{усл. min}} = 8$.

8. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ в замкнутой области D , ограниченной линиями: $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$.

Решение

Наименьшее и наибольшее значения данной функции в заданной области D определим по правилу:

- 1) Найти критические точки, лежащие внутри области, и вычислить значения функции в этих точках (не вдаваясь в исследование, будет ли в них экстремум и какой).
- 2) Найти наибольшие и наименьшие значения функции на линиях, образующих границу области D .
- 3) Из всех найденных значений выбрать самое большое и самое малое (это соответственно будут $z_{\text{наиб.}}$ и $z_{\text{наим.}}$).



- 1) Найдем z'_x и z'_y , и приравняем их нулю:

$$\begin{cases} z'_x = 2x - y - 4 = 0; \\ z'_y = -x + 2y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2y; \\ 2x - y = 4. \end{cases}$$

Получим критическую точку $M(\frac{8}{3}; \frac{4}{3})$, принадлежащую области D .

$$z(M) = \left(\frac{8}{3}\right)^2 - \frac{8}{3} \cdot \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{8}{3} = -\frac{16}{3}.$$

2) Теперь найдем наибольшие и наименьшие значения данной функции $z = f(x, y)$ на линиях, образующих границу области D . Граница есть $[OB] + [BA] + [OA]$.

$[OB]$: $x = 0$, $z(0, y) = y^2$, где $y \in [0, 4]$.

Решим задачу о нахождении наибольшего и наименьшего значения функции $z(0, y)$ на отрезке $[0; 4]$:

$$z'_y(0; y) = (y^2)' = 2y, \quad z'_y(0; y) = 0 \Rightarrow y = 0, \quad z(0; 0) = \underline{0}, \quad z(0, 4) = \underline{16}.$$

$$[BA]: x = \frac{1}{2}(12 - 3y), \text{ где } y \in [0; 4].$$

$$z(x, y) = z\left(\frac{1}{2}(12 - 3y), y\right) = \frac{1}{4}(12 - 3y)^2 - \frac{1}{2}(12 - 3y) \cdot y + y^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}(12 - 3y) = \frac{19}{4}y^2 - 18y + 12, \text{ где } y \in [0; 4].$$

$$z'_y = \frac{19}{2}y - 18 = 0, \quad y = \frac{36}{19} - \text{критическая точка, принадлежащая } [0; 4].$$

$$\text{Находим } z\left(\frac{60}{19}; \frac{36}{19}\right) = -\frac{96}{19}, \quad z(6; 0) = \underline{12}, \quad z(0; 4) = \underline{16}.$$

$$[OA]: y = 0, \quad x \in [0; 6];$$

$$z(x, 0) = x^2 - 4x, \text{ где } x \in [0; 6];$$

$$z'_x(x, 0) = 2x - 4 = 0, \quad x = 2 - \text{критическая точка.}$$

$$z(2, 0) = 4 - 4 \cdot 2 = \underline{-4}, \quad z(0, 0) = \underline{0}, \quad z(6, 0) = \underline{12}.$$

Из всех подчеркнутых значений самое маленькое - $\left(-\frac{96}{19}\right)$,

а самое большое - 16.

Значит, $z_{\text{наиб}} = z(0, 4) = z(B) = 16$ (на границе области),

$$z_{\text{наим}} = -\frac{16}{3}. \text{ (внутри области).}$$

9. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{1} = 1$ в точке $M_0\left(\sqrt{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}; 0\right)$.

Решение.

Если поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, а точка $M_0\left(\sqrt{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}; 0\right)$ лежит на поверхности, то уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0,$$

а нормаль к этой поверхности в той же точке определяется уравнениями:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}.$$

$$\text{В данной задаче } F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{1} - 1.$$

Вычислим F'_x , F'_y , F'_z , в точке M_0 :

$$F'_x(M_0) = \frac{1}{2}x\Big|_{M_0} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$F'_y(M_0) = \frac{2}{9}y\Big|_{M_0} = \frac{2 \cdot 3\sqrt{2}}{9 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{3};$$

$$F'_z(M_0) = -2z\Big|_{M_0} = 0.$$

Составим уравнение касательной плоскости к заданной поверхности в заданной точке M_0 :

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x - \sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{3}\left(y - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) + 0(z - 0) = 0,$$

$\frac{\sqrt{2}}{2}x - 1 + \frac{\sqrt{2}}{3}y - 1 = 0$, $3x + 2y - 6\sqrt{2} = 0$ (касательная плоскость оказалась параллельной оси Oz).

Нормаль к данной поверхности в точке M_0 определяется

уравнениями:
$$\frac{x - \sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{y - \frac{3\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = \frac{z}{0}.$$

10. Найти производную функции $z = \ln^2(x^2 + 2xy)$ в точке $M_0(1;2)$ в направлении: а) указанного вектора $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$; б) ее градиента.

Решение.

Производную функции $z = f(x, y)$ в направлении $\vec{l}$ можно вычислить по формуле: $\frac{\partial z}{\partial l} = z'_x \cos \alpha + z'_y \sin \alpha$, где α – угол между направлением $\vec{l}$ и осью Ox .

Для данной функции

$$z'_x = 2 \ln(x^2 + 2xy) \cdot \frac{1}{x^2 + 2xy} \cdot (2x + 2y) = 4 \frac{(x + y) \ln(x^2 + 2xy)}{x(x + 2y)};$$

$$z'_y = 2 \ln(x^2 + 2xy) \cdot \frac{1}{x^2 + 2xy} \cdot 2x = 4 \frac{\ln(x^2 + 2xy)}{x + 2y}.$$

Рассмотрим два случая:

а) пусть направление $\vec{l}$ совпадает с вектором $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$.

$$|\vec{a}| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}, \quad \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}, \quad \sin \alpha = -\frac{3}{\sqrt{13}},$$

$$z'_x(M_0) = 4 \frac{\ln(1 + 4)}{1 + 4} \cdot (1 + 2) = \frac{12}{5} \ln 5, \quad z'_y(M_0) = 4 \frac{\ln 5}{5} = \frac{4}{5} \ln 5,$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial \vec{a}} \right|_{M_0} = \frac{12}{5} \ln 5 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} - \frac{4}{5} \ln 5 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{12\sqrt{13}}{65} \ln 5 \quad (\text{это скорость}$$

изменения скалярного поля, заданного функцией z , в направлении вектора $\vec{a}$).

