



Министерство образования и науки,
молодежи и спорта Украины
Севастопольский национальный технический университет

Методические указания и контрольные задания
для самостоятельной работы студентов
инженерных и экономических специальностей
по разделу:

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Севастополь

2011

УДК 517.512

Неопределенный интеграл. Методические указания для самостоятельной работы студентов инженерных и экономических специальностей по высшей математике / Сост. А.И. Песчанский, Л.Н. Григорюк. — Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2011. — 44 с.

Целью настоящих методических указаний является оказание помощи студентам дневной формы обучения инженерных и экономических специальностей при изучении темы «Неопределенный интеграл». В них приведены теоретические сведения, рассмотрены примеры решения типовых задач. Представлены 30 вариантов индивидуальных заданий для самостоятельного решения.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры высшей математики, протокол № 11 от 24.06.2011.

Допущено учебно-методическим центром и научно-методическим Советом СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: Ольшанская И.В., канд. техн. наук, доцент кафедры высшей математики СевНТУ

Содержание

1. Определение и основные свойства неопределенного интеграла.....	4
2. Интегрирование подведением под знак дифференциала.....	5
3. Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен.....	9
4. Интегрирование по частям.....	12
5. Интегрирование рациональных дробей.....	14
6. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.....	19
7. Интегрирование некоторых классов иррациональных функций	21
8. Варианты для самостоятельной работы.....	25
Библиографический список использованной литературы....	44

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Функция $F(x)$ называется первообразной от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если во всех точках этого отрезка выполняется равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Если функция $F(x)$ является первообразной от $f(x)$, то выражение $F(x) + C$ ($C = const$) называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Итак, $\int f(x)dx = F(x) + C$, если $(F(x))' = f(x)$.

Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, а выражение $f(x)dx$ — подынтегральным выражением.

Нахождение первообразной для данной функции $f(x)$ называется интегрированием функции $f(x)$.

Основные свойства неопределенного интеграла:

1) $\int Af(x)dx = A \int f(x)dx$, где $A = const$;

2) $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$;

3) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C, a \neq 0$;

4) $\left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$;

5) $\int f'(x)dx = f(x) + C$;

6) $\int df(x) = f(x) + C$.

Таблица неопределенных интегралов

- | | |
|---|---|
| 1) $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$ | 2) $\int \frac{du}{u} = \ln u + C;$ |
| 3) $\int e^u du = e^u + C;$ | 4) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$ |
| 5) $\int \cos u du = \sin u + C;$ | 6) $\int \sin u du = -\cos u + C;$ |
| 7) $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tgu} + C;$ | 8) $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctgu} + C;$ |
| 9) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C;$ | 10) $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C;$ |
| 11) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right + C;$ | 12) $\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C;$ |
| 13) $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + C;$ | 14) $\int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C;$ |
| 15) $\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C;$ | 16) $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C.$ |

2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПОДВЕДЕНИЕМ ПОД ЗНАК ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Если подынтегральная функция имеет вид: $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$, тогда справедлива формула

$$\begin{aligned} \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx &= \left[\begin{array}{l} u = \varphi(x) \\ du = \varphi'(x)dx \end{array} \right] = \\ &= \int f(u)du = F(u) + C = F(\varphi(x)) + C. \end{aligned} \tag{1}$$

Вычисление интеграла с помощью этой формулы называется интегрированием подведением под знак дифференциала. В этом

случае говорят, что функция $u = \varphi(x)$ подводится под знак дифференциала.

Отметим также, что формулу интегрирования (1) бывает целесообразнее использовать и в обратном порядке, т.е. справа налево. Именно, иногда удобнее вычисление интеграла

$$\int f(x) dx,$$

с помощью соответствующей замены переменной $x = \varphi(t)$, свести к вычислению интеграла

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt,$$

т.е. использовать формулу (1) в виде

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}. \quad (2)$$

Формула (2) обычно называется формулой интегрирования заменой переменной.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int x \cdot \sqrt[7]{5x^2 + 4} dx$.

Решение. Интеграл вычислим с помощью подведения функции $u = 5x^2 + 4$ под знак дифференциала:

$$\begin{aligned} \int x \cdot \sqrt[7]{5x^2 + 4} dx &= \left[\begin{array}{l} u = 5x^2 + 4 \\ du = 10x dx \\ x dx = \frac{1}{10} du \end{array} \right] = \frac{1}{10} \int u^{\frac{1}{7}} du = \frac{1}{10} \cdot \frac{u^{\frac{8}{7}}}{\frac{8}{7}} + C = \\ &= \frac{7}{80} (5x^2 + 4)^{\frac{8}{7}} + C. \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \frac{x^2 dx}{25x^6 - 49}$.

Решение. Вычисление данного интеграла сведем к табличному интегралу

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$$

подведением под знак дифференциала функции $u = 5x^3$. Имеем

$$\int \frac{x^2 dx}{25x^6 - 49} = \int \frac{x^2 dx}{(5x^3)^2 - 7^2} = \left[\begin{array}{l} u = 5x^3 \\ du = 15x^2 dx \\ x^2 dx = \frac{1}{15} du \end{array} \right] = \frac{1}{15} \int \frac{du}{u^2 - 7^2} =$$

$$= \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{2 \cdot 7} \ln \left| \frac{u-7}{u+7} \right| + C = \frac{1}{210} \ln \left| \frac{5x^3 - 7}{5x^3 + 7} \right| + C.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int \frac{\sin \frac{2}{x}}{x^2} dx$.

Решение. Подводя под знак дифференциала функцию $u = \frac{2}{x}$, получаем

$$\int \frac{\sin \frac{2}{x}}{x^2} dx = \left[\begin{array}{l} u = \frac{2}{x}, \quad du = -\frac{2}{x^2} dx \\ \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{2} du \end{array} \right] = \int \sin u \left(-\frac{1}{2} \right) du =$$

$$= -\frac{1}{2} \int \sin u du = \frac{1}{2} \cos u + C = \frac{1}{2} \cos \frac{2}{x} + C.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int \frac{\ln^5(x-1)}{x-1} dx$.

Решение. Подынтегральная функция содержит логарифм $\ln(x-1)$. Выясним, есть ли в подынтегральном выражении производная от этой логарифмической функции. Так как $(\ln(x-1))' = \frac{1}{x-1}$, тогда

$$\int \frac{\ln^5(x-1)}{x-1} dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln(x-1) \\ du = \frac{dx}{x-1} \end{array} \right] = \int u^5 du = \frac{u^6}{6} + C = \frac{(\ln(x-1))^6}{6} + C.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int \frac{x + (\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}} dx$.

Решение. С помощью почленного деления подынтегральной функции разобьем данный интеграл на два интеграла:

$$\int \frac{x + (\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}} dx = \int \frac{xdx}{\sqrt{1-9x^2}} + \int \frac{(\arccos 3x)^2 dx}{\sqrt{1-9x^2}}.$$

Для первого интеграла используем формулу $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$

при $\alpha = -\frac{1}{2}$: $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C.$

Подводя под знак дифференциала функцию $u = 1 - 9x^2$, получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{\sqrt{1-9x^2}} &= \left[\begin{array}{l} u = 1 - 9x^2 \\ du = -18xdx \\ xdx = -\frac{1}{18}du \end{array} \right] = -\frac{1}{18} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{9} \sqrt{u} + C = \\ &= -\frac{1}{9} \sqrt{1-9x^2} + C. \end{aligned}$$

Во втором интеграле подынтегральная функция содержит производную $\arccos 3x$ с точностью до постоянного множителя, поэтому

$$\begin{aligned} \int \frac{(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}} dx &= \left[\begin{array}{l} u = \arccos 3x \\ du = -\frac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}} \end{array} \right] \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = -\frac{1}{3} du \Bigg] = \\ &= -\frac{1}{3} \int u^2 du = -\frac{u^3}{9} + C = C - \frac{1}{9} (\arccos 3x)^3. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\int \frac{x + (\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}} dx = C - \frac{1}{9} (\arccos 3x)^3 - \frac{1}{9} \sqrt{1-9x^2}.$$

3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

Для отыскания интегралов вида

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

можно вначале выделить полный квадрат в знаменателе, а затем вычислить интеграл, используя метод интегрирования подведением под знак дифференциала.

Пример 6. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^2 + 5x + 7}$.

Решение. Выделим полный квадрат в знаменателе подынтегрального выражения:

$$x^2 + 5x + 7 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 7 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 5x + 7} &= \int \frac{dx}{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \left[\begin{array}{l} u = x + \frac{5}{2} \\ du = dx \end{array} \right] = \int \frac{du}{u^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 5}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 6x - 9x^2}}$.

Решение. Для удобства выделения полного квадрата в знаменателе выносим минус за скобку

$$\begin{aligned} 4 - 6x - 9x^2 &= -(9x^2 + 6x - 4) = -\left(\underbrace{(3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1}_{(3x+1)^2} - 1 - 4\right) = \\ &= -\left((3x+1)^2 - 5\right) = 5 - (3x+1)^2. \end{aligned}$$

Подводя функцию $3x + 1$ под знак дифференциала, получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-6x-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5-(3x+1)^2}} = \left[\begin{array}{l} u = 3x+1 \\ du = 3dx \\ dx = \frac{1}{3} du \end{array} \right] = \frac{1}{3} \int \frac{du}{\sqrt{5-u^2}} =$$

$$= \frac{1}{3} \arcsin \frac{u}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x+1}{\sqrt{5}} + C.$$

При вычислении интегралов

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx \text{ и } \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$$

можно применять следующий алгоритм:

- 1) выделить полный квадрат в знаменателе дроби;
- 2) сделать подстановку $x + \frac{b}{2a} = t$;
- 3) разбить интеграл на два интеграла;
- 4) проинтегрировать и сделать обратную замену.

Пример 8. Вычислить интегралы

$$\text{а) } \int \frac{(x+6)dx}{\sqrt{x^2+4x+13}}; \text{ б) } \int \frac{(4x-1)dx}{\sqrt{x^2+3x-6}}.$$

Решение. а) Выделим полный квадрат в знаменателе:

$$x^2 + 4x + 13 = (x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2) - 4 + 13 = (x+2)^2 + 9.$$

Имеем

$$\int \frac{(x+6)dx}{\sqrt{x^2+4x+13}} = \int \frac{(x+6)dx}{\sqrt{(x+2)^2+9}} = \left[\begin{array}{l} x+2=t \\ x=t-2 \\ dx=dt \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{(t-2+6)dt}{\sqrt{t^2+9}} = \int \frac{tdt}{\sqrt{t^2+9}} + 4 \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+9}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + 9)}{\sqrt{t^2 + 9}} + 4 \ln |t + \sqrt{t^2 + 9}| = \sqrt{t^2 + 9} + 4 \ln |t + \sqrt{t^2 + 9}| + C = \\
&= \sqrt{x^2 + 4x + 13} + 4 \ln |x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 13}| + C.
\end{aligned}$$

При вычислении использовали табличные интегралы

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C \quad \text{и} \quad \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 + a^2}| + C.$$

б) Интегралы вида

$$\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + C} dx \quad \text{и} \quad \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + C}} dx$$

также можно вычислять с помощью подстановки

$$t = \frac{1}{2}(ax^2 + bx + c)' \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}(2ax + b). \text{ Действительно,}$$

$$\int \frac{(4x-1)dx}{\sqrt{x^2 + 3x - 6}} = \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2}(x^2 + 3x - 6)' \\ t = x + \frac{3}{2} \\ x = t - \frac{3}{2}, dx = dt \end{array} \right] = \int \frac{\left(4\left(t - \frac{3}{2}\right) - 1\right)dt}{\sqrt{\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(t - \frac{3}{2}\right) - 6}} =$$

$$= \int \frac{4t-7}{t^2 - \frac{33}{4}} dt = \int \frac{4t}{t^2 - \frac{33}{4}} dt - 7 \int \frac{dt}{t^2 - \frac{33}{4}} = 2 \int \frac{d\left(t^2 - \frac{33}{4}\right)}{t^2 - \frac{33}{4}} -$$

$$- 7 \int \frac{dt}{t^2 - \left(\frac{\sqrt{33}}{2}\right)^2} = 2 \ln \left| t^2 - \frac{33}{4} \right| - 7 \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{33}}{2}} \ln \left| \frac{t - \frac{\sqrt{33}}{2}}{t + \frac{\sqrt{33}}{2}} \right| + C =$$

$$= 2 \ln |x^2 + 3x - 6| - \frac{7}{\sqrt{33}} \ln \left| \frac{x + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}}{x + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}} \right| + C.$$

4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Если $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемые функции от x , то справедлива следующая формула интегрирования по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du . \quad (3)$$

Применение этой формулы предполагает, что в правой части интеграл $\int v du$ может быть вычислен легче, чем исходный интеграл. Важно установить, какая функция принимается за u и что относится к dv , т.к. первый множитель дифференцируется, а второй интегрируется при переходе к интегралу в правой части. Отметим некоторые классы функций, которые интегрируются с применением этой формулы.

I класс интегралов	
$\int P_n(x)e^{ax} dx,$ $\int P_n(x)a^{ax} dx,$ $\int P_n(x)\sin(ax+b)dx,$ $\int P_n(x)\cos(ax+b)dx,$	$u = P_n(x)$, а оставшееся выражение относим к dv .
II класс интегралов	
$\int P_n(x)\ln(ax+b)dx,$ $\int P_n(x)\arcsin(ax+b)dx,$ $\int P_n(x)\arccos(ax+b)dx,$ $\int P_n(x)\operatorname{arctg}(ax+b)dx,$ $\int P_n(x)\operatorname{arcctg}(ax+b)dx$	$dv = P_n(x)dx$, а оставшееся выражение относим к u .

Пример 9. Вычислить интеграл $\int (x-5)e^{4x} dx$.

Решение. Этот интеграл относится к I классу, потому за u принимаем $x-5$:

$$\int (x-5)e^{4x} dx = \left[\begin{array}{l} u = x-5, \quad du = dx \\ dv = e^{4x} dx, \quad v = \frac{1}{4} e^{4x} \end{array} \right] = \frac{1}{4}(x-5)e^{4x} - \frac{1}{4} \int e^{4x} dx =$$

$$= \frac{1}{4}(x-5)e^{4x} - \frac{1}{16} e^{4x} + C.$$

Пример 10. Вычислить интеграл $\int x^2 \ln(1+x) dx$.

Решение. Этот интеграл относится ко II классу, за dv примем $x^2 dx$, тогда $u = \ln(1+x)$. Применяя формулу (3), получаем

$$\int x^2 \ln(1+x) dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln(1+x), \quad du = \frac{dx}{x+1} \\ dv = x^2 dx, \quad v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right] = \frac{x^3}{3} \ln(1+x) - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{x+1} dx = I$$

Дробь $\frac{x^3}{x+1}$ — неправильная, выделим целую часть:

$$\frac{x^3}{x+1} = \frac{(x^3+1)-1}{x+1} = \frac{(x+1)(x^2-x+1)-1}{x+1} = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} - \frac{1}{x+1} =$$

$$= (x^2-x+1) - \frac{1}{x+1}.$$

Следовательно,

$$I = \frac{x^3}{3} \ln(1+x) - \frac{1}{3} \left(\int (x^2-x+1) dx - \int \frac{dx}{x+1} \right) = \frac{x^3}{3} \ln(1+x) -$$

$$- \frac{1}{3} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right) + \frac{1}{3} \ln|x+1| + C = \frac{x^3}{3} \ln(1+x) - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{3} +$$

$$+ \frac{1}{3} \ln|x+1| + C.$$

Пример 11. Вычислить интеграл $\int (x^2 + 2x + 4) \sin 5x dx$.

Решение. Не следует разбивать такой интеграл на сумму интегралов, это не упростит решение, а приведет к более

громоздким выкладкам. Интеграл относится к I классу, за u принимаем $x^2 + 2x + 4$. Применяя формулу (3), получаем

$$\int (x^2 + 2x + 4) \sin 5x dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2 + 2x + 4, \quad du = (2x + 2)dx \\ dv = \sin 5x dx, \quad v = -\frac{1}{5} \cos 5x \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{1}{5} (x^2 + 2x + 4) \cos 5x + \frac{2}{5} \int (x + 1) \cos 5x dx = I.$$

К стоящему в правой части интегралу снова применяем формулу интегрирования по частям, причем к u относим многочлен $x + 1$. Окончательно получаем:

$$I = -\frac{1}{5} (x^2 + 2x + 4) \cos 5x dx + \frac{2}{5} \int (x + 1) \cos 5x dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = x + 1, \quad du = dx \\ dv = \cos 5x dx, \quad v = \frac{1}{5} \sin 5x \end{array} \right] = -\frac{1}{5} (x^2 + 2x + 4) \cos 5x dx +$$

$$+ \frac{2}{5} \left(\frac{1}{5} (x + 1) \sin 5x - \frac{1}{5} \int \sin 5x dx \right) = -\frac{1}{5} (x^2 + 2x + 4) \cos 5x dx +$$

$$+ \frac{2}{25} (x + 1) \sin 5x + \frac{2}{125} \cos 5x + C.$$

5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

Рациональной дробью называется функция, которая представляет собой отношение двух многочленов. Если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе, то дробь называется правильной. В противном случае дробь называется неправильной.