б) Теперь вычислим производную данной функции в точке M_0 в направлении градиента этой функции. Градиент – это вектор, направленный в сторону наискорейшего возрастания функции и по длине равный $\frac{\partial z}{\partial l}$. Поэтому $\frac{\partial z}{\partial l} = |\overrightarrow{grad z}|$.

$$\left. \overrightarrow{grad z} \right|_{M_0} = (z'_x(M_0), z'_y(M_0)) = \left(\frac{12}{5} \ln 5; \frac{4}{5} \ln 5 \right),$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_{M_0} = \left| \overline{\text{grad } z} \right|_{M_0} = \sqrt{\left(\frac{12}{5} \ln 5 \right)^2 + \left(\frac{4}{5} \ln 5 \right)^2} = \frac{4\sqrt{10}}{5} \ln 5,$$

если $\bar{l}$ совпадает с направлением градиента функции $z = \ln^2(x^2 + 2xy)$.

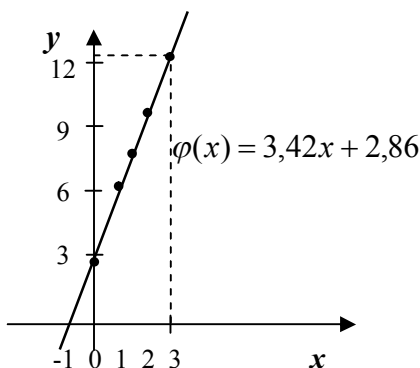
Ответ: $\left. \frac{\partial z}{\partial a} \right|_{M_0} = \frac{12\sqrt{13}}{65}, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_{M_0} = \frac{4\sqrt{10}}{5} \ln 9.$

11. Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу по экспериментальным данным о значениях x и y , приведенным в таблице

x	0	1	1,5	2,1	3
y	2,9	6,3	7,9	10,0	13,2

На одном чертеже построить экспериментальные точки и график аппроксимирующей функции. Вычислить среднюю квадратичную погрешность.

Построим точки $(x_i, y_i) (i = \overline{1,5})$ на координатной плоскости



xOy . Они оказались расположенными примерно на одной прямой. Это означает, что между переменными x и y выполняется линейная зависимость и искомая функция (аппроксимирующая) отыскивается в виде $\varphi(x) = a_1 \cdot x + a_0$.

Чтобы прямая $\varphi(x) = a_1 \cdot x + a_0$ лежала по возможности ближе к каждой точке, необходимо, чтобы

$$\sum_{i=1}^n (\varphi(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (a_1 x_i + a_0 - y_i)^2 = F(a_1, a_0) \rightarrow \min.$$

В точке минимума выполняются необходимые условия экстремума:

$$\begin{cases} F'_{a_1} = 0, \\ F'_{a_0} = 0. \end{cases}$$

Эта система в развернутом виде выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_0 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_0 \cdot n = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases} \quad \text{и называется системой нормальных}$$

уравнений для нахождения a_1 и a_0 . Для данной задачи все промежуточные вычисления сведем в таблицу:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0	2,9	0	0,00
2	1	6,3	1	6,30
3	1,5	7,9	2,25	11,85
4	2,1	10,0	4,41	21,00
5	3	13,2	9,00	36,90
	$\sum = 7,6$	$\sum = 40,3$	$\sum = 16,66$	$\sum = 78,75$

Составим систему нормальных уравнений для нахождения a_1 и a_0 :

$$\begin{cases} 16,66a_1 + 7,6a_0 = 78,75, \\ 7,6a_1 + 5a_0 = 40,3. \end{cases}$$

Применим формулы Крамера: $a_0 = \frac{\Delta_{a_0}}{\Delta}$; $a_1 = \frac{\Delta_{a_1}}{\Delta}$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 16,66 & 7,6 \\ 7,6 & 5 \end{vmatrix} = 25,540; \quad \Delta_{a_0} = \begin{vmatrix} 16,66 & 78,75 \\ 7,6 & 40,3 \end{vmatrix} = 72,898;$$

$$\Delta_{a_1} = \begin{vmatrix} 78,75 & 7,6 \\ 40,3 & 5 \end{vmatrix} = 87,470.$$

Отсюда $a_0 = 2,86$; $a_1 = 3,42$.

Таким образом, искомая функция имеет вид $\varphi(x) = 3,42x + 2,86$.

Качество эмпирической формулы, т.е. степень соответствия ее опытным данным оценивается средней квадратичной погрешностью:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n}}, \text{ где } v_i = \varphi(x_i) - y_i = (a_1 x_i + a_0) - y_i.$$

Вычисления сведем в таблицу:

i	x_i	y_i	$\varphi(x_i)$	v_i	v_i^2
1	0	2,9	2,86	-0,04	0,0016
2	1,0	6,3	6,28	-0,02	0,0004
3	1,5	7,9	7,99	0,09	0,0081
4	2,1	10,0	10,04	0,04	0,0016
5	3,0	13,2	13,12	-0,08	0,0064

$$\sum_{i=1}^5 v_i^2 = 0,0016 + 0,0004 + 0,0081 + 0,0016 + 0,0064 = 0,0181,$$

$$\sum_{i=1}^5 \frac{v_i^2}{5} = 0,0036; \quad \delta = \sqrt{0,0036} = 0,06.$$

В заключение можно построить прямую $\varphi(x) = 3,42x + 2,86$ на одном чертеже с экспериментальными точками.

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Структура задания

1. Найти и изобразить на чертеже область определения функции $z = f(x, y)$.

2. Найти полное приращение Δz и полный дифференциал dz функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ при заданных Δx и Δy . Вычислить абсолютную погрешность, которая получается при замене полного приращения функции ее полным дифференциалом.

3. Показать, что заданная функция $z = f(x, y)$ удовлетворяет данному уравнению.

4. Найти производную сложной функции.

5. При каком значении постоянной $a (a \neq 0)$ функция $z = f(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$?

6. Найти экстремум функции $z = f(x, y)$.

7. Найти условный экстремум функции $z = f(x, y)$ методом множителей Лагранжа.

8. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = f(x, y)$ в заданной замкнутой области D .

9. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к данной поверхности в указанной точке M_0 .

10. Найти производную функции $z = f(x, y)$ в точке M_0 в направлении: а) указанного вектора $\vec{a}$; б) ее градиента.

11. Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу по экспериментальным данным о значениях x и y , приведенным в таблице. На одном чертеже построить экспериментальные точки и график аппроксимирующей функции. Вычислить среднюю квадратичную погрешность.

ВАРИАНТ 1

1. а) $z = \sqrt{x - \sqrt{y}} + \frac{4}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$; б) $z = \arcsin(x + y)$.

2. $z = 2x^2 + y^2 + 10x$, $M_0(1;2)$, $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,2$.

3. $z = y \operatorname{tg}(x^2 - y^2)$; $\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

4. а) $z = \ln(x^2 + y^2)$, где $x = \arcsin t$, $y = e^{-t^2}$. $\frac{dz}{dt} - ?$

б) $z = x^2 e^y$, где $y = \sin^2 2x$. $\frac{\partial z}{\partial x} - ?$ $\frac{dz}{dx} - ?$

5. $z = x^3 + axy^2$.