Если дробь неправильная, то, разделив числитель на знаменатель (по правилу деления многочленов), можно представить данную дробь в виде суммы многочлена и некоторой правильной дроби. Так как интегрирование многочленов не представляет затруднений, то основная трудность при интегрировании рациональных дробей

заключается в интегрировании правильных рациональных дробей.

Интегрирование правильной рациональной дроби производится разложением этой дроби на сумму простейших дробей с последующим интегрированием.

Пример.12. Вычислить интеграл $\int \frac{(x^2 + 2x + 3)}{(x^2 - 2x + 1)(x + 2)} dx$.

Решение. Подынтегральная функция — правильная дробь (степень числителя меньше степени знаменателя). Разложим ее на простейшие дроби, учитывая что $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$:

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{(x^2 - 2x + 1)(x + 2)} = \frac{A}{(x - 1)} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 2} \quad (4)$$

Подынтегральная функция представлена в виде суммы простейших дробей I и II типа. Умножив обе части равенства (4) на знаменатель левой части, получаем

$$x^2 + 2x + 3 = A(x - 1)(x + 2) + B(x + 2) + C(x - 1)^2 \quad (5)$$

Для определения коэффициентов A, B, C вначале будем давать частные значения переменной x . Удобно взять $x = 1$ и $x = -2$.

Подставляем эти значения в левую и правую части тождества (5) и получаем

$$x = 1 \quad | \quad 6 = 3B \Rightarrow B = 2,$$

$$x = -2 \quad | \quad 3 = 9C \Rightarrow C = \frac{1}{3}.$$

В правой части тождества (5) старшая степень — вторая.

Приравняем коэффициенты при x^2 в левой и правой частях тождества

$$x^2 \quad | \quad 1 = A + C \Rightarrow A = 1 - C \Rightarrow A = \frac{2}{3}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2x + 3}{(x-1)^2(x+2)} dx &= \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x-1} + 2 \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+2} = \\ &= \frac{2}{3} \ln|x-1| - 2 \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3} \ln|x+2| + C. \end{aligned}$$

Пример 13. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int \frac{3x+2x}{(x-1)(x^2+1)} dx; \quad \text{б) } \int \frac{3x^2+4}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx.$$

Решение. а) В знаменателе правильной рациональной дроби, которую надо проинтегрировать, есть комплексные различные корни: $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm i$. Поэтому в разложении этой дроби на простейшие появляется дробь III типа:

$$\frac{3x+2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Умножим обе части тождества на знаменатель левой части

$$3x + 2 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x - 1).$$

Приравняем значения обеих частей этого тождества при $x = 1$:

$$x = 1 \quad \left| \quad 5 = 2A \Rightarrow A = \frac{5}{2} \right.$$

Дальше будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества, предварительно преобразовав его к виду:

$$3x + 2 = A(x^2 + 1) + B(x^2 - x) + C(x - 1);$$

$$x^2 \quad \left| \quad 0 = A + B \Rightarrow B = -\frac{5}{2}, \right.$$

$$x \quad \left| \quad 3 = -B + C, \quad C = 3 + B \Rightarrow C = \frac{1}{2} \right.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+2}{(x-1)(x^2+1)} dx &= \frac{5}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{5}{2} \int \frac{xdx}{x^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = \\ &= \frac{5}{2} \ln|x-1| - \frac{5}{4} \ln|x^2+1| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.\end{aligned}$$

б) Квадратный трехчлен $x^2 + 2x + 5$ в знаменателе правильной рациональной дроби $\frac{3x^2 + 4}{(x-1)(x^2 + 2x + 5)}$ не имеет действительных корней. Поэтому эта дробь раскладывается на простейшие следующим образом:

$$\frac{3x^2 + 4}{(x-1)(x^2 + 2x + 5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 5}.$$

После умножения обеих частей на знаменатель левой части получаем тождество

$$3x^2 + 4 = A(x^2 + 2x + 5) + (Bx + C)(x - 1),$$

или

$$3x^2 + 4 = A(x^2 + 2x + 5) + B(x^2 - x) + C(x - 1).$$

Для определения коэффициентов A, B, C удобно приравнять значения левой и правой частей этих тождеств при $x=1$ и коэффициенты при x^2 и x :

$$\begin{array}{l|l} x=1 & 7 = 8A \Rightarrow A = \frac{7}{8}, \\ x^2 & 3 = A + B \Rightarrow B = \frac{17}{8}, \\ x & 0 = 2A - B + C \Rightarrow C = \frac{3}{8}. \end{array}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{(3x^2+4)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)} &= \frac{7}{8} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{8} \int \frac{17x+3}{(x+1)^2+4} dx = \\ &= \left[\frac{x+1=t}{dx=dt} \right] = \frac{7}{8} \ln|x-1| + \frac{17}{16} \int \frac{2t}{t^2+4} dt - \frac{7}{4} \int \frac{dt}{t^2+4} = \\ &= \frac{7}{8} \ln|x-1| + \frac{7}{16} \ln|t^2+4| - \frac{7}{8} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \\ &= \frac{7}{8} \ln|x-1| + \frac{17}{16} \ln|x^2+2x+5| - \frac{7}{8} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C. \end{aligned}$$

Пример 14. Вычислить интеграл $\int \frac{x^4+x^3+8}{x^2-4x} dx$.

Решение. Подынтегральная функция — дробь неправильная. Выделим целую часть, разделив числитель на знаменатель уголком, и представим дробь в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\begin{array}{r} \frac{x^4+x^3+8}{x^4-4x^3} \quad \left| \frac{x^2-4x}{x^2+5x+20} \right. \\ \underline{5x^3+8} \\ 5x^3-20x^2 \\ \underline{20x^2+8} \\ 20x^2-80x \\ \underline{80x+8} \text{ (остаток).} \end{array}$$

Следовательно, $\frac{x^4+x^3+8}{x^2-4x} = x^2+5x+20 + \frac{80x+8}{x^2-4x}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4+x^3+8}{x^2-4x} dx &= \int \left(x^2+5x+20 + \frac{80x+8}{x^2-4x} \right) dx = \int (x^2+5x+20) dx + \\ &+ 8 \int \frac{10x+1}{x^2-4x} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 20x + 8 \int \frac{10x+1}{x^2-4x} dx. \end{aligned}$$

Разложим правильную рациональную дробь под знаком последнего интеграла на простейшие:

$$\frac{10x+1}{x(x-4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} \Rightarrow 10x+1 = A(x-4) + Bx.$$

Приравнивая значения левой и правой частей последнего тождества при $x=0$ и $x=4$, получаем

$$\begin{array}{l|l} x=0 & 1 = -4A \Rightarrow A = -\frac{1}{4}, \\ x=4 & 41 = 4B \Rightarrow B = \frac{41}{4}. \end{array}$$

Следовательно

$$\int \frac{10x+1}{x^2-4x} dx = -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x} + \frac{41}{4} \int \frac{dx}{x-4} = \frac{1}{4} \ln|x| + \frac{41}{4} \ln|x-4| + C.$$

Окончательно имеем

$$\int \frac{x^4 + x^3 + 8}{x^2 - 4x} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 20x - 2 \ln|x| + 82 \ln|x-4| + C.$$

6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Интеграл $\int R(\sin x, \cos x) dx$, где R — рациональная функция своих аргументов, с помощью универсальной тригонометрической подстановки $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ всегда сводится к интегралу от рациональной функции. Действительно,

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad x = 2 \arctg t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right] =$$

$$= \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример 15. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{4\cos x - 3\sin x - 5}$.

Решение. Полагаем $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4\cos x - 3\sin x - 5} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) - 6\frac{t}{1+t^2} - 5} = -2 \int \frac{dt}{9t^2 + 6t + 1} = \\ &= -2 \int \frac{dt}{(3t+1)^2} = -2 \int (3t+1)^{-2} dt = = \frac{2}{3} \frac{1}{3t+1} + C = \frac{2}{9\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3} + C. \end{aligned}$$

Наряду с универсальной тригонометрической подстановкой полезно использовать и другие подстановки, которые в некоторых случаях быстрее приводят к цели. Также полезными при интегрировании тригонометрических выражений являются следующие формулы тригонометрии:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x,$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)),$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

Пример 16. Вычислить интеграл $\int 32 \sin^4 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} dx$.