6. $z = 2x^2 + 5y^2 + 3x + 2y - 1$.

7. $z = \frac{3}{x} + \frac{2}{y}$, если $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$.

8. $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y$, $D: 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2$.

9. $x^2 + 2z^2 - 4y^2 = 6$, $M_0(2;2;3)$.

10. $z = e^x + xy + y^2$, $M_0(0;1)$, $\bar{a} = 2\bar{i} - j$.

11.

x	1,1	2,1	3,4	4,2	5,3
y	1,2	2,4	4,9	5,4	6,5

ВАРИАНТ 2

1. а) $z = x + \arcsin y$; б) $z = \sqrt{\ln(x + y)}$.

2. $z = x^2 - 3xy + y$, $M_0(-1;1)$, $\Delta x = 0,2$, $\Delta y = 0,1$.

3. $z = \ln(e^x + e^y)$; $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

4. а) $z = x^2 + xy + y^2$, где $x = \sin^2 t$, $y = \cos 2t$. $\frac{dz}{dt} - ?$

б) $z = x \sin^2 2y - y \cos^2 2x$, где $y = \sqrt[3]{x^4}$. $\frac{\partial z}{\partial x} - ?$ $\frac{dz}{dx} - ?$

5. $z = ax^2y - y^3$.

6. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.

7. $z = 2x^2 + y^2$, если $x + y = 1$.

8. $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$, $D: x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1$.

9. $x^2 + z^2 + y^2 = 1$, $M_0\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

10. $z = \sqrt{xy} + y^2 + x$, $M_0(1;4)$, $\bar{a} = \overline{M_0N}$, где $N(2;1)$.

11.

x	1,2	2,1	3,3	4,2	5,3
y	1,4	2,3	4,8	5,3	6,4

ВАРИАНТ 3

1. а) $z = \sqrt{y} + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; б) $z = \ln x + \ln \sin y$.

2. $z = 8y - x^2 - y^2$, $M_0(-1;2)$, $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,2$.

3. $z = \frac{y}{(x^2 - y^2)^5}$; $y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{y}$.

4. а) $z = \arctg(xy)$, где $x = \frac{1}{t}$, $y = t - \sqrt{t}$. $\frac{dz}{dt} - ?$

б) $z = x^2 \ln y$, где $x = \frac{u}{1-v}$, $y = 3u - 3v$. $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$

5. $z = x^4 + y^4 + ax^2y^2$.

6. $z = 5x^2 - 3y^2 + 2x - 3y + 1$.

7. $z = xy$, если $x - 3y = 6$.

8. $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1$, $D: 1 \leq x \leq 6; y \geq 0; x - y \geq 1$.

9. $e^z - z + xy = 3$, $M_0(2;1;0)$.

10. $z = \ln(2x^2 + 3y^2)$, $M_0(1;1)$, $\bar{a} = 3\bar{i} + 3\bar{j}$.

11.

x	1,1	2,1	3,4	4,2	5,2
y	1,3	2,3	4,5	5,1	6,4

ВАРИАНТ 4

1. а) $z = \frac{1}{\sqrt{x-2}} + \frac{1}{\sqrt{y-1}}$; б) $z = \sqrt{x \sin y}$.
2. $z = 3x^2 + y^2 + xy$, $M_0(1; -2)$, $\Delta x = 0,2$, $\Delta y = 0,1$.
3. $z = y \ln(x^2 - y^2)$; $\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.
4. а) $z = xe^y + ye^{-x}$, где $x = \frac{\sqrt{u}}{v}$, $y = \frac{u}{\sqrt{v}}$. $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$
- б) $z = \arctg \frac{x}{y}$, где $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$. $\frac{\partial z}{\partial x} - ?$ $\frac{dz}{dx} - ?$
5. $z = y^3 + ax^2y$.
6. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.
7. $z = x^2 - y$, если $x - 2y = 4$.
8. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$, $D: y = x + 1$, $y = 0$, $x = 3$.
9. $z^2 + z - 2x + y^2 - 4 = 0$, $M_0(1; 2; 1)$.
10. $z = \sin x + y - 3$, $M_0\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$, $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$.
- 11.

x	1,1	2,1	3,4	4,2	5,2
y	1,4	2,2	4,6	5,3	6,5

ВАРИАНТ 5

1. а) $z = \ln x + \frac{1}{\sqrt{y-x}}$; б) $z = \sqrt{x-y+2} \cdot \ln(x+y)$.
2. $z = 2y^2 - 4x - x^2$, $M_0(-1; -2)$, $\Delta x = 0,2$, $\Delta y = 0,1$.
3. $z = \frac{x^2}{2y} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$; $x^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^3}{y}$.
4. а) $z = x^y + y^x$, где $x = t^2 + 5$, $y = \sqrt{3t-1}$. $\frac{dz}{dt} - ?$

б) $z = \sin \frac{\sqrt{y}}{x} - \cos^2 \frac{x}{1-y}$, где $y = 2^{-x}$. $\frac{\partial z}{\partial x} - ?$ $\frac{dz}{dx} - ?$

5. $z = ax^2 - a^2 y^3$.

6. $z = (x-1)^2 + 2y^2$.

7. $z = x + 2y$, если $x^2 + y^2 = 5$.

8. $z = x^2 + xy - 2$, $D: y \geq 4x^2 - 4$, $y \leq 0$.

9. $z^2 - 6x + y^2 + 1 = 0$, $M_0(1;2;1)$.

10. $z = e^{xy} + \arcsin y + \cos x + 2x + y$, $M_0(0;0)$, $\bar{a} = \bar{i} - \bar{j}$.

11.

x	1,2	2,1	3,3	4,2	5,3
y	1,3	2,4	4,7	5,4	6,5

ВАРИАНТ 6

1. а) $z = \sqrt{4-x^2-y^2} + \frac{1}{x+1}$; б) $z = \sqrt{(1+y)(1-x^2)}$.

2. $z = x^2 + y^2 + 2xy$, $M_0(2;-1)$, $\Delta x = 0,2$, $\Delta y = 0,1$.

3. $z = \frac{xy}{x+y}$; $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$.

4. а) $z = xy + y^2 - \frac{3}{x}$, где $x = \cos 5t$, $y = \operatorname{tg} 3t$. $\frac{dz}{dt} - ?$

б) $z = \sin^3 \sqrt{x-y} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$,

где

$y = \arcsin e^{-x}$. $\frac{\partial z}{\partial x} - ?$ $\frac{dz}{dx} - ?$

5. $z = axy^2 - a^2 x^3$.

6. $z = x^2 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.

7. $z = 3x^2 + 2y^2$, если $x - 2y = 2$.

8. $z = 4(x-y) - x^2 - y^2$, $D: 2y \leq 4-x$, $x \geq 0$, $2y \geq x-4$.

9. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y = 2$, $M_0(1;1;-1)$.