Преобразуем подынтегральную функцию, используя приведенные выше тригонометрические формулы. Имеем:

$$32\sin^4 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = 4 \cdot 2\sin^2 \frac{x}{2} \cdot 4\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = 4(1-\cos x) \left(2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right)^2 =$$

$$= 4(1-\cos x) \sin^2 x = 4\sin^2 x - 4\cos x \cdot \sin^2 x = 2(1-\cos 2x) - 4\cos x \cdot \sin^2 x.$$

Тогда

$$32 \int \sin^4 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} dx = 2 \int (1 - \cos 2x) dx - 4 \int \cos x \cdot \sin^2 x dx =$$

$$= 2 \int dx - 2 \int \cos 2x dx - 4 \int \sin^2 x d(\sin x) = 2x - \sin 2x - 4 \cdot \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Пример 17. Вычислить интеграл $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos^{11} x}} dx$.

Решение. В числителе $\sin^3 x$ представим в виде:

$$\sin^3 x = \sin^2 x \sin x = (1 - \cos^2 x) \sin x.$$

Тогда интеграл можно вычислить подведением функции $\cos x$ под знак интеграла:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos^{11} x}} dx = \int (\cos)^{-\frac{11}{2}} (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \left[\begin{array}{l} u = \cos x \\ du = -\sin x dx \end{array} \right] =$$

$$= -\int u^{-\frac{11}{2}} (1 - u^2) du = -\frac{2}{5} u^{-\frac{5}{2}} + \frac{2}{9} u^{-\frac{9}{2}} + C = \frac{2}{9} \frac{1}{(\cos x)^{\frac{9}{2}}} + \frac{2}{5} \frac{1}{(\cos x)^{\frac{5}{2}}} + C.$$

7. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Интегралы вида

$$\int R \left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots \right) dx$$

где R — рациональная функция своих аргументов, $m_1, n_1, m_2, n_2, \dots$ — целые числа, вычисляется с помощью

подстановки $x = t^s$, где s — общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \dots$.

Пример 18. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[5]{x^3}} dx$.

В подынтегральную функцию входят радикалы с разными показателями: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ и $\sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}}$. Для дробей $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{5}$ наименьшим общим знаменателем будет 10. Поэтому сделаем замену $x = t^{10}$, тогда $\sqrt{x} = t^5$, $\sqrt[5]{x^3} = t^6$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[5]{x^3}} dx &= \left[\begin{array}{l} x = t^{10}, \quad dx = 10t^9 dt \\ t = \sqrt[10]{x} \end{array} \right] = \int \frac{10t^9 dt}{t^5 - t^6} = -10 \int \frac{(t^4 - 1) + 1}{t - 1} dt = \\ &= -10 \int (t^3 + t^2 + t + 1) dt - 10 \int \frac{dt}{t - 1} = -10 \left(\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t \right) - 10 \ln |t - 1| + \\ &+ C = -10 \left(\frac{(\sqrt[10]{x})^4}{4} + \frac{(\sqrt[10]{x})^3}{3} + \frac{(\sqrt[10]{x})^2}{2} + \sqrt[10]{x} \right) - 10 \ln |\sqrt[10]{x} - 1| + C. \end{aligned}$$

Вычисление интегралов вида

$$\int R(x, \sqrt{l^2 - x^2}) dx, \quad \int R(x, \sqrt{x^2 - l^2}) dx, \quad \int R(x, \sqrt{x^2 + l^2}) dx$$

производится с помощью соответствующих тригонометрических подстановок:

$$x = l \sin t, \quad x = \frac{l}{\cos t}, \quad x = l \operatorname{tg} t.$$

Пример 19. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int \sqrt{64 - x^2} dx, \quad \text{б) } \int \frac{\sqrt{x^2 - 8}}{x^4} dx.$$

Решение. а) Сделаем замену $x = 8 \sin t$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \sqrt{64 - x^2} dx &= \left[\begin{array}{l} x = 8 \sin t \\ dx = 8 \cos t dt \end{array} \right] = \int \sqrt{64 - 64 \sin^2 t} \cdot 8 \cos t dt = \\ &= 64 \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = 64 \int \cos^2 t dt = \\ &= 32 \int (1 + \cos 2t) dt = 32 t + 16 \sin 2t + C = \\ &= 32 t + 32 \sin t \cos t + C = 32 t + 32 \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} + C = \\ &= 32 \arcsin \frac{x}{8} + \frac{x}{2} \sqrt{64 - x^2} + C. \end{aligned}$$

б) Произведем замену $x = \frac{\sqrt{8}}{\cos t}$, получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2 - 8}}{x^4} dx &= \left[\begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{8}}{\cos t}, \quad \cos t = \frac{\sqrt{8}}{x} \\ dx = \frac{\sqrt{8} \sin t dt}{\cos^2 t} \end{array} \right] = \int \frac{\sqrt{\frac{8}{\cos^2 t} - 8}}{\frac{64}{\cos^4 t}} \cdot \frac{\sqrt{8} \sin t}{\cos^2 t} dt = \\ &= \frac{8}{64} \int \frac{\sin^2 t \cos^4 t}{\cos t \cos^2 t} dt = \frac{1}{8} \int \sin^2 t \cos t dt = \frac{1}{8} \int \sin^2 t d(\sin t) = \\ &= \frac{1}{8} \frac{\sin^3 t}{3} + C = \frac{1}{24} \sin^2 t \sin t + C = \frac{1}{24} (1 - \cos^2 t) \sqrt{1 - \cos^2 t} + C = \\ &= \frac{1}{24} \left(1 - \frac{8}{x^2} \right) \sqrt{1 - \frac{8}{x^2}} + C = \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{x^3} (x^2 - 8)^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

Пример 20. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(x^2 + 81)\sqrt{x^2 + 81}}$.

Решение. Выполним подстановку $x = 9 \operatorname{tg} t$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + 81)\sqrt{x^2 + 81}} &= \left[\begin{array}{l} x = 9 \operatorname{tg} t \\ dx = \frac{9 dt}{\cos^2 t} \end{array} \right] = 9 \int \frac{dt}{\cos^2 t (81 \operatorname{tg}^2 t + 81) \sqrt{81 \operatorname{tg}^2 t + 81}} = \\ &= \frac{1}{81} \int \frac{dt}{\cos^2 t \cdot \frac{1}{\cos^2 t} \cdot \frac{1}{\cos t}} = \frac{1}{81} \int \cos t dt = \frac{1}{81} \sin t + C = \frac{1}{81} \operatorname{tg} t \cdot \cos t + C = \\ &= \frac{1}{81} \operatorname{tg} t \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}} + C = \frac{x}{\sqrt{81 + x^2}} + C. \end{aligned}$$

8. ВАРИАНТЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант 1.

1. $\int x e^{3x^2} dx;$
2. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx;$
3. $\int \frac{(\ln x)^2 + 1}{x} dx;$
4. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx;$
5. $\int \frac{(\arccos x)^3 + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx;$
6. $\int \frac{dx}{9x^2 + 6x + 5};$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2+3x}};$
8. $\int \frac{(3x+1)dx}{x^2+4x+5};$
9. $\int (3x+4)e^{3x} dx;$
10. $\int \ln^2 x dx;$
11. $\int (x^2 + 2x + 4) \sin x dx;$
12. $\int \frac{4x+1}{(x+2)^3(x-4)} dx;$
13. $\int \frac{5x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2(x^2+4)} dx;$
14. $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 - x} dx;$
15. $\int \frac{dx}{\cos x(1-\sin x)};$
16. $\int \sin^4 \frac{x}{8} \cos^4 \frac{x}{8} dx;$
17. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx;$
18. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} dx;$
19. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x-9}};$
20. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4+x^2}}.$

Вариант 2.

1. $\int x(5x^2 + 1)^{10} dx;$
2. $\int \frac{xdx}{9x^4 + 1};$
3. $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx;$
4. $\int \frac{e^x}{3+4e^x} dx;$
5. $\int \frac{dx}{(\arccos x)^5 \sqrt{1-x^2}};$
6. $\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 3};$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}};$
8. $\int \frac{4x-3}{x^2+3x+4} dx;$
9. $\int (5x-2)e^{3x} dx;$

10. $\int x \ln^2 x dx$; 11. $\int (x^2 + 4x + 3) \cos x dx$; 12. $\int \frac{(3x-1)dx}{(x-1)^3(x+2)}$;
 13. $\int \frac{x^3 + 4x^2 + 4x + 2}{(x+1)^2(x^2+x+1)} dx$; 14. $\int \frac{x^3 + 2}{x^2 - 3x} dx$; 15. $\int \frac{\cos x}{2 + \cos x} dx$;
 16. $\int 2^4 \sin^6 x \cos^2 x dx$; 17. $\int \cos^5 x dx$;
 18. $\int \frac{1 - \sqrt[6]{x} + 2\sqrt[3]{x}}{x + 2\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^4}} dx$; 19. $\int x^2 \sqrt{1 - x^2} dx$; 20. $\int \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x^2} dx$.

Вариант 3.

1. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{4 + x^5}}$; 2. $\int x \sin(4 - x^2) dx$; 3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x - 9}}$;
 4. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4 - x^6}}$; 5. $\int e^x \sin(e^x) dx$; 6. $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 5}$;
 7. $\int \frac{dx}{\sqrt{7 - 6x - x^2}}$; 8. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5 + x - x^2}}$; 9. $\int (4 - 16x) \sin 4x dx$;
 10. $\int \arcsin 2x dx$; 11. $\int (2x^2 - 1)e^{2x} dx$;
 12. $\int \frac{x^2 + 1}{(x-3)(x+2)^2} dx$; 13. $\int \frac{(x^3 + 6x^2 + 9x + 6)}{(x+1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx$;
 14. $\int \frac{3x^3 + 25}{x^2 + 3x + 2} dx$; 15. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 1}$;
 16. $\int 2^8 \sin^8 x dx$; 17. $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$;
 18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x}}$; 19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}$; 20. $\int \sqrt{256 - x^2} dx$.

Вариант 4.

1. $\int x^2 (4x^3 + 1)^{20} dx;$
2. $\int \frac{\ln^4 x dx}{x};$
3. $\int \frac{(\arcsin x)^5 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx;$
4. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx;$
5. $\int \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx;$
6. $\int \frac{dx}{x^2 + x + 1};$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2-4x}};$
8. $\int \frac{(5x+3)dx}{x^2+10x+23};$
9. $\int (x+1) \cos x dx;$
10. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx;$
11. $\int (2x^2 - 1) \sin 2x dx;$
12. $\int \frac{4x+1}{(x+3)(x-1)^2} dx;$
13. $\int \frac{x^3+9x^2+21x+21}{(x+2)^2(x^2+3)} dx;$
14. $\int \frac{(3x^3+2x^2+1)dx}{(x+2)(x-2)(x-1)};$
15. $\int \frac{\cos x}{1 + \sin x - \cos x} dx;$
16. $\int 2^8 \sin^6 \frac{x}{8} \cos^2 \frac{x}{8} dx;$
17. $\int \cos^4 x \sin^3 x dx;$
18. $\int \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[6]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[6]{x^5}} dx;$
19. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}};$
20. $\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}}.$

Вариант 5.

1. $\int \frac{2x dx}{1+x^4}$
2. $\int \frac{e^{2x} dx}{e^{2x} + 5};$
3. $\int \frac{\sqrt{\lg x - 3}}{\cos^2 x} dx;$
4. $\int \frac{\ln x - 3}{x\sqrt{\ln x}} dx;$
5. $\int \frac{(1-\cos x)}{(x-\sin x)^2} dx;$
6. $\int \frac{dx}{x^2+4x+8};$
7. $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}};$
8. $\int \frac{(4x+8)dx}{3x^2+12x+5};$
9. $\int (x+6) \sin 2x dx;$
10. $\int x \ln(x-1) dx;$
11. $\int (2x^2 - 1) \cos 2x dx;$

12. $\int \frac{(x^2+x-1)}{x^3+x^2-6x} dx$; 13. $\int \frac{x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$;
 14. $\int \frac{(3x^3+1)dx}{x^2-1}$; 15. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$;
 16. $\int 2^4 \cos^8\left(\frac{x}{2}\right) dx$; 17. $\int \sin^{10} x \cos^3 x dx$;
 18. $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+\sqrt[8]{x}}{x(\sqrt[4]{x}+1)} dx$; 19. $\int \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$; 20. $\int \frac{x^2-1}{x\sqrt{x^2+1}} dx$.

Вариант 6.

1. $\int x\sqrt{5-x^2} dx$ 2. $\int \sin^3 6x \cos 6x dx$; 3. $\int 5^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;
 4. $\int e^{x^3+x+1} (3x^2+1) dx$; 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2} \arcsin 2x}$; 6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$;
 7. $\int \frac{dx}{3x^2-x+1}$; 8. $\int \frac{xdx}{x^2+7x+13}$; 9. $\int (x+3)e^{2x} dx$;
 10. $\int \operatorname{arctg} x dx$; 11. $\int (x^2-4)\cos 3x dx$; 12. $\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1} dx$;
 13. $\int \frac{(3x+2)}{x(x+1)^3} dx$; 14. $\int \frac{x^4+5}{x^2-4x} dx$; 15. $\int \frac{dx}{5+\sin x-3\cos x}$;
 16. $\int \sin^4 \frac{x}{4} dx$; 17. $\int \sin^3 \frac{x}{2} \cos^4 \frac{x}{2} dx$;
 18. $\int \frac{(1+\sqrt[6]{x})}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x})\sqrt[4]{x^3}} dx$; 19. $\int \sqrt{9-x^2} dx$; 20. $\int \frac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}$.

Вариант 7.

1. $\int \frac{x^2 dx}{4x^3+1}$; 2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4+\ln^2 x}}$; 3. $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^3 dx}{1+x^2}$;

4. $\int \sin(e^x) e^x dx$; 5. $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$; 6. $\int \frac{dx}{x^2+4x-8}$;
 7. $\int \frac{dx}{\sqrt{6-x^2-4x}}$; 8. $\int \frac{x+5}{2x^2+2x+3} dx$; 9. $\int (x+2)e^{4x} dx$;
 10. $\int \arcsin 3x dx$; 11. $\int (1-8x^2) \cos 4x dx$;
 12. $\int \frac{x^3 dx}{(x^2-1)(x+2)}$; 13. $\int \frac{2x^3-4x^2-16x-12}{(x-1)^2(x^2+4x+5)} dx$;
 14. $\int \frac{x^3-3x^2-12}{x^2+5x} dx$; 15. $\int \frac{\cos x dx}{5+4\cos x}$;
 16. $\int \sin^6 x dx$; 17. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[7]{\cos^5 x}}$;
 18. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$; 19. $\int x^2 \sqrt{4-x^2} dx$; 20. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$.

Вариант 8.

1. $\int x \sqrt{4-3x^2} dx$; 2. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}}$; 3. $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\sin^2 x} dx$;
 4. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+5}} dx$; 5. $\int \frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}} dx$; 6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$;
 7. $\int \frac{dx}{x^2-3x+3}$; 8. $\int \frac{7-8x}{2x^2-3x+1} dx$;
 9. $\int (5-4x) \sin 2x dx$; 10. $\int (2x^2-15) \ln x dx$; 11. $\int (x^2+1)e^x dx$;
 12. $\int \frac{5x+3}{x^2(x-2)} dx$; 13. $\int \frac{x^3+5x^2+12x+4}{(x+1)^2(x^2+4)} dx$; 14. $\int \frac{x^3-3x^2-12}{x^2-7x+12} dx$;
 15. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x+\sin x} dx$; 16. $\int \cos^8\left(\frac{x}{4}\right) dx$; 17. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos^7 x}}$;

18. $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x^2}} dx;$

19. $\int x^2 \sqrt{16-x^2} dx;$

20. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+1}}.$

Вариант 9.

1. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-4x^6}};$

2. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx;$

3. $\int \frac{(x+\cos x)}{x^2+2\sin x} dx;$

4. $\int (e^{3x}+1)^2 e^{3x} dx;$

5. $\int \frac{2+\ln x dx}{x\sqrt{\ln x}};$

6. $\int \frac{dx}{x^2-6x+18};$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}};$

8. $\int \frac{2x-1}{5x^2-x+2} dx;$

9. $\int (4-3x)e^{-3x} dx;$

10. $\int \arcsin x dx;$

11. $\int (x^2+5x+6)\cos 2x dx;$

12. $\int \frac{(2x+1)dx}{(x+3)^2(x-1)};$

13. $\int \frac{(x^2+x+1)}{x(x^2-4x+13)} dx;$

14. $\int \frac{4x^3+5}{x^2+6x} dx;$

15. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x-\sin x} dx;$

16. $\int 2^4 \sin^6 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} dx;$

17. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos^7 x}};$

18. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}} dx;$

19. $\int \frac{x^2}{(x^2+5)^{\frac{3}{2}}} dx;$

20. $\int \sqrt{20-x^2} dx.$

Вариант 10.

1. $\int (5x^3+4)^{10} x^2 dx;$

2. $\int \frac{x dx}{9x^4+1};$

3. $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx;$

4. $\int \frac{dx}{\arcsin^5 x \sqrt{1-x^2}};$

5. $\int \frac{\sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx;$

6. $\int \frac{dx}{x^2+4x+10};$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}};$

8. $\int \frac{(4x-3)}{x^2+3x+4} dx;$

9. $\int (5x-2)e^{3x} dx;$

10. $\int \sqrt{x} \ln x dx$; 11. $\int (x^2 + 4x + 5) \cos x dx$; 12. $\int \frac{x^2 dx}{(x+1)^2(x+4)}$;
 13. $\int \frac{dx}{(x^2+2)(x-1)^2}$; 14. $\int \frac{3(x^4+1)}{x^2+5x} dx$; 15. $\int \frac{\sin x}{2+\sin x} dx$;
 16. $\int \cos^6 3x dx$; 17. $\int \cos^5 x \sqrt[3]{\sin x} dx$;
 18. $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^2})}$; 19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; 20. $\int \sqrt{10+x^2} dx$

Вариант 11.