10. $z = \arccos(xy)$, $M_0(\frac{1}{2}; -\frac{1}{3})$, $\bar{a} = 4\bar{i} - 3\bar{j}$.

11.

x	1,2	2,1	3,3	4,2	5,3
y	1,4	2,5	3,9	5,2	6,4

ВАРИАНТ 7

1. а) $z = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - y^2}$; б) $z = \ln\left(\frac{\ln(y-1)}{x}\right)$.

2. $z = 4 - x^2 + y^2 + 2x - 4y$, $M_0(1;3)$, $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,2$.

3. $z = \cos^2(2x - 3y)$; $3 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

4. а) $z = y^2 \ln x$, где $x = \frac{u}{v}$, $y = u - v$. $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$

б) $z = \sin \sqrt{xy^3 - y^2}$, где $y = e^{-x} + x$. $\frac{\partial z}{\partial x} - ?$ $\frac{dz}{dx} - ?$

5. $z = 2axy^2 + 2a^2x^3$.

6. $z = x^2 - xy + y^2 - 3x - 2y + 1$.

7. $z = x + 2y$, если $x^2 + y^2 = 5$.

8. $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$, $D: y = x^2$, $y = 4$.

9. $x^2 - y^2 + z^2 = 4$, $M_0(1;1;2)$.

10. $z = \arcsin \frac{x^2}{y}$, $M_0(1;2)$, $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}$.

11.

x	1,2	2,1	3,3	4,2	5,3
y	1,3	2,5	3,8	5,3	6,6

ВАРИАНТ 8

1. а) $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1}$; б) $z = \arcsin \frac{y}{x}$.

2. $z = x^2 + 4y + 3y^2 - 12y$, $M_0(-1;-2)$, $\Delta x = 0,2$, $\Delta y = 0,1$.

$$3. z = \sqrt{\operatorname{tg}(3x-2y)}; \quad 3 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

$$4. \text{ а) } z = x^2 + xy^2, \text{ где } x = e^{2t}, y = \sin t. \quad \frac{dz}{dt} - ?$$

$$\text{б) } z = \sqrt{x^2 - y^2} + x^2 y, \text{ где } x = \sqrt{u} v^2, y = \frac{u}{\sqrt{v}}. \quad \frac{\partial z}{\partial u} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} - ?$$

$$5. z = a^2 y x^2 + a y^3.$$

$$6. z = x^2 + 2y^2 - 2 \ln x - 18 \ln y.$$

$$7. z = xy, \text{ если } 2x + 3y = 12.$$

$$8. z = x^2 - y^2, D: x^2 + y^2 \leq 1.$$

$$9. z = y + \ln \frac{x}{z}, \quad M_0(1;1).$$

$$10. z = e^{xy} + y^2 - x + x^2, \quad M_0(0;1), \quad \bar{a} = \overline{M_0 N}, \text{ где } N(1;2).$$

11.

x	1,2	2,1	3,3	4,2	5,3
y	1,4	2,4	4,5	5,6	6,4

ВАРИАНТ 9

$$1. \text{ а) } z = \arcsin(x+y) + \arccos(1-x); \quad \text{б) } z = \frac{\sqrt{x-\sqrt{y}}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

$$2. z = x^2 + 9x - y^2 + 2xy, \quad M_0(1;2), \quad \Delta x = 0,1, \quad \Delta y = 0,2.$$

$$3. z = \frac{x}{2x-3y}; \quad x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

$$4. \text{ а) } z = e^{xy}(x-y), \text{ где } x = u^2 + v, y = uv^2. \quad \frac{\partial z}{\partial u} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} - ?$$

$$\text{б) } z = \cos^2 \frac{x}{y} + x^y, \text{ где } y = \sqrt{x} - x^2. \quad \frac{\partial z}{\partial x} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial y} - ?$$

$$5. z = a^2 x^4 + a^2 y^4 + a x^2 y^2.$$

$$6. z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 4.$$

7. $z = \cos^2 x + \cos^2 y$, если $x + \frac{\pi}{4} = y$.

8. $z = xy(x + y + 1)$, $D: y = \frac{1}{x}, x = 1, y = 0, x = 2..$

9. $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$, $M_0(2;1;\sqrt{5})$.

10. $z = \ln xy + x^2 - y^2 - 2$, $M_0(1;1)$, $\bar{a} = 4\bar{i} - 3\bar{j}$.

11.

x	1,1	2,3	3,4	4,1	5,4
y	1,8	2,6	3,9	5,1	6,2

ВАРИАНТ 10

1. а) $z = \arcsin \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2 - 1}$;

б) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 2x}$.

2. $z = x^2 + y^2 - 2xy$, $M_0(2;1)$, $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,2$.

3. $z = y \ln(x^2 - y^2)$; $y^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + xy \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = xz$.

4. а) $z = \cos xy + x^2 - y$, где $x = 2t^2$, $y = 1 - 2t^2$. $\frac{dz}{dt} - ?$

б) $z = \frac{u - v}{u^2 + v^2}$, где $u = \frac{x}{\sqrt{y-1}}$, $v = \frac{y^2}{\sqrt{x}}$. $\frac{\partial z}{\partial x} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} - ?$

5. $z = a^2 x^4 + a^2 y^4 - 2ax^2 y^2$.

6. $z = x^3 - 3x^2 - y^2 + 6xy + 15x - 2y + 3$.

7. $z = 3x + 2y + 6$, если $x^2 + y^2 = 1$.

8. $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$, $D: x = 0$, $y = 0, 2x + 3y - 12 = 0$.

9. $x^3 + 2y^2 + z^3 - 3xyz - 1 = 0$, $M_0(1;1;1)$.

10. $z = x^2 - y^2$, $M_0(1;1)$, $\bar{a} = \bar{i} - 3\bar{j}$.

11.

x	1,1	2,3	3,4	4,1	5,4
y	1,7	2,7	3,7	4,9	5,9

ВАРИАНТ 11

1. а) $z = \sqrt{1-x^2} + y + \sqrt{1-x^2-y}$;
 б) $z = \ln(4x - y^2 - 8) \ln(4 - x)$.
2. $z = x^2 + y^2 + x + 4 - xy$, $M_0(2;1)$, $\Delta x = 0,2$, $\Delta y = 0,1$.
3. $z = x \sin \frac{y}{x} - x^2 - y^2$; $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$.
4. а) $z = 2x^2 - xy^2 + y$, где $x = 2u - v$, $y = u + v$.
 $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$
 б) $z = \cos \frac{u}{v}$, где $u = \sqrt[3]{t}$, $v = \frac{1}{\sqrt{t}}$. $\frac{dz}{dt} - ?$
5. $z = 5ax^2y - y^3$.
6. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.
7. $z = \frac{4}{x} + \frac{2}{y}$, если $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$.
8. $z = x^2 + 3y^2 + x - y$, $D: x=1, y=1$ $x+y=1$.
9. $z = \ln z - x - y + 4$, $M_0(1;2;1)$.
10. $z = x^3 + xy - y^2$, $M_0(2;-1)$, $\bar{a} = \overline{M_0N}$, где $N(1;1)$.
- 11.

x	1,2	2,3	3,4	4,1	5,4
y	1,6	2,7	4,1	5,2	6,1

ВАРИАНТ 12

1. а) $z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$; б) $z = \frac{\ln x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$.
2. $z = 4 - x^2 - y^2 + xy$, $M_0(1;1)$, $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,2$.
3. $z = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$; $x^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - xy \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$.

4. а) $z = \operatorname{arctg}(xy)$; , где $x = t^2 + 1$, $y = t^3$. $\frac{dz}{dt} - ?$

б) $z = \sin^2 \frac{u}{v}$, где $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt[3]{y}$ $\frac{\partial z}{\partial x} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} - ?$

5. $z = x^2 y + xy^3 + ax^3 + ay^3$.

6. $z = x^3 + y^3 - 6xy$.

7. $z = xy$, если $2x - y = 4$.

8. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 6x + 2y - 1$, $D: x = 3; y = 0, y = x + 2$.

9. $xz + z^2 - 2y^2 - 4y^2 x - 2 = 0$, $M_0(1; 2; 1)$.

10. $z = xy - y^2$, $M_0(2; 3)$, $\bar{a} = -2\bar{i} + j$.

11.

x	1,2	2,3	3,4	4,2	5,3
y	1,8	2,7	3,9	4,9	5,8

ВАРИАНТ 13

1. а) $z = e^{\frac{1}{x-y}} + \sqrt{xy}$; б) $z = \ln((x-1)(y+1))$

2. $z = x^2 + y^2 + 2xy - 2x$, $M_0(2; 2)$, $\Delta x = 0,2$, $\Delta y = 0,1$.

3. $z = \sin^2(3x - 4y)$; $4 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 3 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

4. а) $z = \arcsin(4x^2 - t + y^3)$; , где $x = \sqrt{3t}$, $y = \frac{1}{t}$. $\frac{\partial z}{\partial t} - ?$ $\frac{dz}{dt} - ?$

б) $z = \cos \sqrt{uv}$, где $u = e^{-x+y}$, $v = \frac{1}{x-y}$ $\frac{\partial z}{\partial x} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} - ?$

5. $z = 3x^3 + 3y^3 - a(x^2 y + xy^2)$.

6. $z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$.

7. $z = x^2 + y^2$, если $x + y = 2$.

8. $z = x^2 - 2xy - 4x + 8y$, $D: x \geq 0; y \geq 0, x \leq 16, y \leq 2$.

9. $3xyz - z^3 = 8$, $M_0(0; 2; -2)$.

10. $z = \ln x + tg(x^2 + y^2)$, $M_0(1; 1)$, $\bar{a} = -3\bar{i} + j$.

11.

x	1,2	2,3	3,4	4,3	5,2
y	1,8	2,7	3,8	4,8	5,7

ВАРИАНТ 14

1. а) $z = \sqrt{x} + \arcsin y$; б). $z = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - x}}{\sqrt{2x - x^2 - y^2}}$

2. $z = 2x^2 - y^2 + 2x - 3y + 5$, $M_0(1;-1)$, $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,2$.

3. $z = e^{xy}$; $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2xyz$.

4. а) $z = \ln(x^2 - y^2)$, где $x = u \sin v$, $y = u \cos v$, $\frac{\partial z}{\partial u} - ? \frac{\partial z}{\partial v} - ?$

б) $z = \arctg \frac{x-y}{2}$, где $y = 2^{-x}$, $\frac{\partial z}{\partial x} - ? \frac{dz}{dx} - ?$

5. $z = a^2(x^2y + xy^2) - 4x^3 - 4y^3$.

6. $z = xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$.

7. $z = 2x - y + 3$, если $x^2 + y^2 = 1$.

8. $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$, $D: x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$.

9. $e^{-3z} - 6z + 3xy = 10$, $M_0(3;1;0)$.

10. $z = 5x + 10x^2y + y^5$, $M_0(1;2)$ $\bar{a} = \overline{M_0N}$, где $N(5;1)$.

11.

x	1,2	2,3	3,5	4,2	5,3
y	1,8	2,9	3,9	4,8	5,6

ВАРИАНТ 15

1. а) $z = \sqrt{x-y+2} \cdot \ln(x+y)$; б). $z = \sqrt{x \sin y}$

2. $z = xy - x^2 + y^2 + 4$, $M_0(2;-1)$, $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,1$.

3. $z = e^{-3y-x} \sin(x+3y)$; $\cdot \frac{\partial z}{\partial x} - 3 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

4. а) $z = \ln(x^2 + y^2)$, где $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$, $\frac{\partial z}{\partial u} - ? \frac{\partial z}{\partial v} - ?$

б) $z = \cos\left(\sqrt{t} + \frac{x}{y}\right)$, где $x = tgt^2$, $y = tg^2t$, $\frac{\partial z}{\partial t} - ? \frac{dz}{dt} - ?$

5. $z = 2a(x^4 + y^4) + x^2y^2$.

6. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.

7. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, если $x + y = 2$.

8. $z = x^2 + xy - 2$, $D: -y^2 \geq 4x - 4; y \leq 0$.

9. $3xyz - z^3 = a^3$, $M_0(0; a; -a)$.

10. $z = \frac{x+y}{x^2+y^2}$, $M_0(1; 2)$, $\bar{a} = \bar{i} + 2j$.

11.

x	1,1	2,2	3,1	4,2	5,4
y	1,9	3,1	4,2	5,1	6,1

ВАРИАНТ 16

1. а) $z = \ln\left(\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - 1\right) + \sqrt{x}$; б) $z = \arcsin \frac{x+2}{y}$.

2. $z = x^2 + y^2 - 4xy$, $M_0(1; 2)$, $\Delta x = 0,2$, $\Delta y = 0,1$.

3. $z = \arctg \frac{x}{y}$; $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

4. а) $z = e^{x^2+y^2}$, где $x = u + 3v$, $y = \frac{u}{2v}$, $\frac{\partial z}{\partial u} - ? \frac{\partial z}{\partial v} - ?$

б) $z = \sin^2(y - x)$, где $y = \cos x^2$, $\frac{\partial z}{\partial x} - ? \frac{dz}{dx} - ?$

5. $z = a^2(x^3 + y^3) - x^2y - y^2x$.

6. $z = x^2 + 2xy + 4y^2 - x + 2y + 1$.

7. $z = \frac{3}{x} + \frac{2}{y}$, если $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$.

8. $z = x^3 + y^3 - 3xy$, $D: 0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 3$.