1. $\int \frac{x dx}{5+7x^4}$; 2. $\int \frac{\sin \sqrt{x} dx}{\sqrt{x}}$; 3. $\int \sqrt{1-e^x} e^x dx$;
 4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$; 5. $\int \frac{x dx}{x+4}$; 6. $\int \frac{dx}{x^2-7x+13}$;
 7. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$; 8. $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8} dx$; 9. $\int (4x+1) \sin x dx$;
 10. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$; 11. $\int (2x-2x^2+1) e^{-\frac{x}{2}} dx$;
 12. $\int \frac{x dx}{(x+1)(x-3)^2}$; 13. $\int \frac{(3x+4) dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}$;
 14. $\int \frac{4x^3+7}{x^2+2x} dx$; 15. $\int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$;
 16. $\int 2^8 \sin^2 \frac{x}{4} \cos^6 \frac{x}{4} dx$; 17. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[5]{\sin^8 x}}$;
 18. $\int \frac{(1-\sqrt{x}) dx}{1+\sqrt[3]{x}}$; 19. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$; 20. $\int \sqrt{x^2+25} dx$.

Вариант 12.

1. $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{x^2+5}};$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{\arcsin^3 x \cdot (1-x^2)}};$
3. $\int \frac{(\ln x + 9)^{20}}{x} dx;$
4. $\int \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} dx;$
5. $\int e^{x^2+x+1} (2x+1) dx;$
6. $\int \frac{dx}{x^2+5x+9};$
7. $\int \frac{(2x+5) dx}{\sqrt{9x^2+6x+2}};$
8. $\int \frac{x dx}{x^2+4x+10};$
9. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{6x-1} dx;$
10. $\int (1-6x) e^{2x} dx;$
11. $\int (3-7x^2) \cos 2x dx;$
12. $\int \frac{dx}{x^4-x^2};$
13. $\int \frac{(2x+1) dx}{x(x^2+4x+13)};$
14. $\int \frac{(4x^3+1) dx}{x^2+8x};$
15. $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x};$
16. $\int \cos^6 x dx;$
17. $\int \sin^3 x \cos^4 x dx;$
18. $\int \frac{(\sqrt[6]{x}+1) dx}{\sqrt[6]{x^7} + \sqrt[4]{x^5}};$
19. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-9}};$
20. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx.$

Вариант 13.

1. $\int x e^{-3x^2} dx;$
2. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2 \sin x + 1}};$
3. $\int \frac{(2x-3)}{x^2-3x+8} dx;$
4. $\int \frac{x dx}{\sqrt{25-x^4}};$
5. $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x + x}{1+x^2} dx;$
6. $\int \frac{dx}{x^2-5x+6};$
7. $\int \frac{(x-3) dx}{\sqrt{x^2-6x+1}};$
8. $\int \frac{(3x-1) dx}{4x^2-4x+17};$
9. $\int \ln(4x^2+1) dx;$
10. $\int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x}$
11. $\int (2x^2+4x+1) \sin x dx;$
12. $\int \frac{(x^2+1) dx}{(x^2-1)(x+2)};$

13. $\int \frac{(4x+3)dx}{(x+4)^2(x^2+9)}$; 14. $\int \frac{2x^3-1}{x^2+x-6}dx$; 15. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$;
 16. $\int 2^8 \sin^2 x \cos^6 x dx$; 17. $\int \sin^5 x dx$;
 18. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x+1}}$; 19. $\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$; 20. $\int \sqrt{16+x^2} dx$.

Вариант 14.

1. $\int \frac{xdx}{\cos^2(x^2+1)}$; 2. $\int \left(\ln x + \frac{1}{\ln x} \right) \frac{dx}{x}$; 3. $\int \frac{(x^2+1)dx}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}$;
 4. $\int \frac{xdx}{x^4+9}$; 5. $\int \sqrt[3]{\sin^2 x} \cos x dx$; 6. $\int \frac{dx}{x^2-3x-13}$;
 7. $\int \frac{(2x-5)dx}{\sqrt{9+6x-3x^2}}$; 8. $\int \frac{3x+4}{x^2+5} dx$; 9. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{4x-1} dx$;
 10. $\int (2-3) \sin 2x dx$; 11. $\int (3x^2-2x+1)e^x dx$;
 12. $\int \frac{x^2+1}{x(x^2-1)} dx$; 13. $\int \frac{(3x+1)}{(x+3)^2(x^2+2x+2)} dx$;
 14. $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x^2-2x)} dx$; 15. $\int \frac{dx}{\sin x - 2\cos x + 1}$;
 16. $\int 2^4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^6 \frac{x}{2} dx$; 17. $\int \operatorname{tg}^3 x dx$;
 18. $\int \frac{(\sqrt[6]{x}+1)dx}{\sqrt[6]{x^7} + \sqrt[4]{x^5}}$; 19. $\int x^2 \sqrt{25-x^2} dx$; 20. $\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^6} dx$.

Вариант 15.

1. $\int x \cos x^2 dx$; 2. $\int \frac{xdx}{\sqrt{9-x^4}}$; 3. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$;

4. $\int \sin(e^x + 5)e^x dx$; 5. $\int \frac{(\ln^6 x + 1)}{x} dx$; 6. $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 2}$;
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 1}}$; 8. $\int \frac{(1-4x)dx}{2x^2 - 3x + 1}$; 9. $\int (4x + 3)\sin 5x dx$;
10. $\int (x-1)^3 \ln^2(x-1) dx$; 11. $\int x^2 e^{3x} dx$; 12. $\int \frac{x dx}{(x-1)^2(x+2)}$;
13. $\int \frac{(x^2+4)dx}{(x+1)(x^2+x+1)}$; 14. $\int \frac{2x^3+1}{x^2-3x} dx$; 15. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x - 1}$;
16. $\int \sin^4 x dx$; 17. $\int \sin^5 2x \cos 2x dx$;
18. $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$; 19. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx$; 20. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

Вариант 16.

1. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}$; 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x} \cos^2 x}$; 3. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x + 3}} dx$;
4. $\int \frac{3-4x}{2x^2-3x+1} dx$; 5. $\int e^{\operatorname{arctg} x} \frac{dx}{1+x^2}$; 6. $\int \frac{dx}{4x-1-4x^2}$;
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$; 8. $\int \frac{(1-3x)dx}{5x^2+6x+18}$; 9. $\int e^{-2x} (4x-3) dx$;
10. $\int (x^3+1) \ln x dx$; 11. $\int (x^2+2x+1) \sin 3x dx$;
12. $\int \frac{(6x+1)dx}{(x-2)(x+3)^2}$; 13. $\int \frac{(4x^2+5)dx}{(x+1)^2(x^2-x+1)}$;
14. $\int \frac{3x^3+x+6}{x^2+5x} dx$; 15. $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x + \sin x}$;
16. $\int \cos^8 x dx$; 17. $\int \cos^6 3x \sin 3x dx$;

$$18. \int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})};$$

$$19. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}};$$

$$20. \int x^2 \sqrt{9+x^2} dx.$$

Вариант 17.

$$1. \int \frac{2x}{\sqrt{9x^2-4}} dx;$$

$$2. \int e^{-(x^2+1)} x dx;$$

$$3. \int \frac{\ln^7 x}{x} dx;$$

$$4. \int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x};$$

$$5. \int \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx;$$

$$6. \int \frac{dx}{x^2+2x+5};$$

$$7. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+2}};$$

$$8. \int \frac{(x-2)dx}{x^2-4x+7};$$

$$9. \int e^{-3x} (2-9x) dx;$$

$$10. \int \arctg \sqrt{2x-1} dx;$$

$$11. \int (x^2+5) \sin x dx;$$

$$12. \int \frac{3x+2}{x(x+1)^3} dx;$$

$$13. \int \frac{(4x+5)}{(x-1)^2(x^2+4)} dx;$$

$$14. \int \frac{3x^3+3x^2+2}{x^2+x-2} dx;$$

$$15. \int \frac{dx}{2+\cos x};$$

$$16. \int 2^8 \cos^8 x \frac{x}{4} dx;$$

$$17. \int \frac{\sin 2x}{\cos^3 2x} dx;$$

$$18. \int \frac{2+\sqrt[3]{x}}{(\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})\sqrt{x}} dx;$$

$$19. \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}};$$

$$20. \int \sqrt{25+x^2} dx.$$

Вариант 18.