9. $e^{-3x} - 6z + 3xy = 10$, $M_0(3;1;0)$.

10. $z = 5x + 10x^2y + y^5$, $M_0(1;2)$, $\bar{a} = \overline{M_0N}$, где $N(5;1)$.

11.

x	1,2	2,1	3,2	4,3	5,2
y	1,9	3,1	4,2	5,1	6,1

ВАРИАНТ 17

1. а) $z = \arcsin(x - 2y) + \frac{1}{x - y}$; б) $z = \frac{\ln(y + 1)}{\sqrt{x - y}}$.

2. $z = 4 - x^2 - y^2 - x - y$, $M_0(2;-1)$, $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,2$.

3. $z = \operatorname{tg}^3(2x - 3y)$; $3 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

4. а) $z = e^x(y - x)$; где $x = \sin^2 t$, $y = \cos t^2$, $\frac{dz}{dt} - ?$

б) $z = \frac{\sqrt{u - v}}{u}$, где $u = \frac{1}{x + y}$, $v = \sqrt[3]{x - y}$, $\frac{\partial z}{\partial x} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} - ?$

5. $z = a(x^3 + y^3) + x^2y + y^2x + 5$.

6. $z = 2x^2 + 5y^2 + 3x + 2y - 1$.

7. $z = xy$, если $x^2 + y^2 = 2$.

8. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$, $D: y = x + 1; y = 0, x = 3$.

9. $z^2 + 2xy - y^2 + 4z = 1$; $M_0(1;1;-4)$.

10. $z = \ln(x^2 + x + y^2 + xy)$, $M_0(0;1)$, $\bar{a} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$.

11. x	1,3	2,4	3,2	4,4	5,4
y	2,1	3,1	4,2	4,9	6,2

ВАРИАНТ 18

1. а) $z = \frac{1}{x^2 + y^2 - 1} + \sqrt{x - y}$; б) $z = \ln x + \ln \sin y$.

2. $z = x^2 + y^2 - 2xy$, $M_0(1;2)$, $\Delta x = 0,2$, $\Delta y = 0,1$.
3. $z = y^2 \sin(x^2 - y^2)$; $y^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + xy \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz$.
4. а) $z = \frac{x+y}{2x-y}$, где $x = e^{t^2}$, $y = -\frac{1}{\sqrt{t}}$, $\frac{dz}{dt} = ?$
- б) $z = \frac{u - e^{-v}}{v + e^u}$, где $u = \frac{1}{x-y}$, $v = \sqrt{\frac{x+y}{2}}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$
5. $z = 5x^3 + 5y^3 - a^2xy(x+y)$.
6. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.
7. $z = x^2 + 3y^2$, если $x + 2y = 6$.
8. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$, $D : x + y = 1; x = -3, y = 0$.
9. $x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz + 4 = 0$; $M_0(1;1;1)$.
10. $z = \ln(x^2 + y^2)$, $M_0(1;1)$, $\bar{a} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$.
- 11.

x	1,3	2,4	3,2	4,4	5,4
y	2,1	3,0	3,1	5,1	6,1

ВАРИАНТ 19

1. а) $z = \ln(x^2 - 3y) + \sqrt{x+2}$; б) $z = \sqrt{\sin x}$.
2. $z = 2x^2 + 3y^2 + xy + x - 2$, $M_0(2;-1)$, $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,2$.
3. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
4. а) $z = \cos(x + 2y) - \sin(2x - y)$,
где $x = u^2 - v$, $y = v^2 - u$, $\frac{\partial z}{\partial u} = ?$, $\frac{\partial z}{\partial v} = ?$
- б) $z = \frac{1}{3x - 2y + t^2}$, где $y = \sqrt[3]{t}$, $x = tg^3 t$, $\frac{\partial z}{\partial t} = ?$ $\frac{dz}{dt} = ?$
5. $z = 2y^3 - 5a^2yx^2$.
6. $z = x^3 + y^3 + 9xy + 3$.

7. $z = x^2 + y^2$, если $2x + y = 2$.

8. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$,

$D: x = 0; y = 0, y = 0.2x + 3y = 12$.

9. $2xz + z^2 - y^2 + x^2 - 3 = 0$; , $M_0(1;1)$.

10. $z = xy^2 - x^2$, $M_0(2;1)$, $\bar{a} = 2\bar{i} - 3j$.

11.

x	1,2	2,5	3,6	4,2	5,5
y	2,0	3,1	4,2	5,1	6,2

ВАРИАНТ 20

. а) $z = \arccos \frac{x}{2} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$; б) $z = \frac{1}{\sqrt{(1 - y^2)(x^2 - 1)}}$.

2. $z = x^2 + y^2 + x - 2y$, $M_0(1;1)$, $\Delta x = 0,2$, $\Delta y = 0,1$.

3. $z = \sqrt{x^2 - 3y^2}$; $3y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

4. а) $z = \cos(xy)$, где $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{3}$, $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$, $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$

б) $z = tg^3 \frac{x}{y}$, где $x = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, $\frac{\partial z}{\partial x} - ?$, $\frac{dz}{dx} - ?$

5. $z = 3y^3 + 7axy^2$.

6. $z = x^3 - 3xy - y^3 + 5$.

7. $z = xy$, если $x + 2y = 7$.

8. $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$, $D: y = \frac{1}{2}x^2, y = 3$.

9. $x^2 - 3xz^2 + z - y^2 = -2$; , $M_0(2;1)$.

10. $z = \ln(x + y^2)$, $M_0(0;1)$, $\bar{a} = 3\bar{i} + 2j$.

11.

x	1,1	2,3	3,2	4,4	5,3
y	2,1	3,2	4,9	5,1	6,3

ВАРИАНТ 21

а) $z = \ln(x - y) + e^{\frac{1}{x-2}}$; б) $z = \frac{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$.

2. $z = x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 2x + 3y - 12$, $M_0(-1; 1)$, $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,2$.

3. $z = xy + \arctg \frac{y}{x}$; $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

4. а) $z = y \ln(x^2 - 2)$, где $x = e^{2t} + 1$, $y = 3e^t - 2$, $\frac{dz}{dt} = ?$

б) $z = \frac{x - y}{x^2 + y^2}$, где $x = \sin^2 v$, $y = \cos u^2$, $\frac{\partial z}{\partial u} = ?$, $\frac{\partial z}{\partial v} = ?$

5. $z = 3x^3 - a^2xy^2$.

6. $z = (x^2 - 2)^2 - 2y^2$.

7. $z = xy^2$, если $2y - 3x = 1$.

8. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 8$, $D: x = 2$, $y = 4$, $x + y = 2$, $x = 0$

9. $z^3 - 3xyz = 8$; $M_0(2; 0; 2)$

10. $z = 2 \sin 2x - y^2 + 4x$, $M_0(0; 1)$, $\bar{a} = 5\bar{i} - 2\bar{j}$

11.

x	1,2	2,2	3,3	4,2	5,4
y	2,2	3,1	4,4	5,2	6,1

ВАРИАНТ 22

1. а) $z = \frac{\sqrt{2x + 3y - 1}}{x - y} + \arccos(x + 1)$; б) $z = \ln y + \ln \sin x$

2. $z = 2x^2 + 3x - y^2 - xy$, $M_0(2; -2)$, $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,2$.

3. $z = \ln(x^2 - y^2)$; $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{x + y}$.

4. а) $z = e^{xy}(2 - x - y)$,

где $x = \sin(u + v)$, $y = u^2v$, $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$, $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$

б) $z = \operatorname{tg}^3 \sqrt{x} (x - \operatorname{arctg}^2 y)$, где $y = \frac{1}{\ln x}$, $\frac{\partial z}{\partial x} - ?$, $\frac{dz}{dx} - ?$

5. $z = 3y^3 + 6a^3yx^2$;

6. $z = 4xy - \frac{25}{x} - \frac{10}{y}$;

7. $z = x^2 + y^2$, если $x - y = 3$.

8. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x$, $D : x = 0; y = 0, x + y = 2$.

9. $z^3 - 2xyz - 2y - 4 + x^3 + y^3 = 0$, $M_0(1;1;2)$

10. $z = \frac{x}{y} + xy$, $M_0(2;1)$, $\bar{a} = \overline{M_0N}$, где $N(0;5)$

11.

x	1,2	2,5	3,3	4,2	5,1
y	2,1	3,0	4,1	5,2	6,3

ВАРИАНТ 23

1. а) $z = \arcsin 2x + \sqrt{y^2 - x - 1}$; б). $z = \ln(x - 1) + \ln(y^2 - 4)$

2. $z = x^2 + y^2 + 10xy$, $M_0(1;1)$, $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,2$.

3. $z = \frac{x^3 + y^3}{3} + \frac{x^2y + xy^2}{2}$; $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = (x + y)^2 + \frac{x^2 + y^2}{2}$.

4. а) $z = \sin(x^2y) + 3\sin(x - y)$, где $x = e^{t^2} + 2$, $y = \frac{1}{t}$, $\frac{dz}{dt} - ?$

б) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, где $x = \arcsin \frac{v}{u}$, $y = \arcsin \frac{u}{v}$, $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$

$\frac{\partial z}{\partial v} - ?$

5. $z = a^2x^3y + 2axy^3$.

6. $z = 2x^2 + 3xy + 2y^2 - 7\ln x - 7\ln y$.

7. $z = xy^2$, если $y - 2x = 3$.

8. $z = x^2 + xy$, $D: -1 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 3$.

9. $z = y \ln(x + z) - 1$, $M_0(2; 3; -1)$.

10. $z = \ln(3x^2 + 4y^2)$, $M_0(1; 3)$, $\bar{a} = 2\bar{i} - j$.

11.

x	1,2	2,4	3,4	4,1	5,2
y	1,9	2,8	3,9	4,5	6,1

ВАРИАНТ 24

1. а) $z = \arccos(x + 1) + \frac{1}{y - 2}$; б) $z = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$.

2. $z = 4 - y^2 + xy + x^2$, $M_0(2; 1)$, $\Delta x = 0,2$, $\Delta y = 0,1$.

3. $z = \cos y + (y - x) \sin y$; $(x - y) \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}$.

4. а) $z = \ln(x^2 + y^2 + 2y + 1)$, где $x = \sqrt{t + 1}$, $y = t^2$ $\frac{dz}{dt} - ?$

б) $z = \arctg^3 \frac{y - x}{x + y}$, где $y = \sqrt{x^2 - 1}$, $\frac{\partial z}{\partial x} - ?$ $\frac{dz}{dx} - ?$

5. $z = ax^3y - 2xy^3$.

6. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

7. $z = x - 2y - 4$, если $x^2 + y^2 = 1$.

8. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$, $D: -y = 1; y = -1; x = 0; x = 2$.

9. $z - 5x^2y + 3xy^2z + 13 = 0$, $M_0(2; 1; 1)$.

10. $z = \arctg(xy^2)$, $M_0(2; 3)$, $\bar{a} = 4\bar{i} - 3j$.

11.

x	1,2	2,4	3,3	4,5	5,3
y	2,1	3,2	3,9	4,9	6,1

ВАРИАНТ 25

1. а) $z = \ln x \ln y + \frac{1}{x+2}$; б) $z = \arcsin \frac{x-2}{y}$.

2. $z = x^2 + y^2 + 2x - 4$, $M_0(1;3)$, $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,2$.

3. $z = \frac{x}{y}$; $x \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}$.

4. а) $z = \cos(x^2 + y^2) - 5xy$, где $x = u - 5y$, $y = \frac{u}{v}$, $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$, $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$

б) $z = \sin(e^{-t}) + t \sin x$, где $t = \sqrt[3]{x} \cos x$, $\frac{\partial z}{\partial x} - ?$, $\frac{dz}{dx} - ?$

5. $z = 5x^4 - a^2 x^2 y^2 + 5y^4$.

6. $z = e^{x-4y}(x^2 + 2y^2)$.

7. $z = x^2 y$, если $x - 2y = -1$.

8. $z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x$; $D: x \leq 0$; $y \leq 0$, $x + y + 2 \geq 0$.

9. $3xz + z^2 + y^2 - 5z = -3$; $M_0(-1;2;1)$.

10. $z = \ln(5x^2 + 3y^2)$, $M_0(1;1)$, $\bar{a} = \overline{M_0 N}$, где $N(4;3)$

11.

x	1,1	2,4	3,3	4,6	5,2
y	2,2	3,1	4,2	5,3	6,4

ВАРИАНТ 26

1. а) $z = \ln(x \ln(y - x - 1))$; б) $z = \sqrt{\frac{y - x - 1}{\ln(x + 4)}}$.

2. $z = x^2 + y^2 + y - xy$, $M_0(2;1)$, $\Delta x = 0,01$, $\Delta y = 0,02$.

3. $z = \frac{\sin(x - y)}{x}$ $\frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial z}{\partial x} \right) - x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

4. а) $z = \sin^2 \left(\frac{x}{\sqrt{y}} \right) + \log_2(x^3 y - 5x)$, где $x = \frac{u}{3v}$, $y = u^2 v$,

$$\frac{\partial z}{\partial u} - ?, \frac{\partial z}{\partial v} - ?$$

$$б) z = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + e^{-2y}}}, \text{ где } x = ctg^3(\sqrt{t}), y = tg^2(\sqrt[3]{t}), \frac{dz}{dt} - ?$$

$$5. z = ay^2x - x^3.$$

$$6. z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

$$7. z = x^2 + y^2, \text{ если } 3x + 2y = 6.$$

$$8. z = \sin x + \sin y + \sin(x + y), D: 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$9. z^2 - 2x^2z + 4y^3 = 3; , M_0(1;1;1).$$

10. $z = xe^y$, $M_0(2;2)$, $\bar{a}$ совпадает с направлением биссектрисы I координатного угла.

11.

x	1,4	2,3	3,6	4,8	5,6
y	2,2	3,4	4,7	5,2	6,6

ВАРИАНТ 27

$$1. а) z = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\log_2(2 - x^2 - 2y^2)}; \quad б). z = \sqrt{\ln x \cos y}.$$

$$2. z = 4 - y^2 + y + \frac{1}{2}x^2, M_0(1;-1), \Delta x = 0,01, \Delta y = 0,02.$$

$$3. z = xe^x; \quad x^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$4. а) z = x^2 \cos(x^2 - y) + e^{\frac{x}{y}}; , \text{ где } x = tgt^2, y = \sqrt{t^2 + 1}, \frac{dz}{dt} - ?$$

$$б) z = \sqrt[3]{\sin^2 y + y \arcsin x^2}, \text{ где } y = \sqrt[5]{x^2}, \frac{\partial z}{\partial x} - ? \quad \frac{dz}{dx} - ?$$

$$5. z = 2yx^3 + 2xy^3a.$$

$$6. z = 1 - (x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}.$$

7. $z = \cos^2 x + \cos^2 y$, если $y = x + \frac{\pi}{4}$.

8. $z = x^3 + y^3 - 3xy$, $D: 0 \leq x \leq 2; -1 \leq y \leq 2$.

9. $y^2 z - x^2 + z^3 + 11 = 0$, $M_0(1;1;-2)$.

10. $z = e^{x^2+y^2}(2x-y)$, $M_0(0;1)$, $\bar{a} = 4\bar{i} - 2j$

11.

x	1,5	2,2	3,4	4,6	5,7
y	2,1	3,1	4,2	5,3	6,4

ВАРИАНТ 28

1. а) $z = \frac{1}{\sqrt{x+y-2}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$; б) $z = \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$.

2. $z = 3 + x^2 - 2xy - 2y^2$, $M_0(1;1)$, $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,2$.

3. $z = \frac{y^2}{5x} + \operatorname{arctg}(xy)$; $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{y^2}{5x^2} = \frac{2y}{5x}$.

4. а) $z = \arcsin \frac{x}{y}$, где $x = t^2 + 1$, $y = t^3 - t$, $\frac{dz}{dt} = ?$

б) $z = \cos^2 \frac{u}{v}$, где $u = \sqrt[3]{x}$, $v = \sqrt{x-y}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$

5. $z = x^3 y^2 + xy^2 + ax^3 + ay^3$.

6. $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$.

7. $z = xy$, если $x + y = 1$.

8. $z = x^2 + xy - y^2 - 4x + 2y$, $D: x = 3$, $y = 0$, $y = x + 2$.

9. $x^2 z + z^2 - 6y^2 z + 4y^2 + 2x = 0$, $M_0(1;1;2)$.

10. $z = 4 - x^2 - y^2$, $M_0(2;3)$, $\bar{a} = -3\bar{i} + 2j$

11.

x	1,3	2,2	3,4	4,2	5,4
y	1,8	2,4	3,6	4,8	5,7

ВАРИАНТ 29

1. а) $z = \frac{\ln(x-y)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$; б) $z = \sqrt{x} \frac{\sqrt{1-y}}{x^2 + y^2 - 9}$.

2. $z = x^3 + 2xy^2 - y^3$, $M_0(1;1)$, $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,1$.

3. $z = y \ln(x^2 - y^2)$; $y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xz$.

4. а) $z = e^{xy}(x+2y)$, где $x = u^2 + v$, $y = uv$, $\frac{\partial z}{\partial u} - ? \frac{\partial z}{\partial v} - ?$

б) $z = \sin^2(xy) + x^y$, где $y = x^2 + x$, $\frac{\partial z}{\partial x} - ? \frac{dz}{dx} - ?$

5. $z = a^2x^4 + a^2y^4 + ax^2y^2$.

6. $z = xy - x^2y - xy^2$.

7. $z = 3x + 2y + 1$, если $x^2 + y^2 = 1$.

8. $z = xy$, если $x - 2y = 4$.

9. $e^z - z + x^2y = 3$, $M_0(1;2;0)$.

10. $z = (x-y)^2$, $M_0(0;3)$, $\bar{a} = 2\bar{i} + j$

11.

x	1,2	2,1	3,0	4,2	5,1
y	1,4	2,3	3,6	4,5	5,3

ВАРИАНТ 30

1. а) $z = \sqrt{x} + \sqrt{1-x^2 + y^2}$; б) $z = \ln y + \ln \sin x$.

2. $z = x^2 + 2xy + y^3$, $M_0(1;1)$, $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,2$.

3. $z = y \ln(x^2 - y^2)$; $\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

4. а) $z = x^2 - y^2$, где $x = \sin 2t$, $y = \sin^2 t$, $\frac{dz}{dt} - ?$

б) $z = e^{x-\sqrt{y}}$, где $x = \frac{u}{v}$, $y = u^2v$, $\frac{\partial z}{\partial u} - ? \frac{\partial z}{\partial v} - ?$

5. $z = 4x^4 + 4y^4 + ax^2y^2$.

6. $z = 2xy - 4x + 2y$.

7. $z = xy$, если $x + y = 2$.

8. $z = x^2 - 2xy - 4x + 8y$, если $D: x \geq 0; y \geq 0, x \leq 10, y \leq 3$.

9. $z = \ln z - 2x + y + 1$, $M_0(1;2;1)$.

10. $z = y^2 + xy - 3x$, $M_0(1;2)$, $\bar{a} = -2\bar{i} + j$

11.

x	-2	0	1	2	4
y	0.5	1	1.5	2	3

Библиографический список использованной литературы

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н.С. Пискунов.- М.: Наука, 1985 - т.1-4. - 29 с.
2. Бугров Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. - М.: Наука, 1988 - 431 с.
3. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа / Под. ред. А.В. Ефимова, Б.Б. Демидовича.- М.: Наука, 1981.- т.1-4. - 62 с.
4. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для студентов втузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов. - М.: Высш. школа, 1986 - ч.1 - 303 с.
- 5.Руководство к решению задач по высшей математике / Под ред. Е.И. Гурского. - Минск: Вышэйна школа, 1989 - ч.1 - 348 с.
6. Высшая математика для экономистов: учебное пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, И.М. Тришин и др.; Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 439 с.
7. Красс М.С. Математика для экономистов / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – СПб.: Питер, 2007. – 464 с.

Заказ № _____ от _____ 2011 г. Тираж _____ экз.
Изд-во СевНТУ