$$1. \int (3x^4+5)^{20} x^3 dx;$$

$$2. \int \frac{x dx}{\sqrt{3-x^4}};$$

$$3. \int \frac{\arctg x + 2x}{1+x^2} dx;$$

$$4. \int \frac{1+\ln x}{3x\sqrt{\ln x}} dx;$$

$$5. \int \frac{2\cos x - 3\sin x}{(2\sin x + 3\cos x)^3} dx;$$

$$6. \int \frac{dx}{x^2-7x+6};$$

$$7. \int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}};$$

$$8. \int \frac{2x-1}{5x^2-x+2} dx;$$

$$9. \int (4x+7) \cos 3x dx;$$

10. $\int \ln(x^2 + x) dx$; 11. $\int (x^2 + 5)e^{2x} dx$; 12. $\int \frac{(3x^2 + 1)dx}{(x+3)^2(x-4)}$;
 13. $\int \frac{(3x^2 + x + 4)dx}{(x-1)^2(x^2 + 9)}$; 14. $\int \frac{2x^3 + 8x + 3}{x^2 - 2x} dx$; 15. $\int \frac{dx}{4 + 3\cos x}$;
 16. $\int \sin^8 \frac{x}{4} dx$; 17. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[5]{\cos^7 x}}$; 18. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + 1}} dx$;
 19. $\int x^2 \sqrt{9 - x^2} dx$; 20. $\int \sqrt{36 + x^2} dx$.

Вариант 19.

1. $\int (5x^2 + 1)^{20} x dx$; 2. $\int \frac{\sqrt[3]{\arctg x}}{1 + x^2} dx$; 3. $\int \frac{\operatorname{ctg} x dx}{\ln \sin x}$;
 4. $\int (e^{5x} + 1)^4 e^{5x} dx$; 5. $\int \frac{\cos 2x dx}{(2 + 3\sin 2x)^3}$; 6. $\int \frac{dx}{4x^2 - 4x + 37}$;
 7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$; 8. $\int \frac{3x + 1}{x^2 - x + 1} dx$;
 9. $\int (5x + 6) \cos 3x dx$; 10. $\int x \arctg 2x dx$;
 11. $\int (x^2 + 5x + 1)e^{-x} dx$; 12. $\int \frac{(5x^2 + 6)dx}{(x+4)^2(x-2)}$;
 13. $\int \frac{(x^3 + 2x^2 + 10x)dx}{(x+1)^2(x^2 - x + 1)}$; 14. $\int \frac{x^3 + 4}{x^2 + 7x} dx$; 15. $\int \frac{\sin x dx}{1 + \cos x + \sin x}$;
 16. $\int 2^8 \sin^4 x \cos^4 x dx$; 17. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin^8 x}}$; 18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[4]{x})^3}$;
 19. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(16 - x^2)^3}}$; 20. $\int \sqrt{49 + x^2} dx$.

Вариант 20.

1. $\int \frac{2x}{\sqrt{9x^2 - 16}} dx;$
2. $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx;$
3. $\int \frac{\sin \sqrt{x} dx}{\sqrt{x}};$
4. $\int x^2 \cos(4 - x^3) dx;$
5. $\int \frac{2x - \arctg x}{1 + x^2} dx;$
6. $\int \frac{dx}{2x^2 - 4x + 2};$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2 + 2x}};$
8. $\int \frac{x + 3}{x^2 + 4x + 9} dx;$
9. $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} dx;$
10. $\int (8 - 3x) \cos 5x dx;$
11. $\int (x^2 + 4)e^{-2x} dx;$
12. $\int \frac{(2x^3 + 3) dx}{x^3 + 6x^2 + 8x};$
13. $\int \frac{(6x + 1) dx}{(x - 1)^2 (x^2 + 4x + 5)};$
14. $\int \frac{x^3 + 4x^2 + 5}{x^2 + 6x} dx;$
15. $\int \frac{dx}{4 + 3 \cos x};$
16. $\int \sin^4 \frac{x}{4} dx;$
17. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[5]{\cos^8 x}};$
18. $\int \frac{(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx}{\sqrt[4]{x^5} - \sqrt[6]{x^7}};$
19. $\int \sqrt{5 - x^2} dx;$
20. $\int \frac{\sqrt{x^2 + 4} dx}{x^2}.$

Вариант 21.

1. $\int \frac{(2x + 1) dx}{\sin^2 (x^2 + x)};$
2. $\int \frac{\sin 2x dx}{1 + \sin^2 x};$
3. $\int \frac{dx}{x \sqrt{3 - \ln^2 x}};$
4. $\int \frac{x dx}{x^4 + 3};$
5. $\int (e^{2x} + 6)^7 e^{2x} dx;$
6. $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 17};$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 + 3x + 2}};$
8. $\int \frac{x + 1}{x^2 + 4x + 5} dx;$
9. $\int (x + 5) \sin 3x dx;$
10. $\int \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt[3]{x^2}};$
11. $\int (x^2 + 3x + 1) e^{-4x} dx;$
12. $\int \frac{3x + 2}{x(x + 1)^3} dx;$
13. $\int \frac{(x^3 - 6) dx}{x^2 (x^2 + 2x + 5)};$
14. $\int \frac{2x^3 + 4x + 1}{(x - 1)(x - 5)} dx;$
15. $\int \frac{dx}{3 + 2 \cos x};$

$$16. \int 8 \sin^6 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4} dx; \quad 17. \int \sqrt{\sin^7 x} \cos^3 x dx;$$

$$18. \int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{x + \sqrt{x}};$$

$$19. \int \frac{dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}};$$

$$20. \int \sqrt{8+x^2} dx.$$

Вариант 22.

$$1. \int \frac{x dx}{9x^4 - 25};$$

$$2. \int e^{\operatorname{tg} x} \frac{dx}{\cos^2 x};$$

$$3. \int \frac{x(1-x^2) dx}{1+x^4};$$

$$4. \int \frac{\ln x dx}{x(1-\ln^2 x)};$$

$$5. \int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}};$$

$$6. \int \frac{dx}{x^2+4x-21};$$

$$7. \int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}};$$

$$8. \int \frac{(2x-3) dx}{x^2-2x+2};$$

$$9. \int (2x-5) \cos 4x dx;$$

$$10. \int \frac{x \arctg x}{\sqrt{1+x^2}} dx;$$

$$11. \int (x^2+5x-1) e^{2x} dx;$$

$$12. \int \frac{(x^2+x+2) dx}{(x-1)^2(x+3)^2};$$

$$13. \int \frac{(x^2+2x+4) dx}{(x+1)(x^2+3x+5)};$$

$$14. \int \frac{(x^4+5x^2+1) dx}{x^2+4x};$$

$$15. \int \frac{\sin x dx}{1+\sin x};$$

$$16. \int \cos^4 x dx;$$

$$17. \int \sin^5 x \cdot \sqrt[3]{\cos x} dx;$$

$$18. \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x}};$$

$$19. \int \sqrt{x^2-9} dx;$$

$$20. \int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^4} dx.$$

Вариант 23.

$$1. \int \frac{2x-1}{\sqrt{1-x+x^2}} dx;$$

$$2. \int \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$3. \int \frac{\sin \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx;$$

$$4. \int \frac{e^x dx}{\sqrt{4-e^{2x}}};$$

$$5. \int \frac{\sqrt[5]{4+\ln x}}{x} dx;$$

$$6. \int \frac{dx}{8x^2-10x-3};$$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2+4x}};$ 8. $\int \frac{(3x-1)dx}{x^2-2x+5};$ 9. $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx;$
 10. $\int \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt{x}};$ 11. $\int (x^2+4x)e^{\frac{x}{2}} dx;$ 12. $\int \frac{(3x+2)dx}{(x+2)(x-2)(x-1)};$
 13. $\int \frac{(6x^2+x+2)dx}{(x+4)(x^2-x+1)};$ 14. $\int \frac{x^3+4x^2+3x+2}{(x^2+2x+1)(x-2)} dx;$ 15. $\int \frac{\cos x dx}{2+\cos x+\sin x};$
 16. $\int \cos^4 \frac{x}{2} dx;$ 17. $\int (\sin x)^5 \cos^3 x dx;$ 18. $\int \frac{(1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x})dx}{x+2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}};$
 19. $\int \sqrt{(x^2-9)^5} dx;$ 20. $\int \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{(4+x^2)}}.$

Вариант 24.

1. $\int \sqrt[3]{4x^2+1} x dx;$ 2. $\int (1+e^{3x})^4 e^{3x} dx;$ 3. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x};$
 4. $\int \frac{x^2+\ln x}{x} dx$ 5. $\int \frac{(\sin x - \cos x) dx}{(\cos x + \sin x)^2};$ 6. $\int \frac{dx}{x^2+4x+29};$
 7. $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}};$ 8. $\int \frac{(3x+4)}{3-2x-x^2} dx;$ 9. $\int (x+5) \sin 3x dx;$
 10. $\int (x^2+6x+9) \ln 2x dx;$ 11. $\int (x^2-3x) e^{-2x} dx;$
 12. $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x-1)(x-3)(x-2)};$
 13. $\int \frac{(3x^2+5)dx}{(x+1)(x^2+2x+2)};$ 14. $\int \frac{2x^3-4x^2-16x-12}{x^2-5x} dx;$ 15. $\int \frac{dx}{5+3\sin x};$
 16. $\int 8 \sin^4 \frac{x}{4} \cos^4 \frac{x}{4} dx;$ 17. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[5]{\cos^9 x}};$ 18. $\int \frac{(6-\sqrt{x}-\sqrt[4]{x})dx}{\sqrt[3]{x}-7x-6\sqrt[4]{x^3}};$
 19. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(2-x^2)^3}};$ 20. $\int \sqrt{81+x^2} dx.$

Вариант 25.

1. $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6} dx;$
2. $\int (x+2)\cos(x^2+4x+1)dx;$
3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{25-\ln^2 x}};$
4. $\int \frac{e^x dx}{3-4e^x}$
5. $\int \frac{(x^2+2)dx}{\sin^2(x^3+6x)};$
6. $\int \frac{dx}{x^2-3x+2};$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2+2x}};$
8. $\int \frac{xdx}{\sqrt{3x^2-1}\ln x+2};$
9. $\int (x+4)e^{-x} dx;$
10. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{3x-1} dx;$
11. $\int (x^2-3x+2)\sin 2x dx;$
12. $\int \frac{(2x+5)dx}{(x+4)(x-3)^2};$
13. $\int \frac{x^3 dx}{(x+2)^2(x^2+1)};$
14. $\int \frac{x^5-x^3+1}{x^2-x} dx;$
15. $\int \frac{dx}{3\sin x - \cos x};$
16. $\int 2^4 \sin^6 x dx;$
17. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^6 x} dx;$
18. $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})};$
19. $\int \sqrt{x^2-9} dx;$
20. $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}.$

Вариант 26.

1. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2+3}};$
2. $\int e^{-4x^3} x^2 dx;$
3. $\int \frac{1+\ln(x-1)}{x-1} dx;$
4. $\int \frac{\cos(\ln x)dx}{x};$
5. $\int \frac{\sqrt{2\operatorname{arctg} x}}{x^2+1} dx;$
6. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5};$
7. $\int \frac{(2x-1)dx}{x^2-2x+5};$
8. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}};$
9. $\int (2x^2+x)\ln x dx;$
10. $\int (x-1)e^{5x} dx;$
11. $\int (x^2-3x)\sin 2x dx;$
12. $\int \frac{(4x+1)dx}{(x+3)(x-1)^2};$
13. $\int \frac{(2x+5)dx}{(x-2)(x^2+4)};$
14. $\int \frac{(x^3+2x+1)dx}{x^2-4x};$
15. $\int \frac{dx}{3\sin x+2\cos x};$

16. $\int 2^4 \sin^6 2x dx$; 17. $\int \sqrt[7]{\sin^5 x \cos^5 x} dx$; 18. $\int \frac{dx}{\left(1 + \sqrt[4]{x}\right) \sqrt[3]{x}}$;
 19. $\int x^2 \sqrt{1-x^2} dx$; 20. $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2+1}}$.

Вариант 27.

1. $\int \frac{2x+5dx}{\sqrt{7x^2+1}}$; 2. $\int \frac{\operatorname{tg}(x+1)dx}{\cos^2(x+1)}$; 3. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx$;
 4. $\int \frac{e^{2x}}{3+e^{4x}} dx$; 5. $\int 7^{x^3+1} \cdot x^2 dx$; 6. $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$;
 7. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$; 8. $\int \frac{(4x-3)dx}{x^2-2x+6}$; 9. $\int (2x^2+1) \sin 4x dx$;
 10. $\int (x+1) \ln^2(x+1) dx$; 11. $\int (x^2+x-1) e^{2x} dx$; 12. $\int \frac{(2x+1)dx}{x(x^2-9)}$;
 13. $\int \frac{(4x+1)dx}{(x-2)(x^2+3x+6)}$; 14. $\int \frac{3x^3+4x+1}{x^2-2x} dx$; 15. $\int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x}$;
 16. $\int 4 \cos^4 \frac{x}{4} dx$; 17. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos^5 x}}$; 18. $\int \frac{(1+\sqrt[6]{x})}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}\right) \sqrt[4]{x^3}} dx$;
 19. $\int \frac{dx}{(49+x^2) \sqrt{49+x^2}}$; 20. $\int \frac{dx}{\sqrt{(64-x^2)^3}}$.

Вариант 28.

1. $\int x \sin(1-x^2) dx$; 2. $\int \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}$; 3. $\int \frac{(\operatorname{arctg}(3x))^4}{1+9x^2} dx$;
 4. $\int \sqrt[3]{1+4 \sin x \cos x} dx$; 5. $\int \frac{(\sin x + \cos x) dx}{(\sin x - \cos x)^5}$; 6. $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$;

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+13}};$ 8. $\int \frac{xdx}{x^2-5x+4};$ 9. $\int (1+3x)e^{-2x} dx;$
 10. $\int x \ln 2x dx$ 11. $\int (2x^2+4x+7) \cos 2x dx;$
 12. $\int \frac{(4x+3)dx}{x^3-5x+6};$ 13. $\int \frac{(3x+5)dx}{(x+2)(x^2+1)}$ 14. $\int \frac{x^4+6x^2+5}{(x+1)(x^2+1)} dx;$
 15. $\int \frac{dx}{\sin x - 2 \cos x}$ 16. $\int \sin^6 \frac{x}{2} dx;$ 17. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^9 x}} dx;$
 18. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx;$ 19. $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2-3}};$ 20. $\int \sqrt{x^2+4} dx.$

Вариант 29.

1. $\int \frac{xdx}{x^4+1};$ 2. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}};$ 3. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1+tgx}};$
 4. $\int \frac{e^x dx}{x^2};$ 5. $\int \frac{dx}{x \sin^2(\ln x)};$ 6. $\int \frac{dx}{x^2+6x+25};$
 7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-3}};$ 8. $\int \frac{(3x+1)dx}{x^2-x+1};$ 9. $\int (4x+1)e^{-x} dx;$
 10. $\int \arccos x dx;$ 11. $\int (x^2-5x+6) \sin 3x dx;$
 12. $\int \frac{(4x+5)dx}{x(x-1)(x-2)};$ 13. $\int \frac{2x^2+6x+3}{(x-2)(x^2+4x+5)} dx;$
 14. $\int \frac{x^4+5x+4}{x^2+6x} dx;$ 15. $\int \frac{\sin x dx}{5+3 \sin x};$
 16. $\int 16 \sin^4 \frac{x}{2} \cos^4 \frac{x}{2} dx;$ 17. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[7]{\sin^5 x}};$
 18. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}};$ 19. $\int \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}} dx;$ 20. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^4} dx.$

Вариант 30.

1. $\int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2 + 1}};$

2. $\int \frac{e^{2x} dx}{3 + e^{2x}};$

3. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx;$

4. $\int e^{\sin x} \cos x dx;$

5. $\int \frac{1 + \ln x}{x} dx;$

6. $\int \frac{dx}{4 - x^2 - 4x};$

7. $\int \frac{(4 - 3x) dx}{x^2 + 6x + 18};$

8. $\int \frac{(x + 4) dx}{\sqrt{2x^2 - 3x + 5}};$

9. $\int x \sin 2x dx;$

10. $\int \ln(x^2 + 4) dx;$

11. $\int (x^2 - x + 1) e^{3x} dx;$

12. $\int \frac{(2x^2 + 3) dx}{x(x + 4)(x - 2)};$

13. $\int \frac{(5x + 1) dx}{(x - 1)(x^2 + 9)};$

14. $\int \frac{(x^4 + 6x^2 + 1) dx}{x^2 + 5x};$

15. $\int \frac{dx}{4 + \sin x + \cos x};$

16. $\int 16 \sin^6 \frac{x}{8} \cos^2 \frac{x}{8} dx;$

17. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx;$

18. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}} dx;$

19. $\int \sqrt{16 - x^2} dx;$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{(16 + x^2)^3}}.$

Библиографический список использованной литературы

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1985. – В 2 т. – Т.1. – 432 с.
2. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа / под редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1981. – 464 с.
3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н.Берман. – М.: Наука, 1975. – 416 с.
4. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 1986. – В 3 ч. – Ч.3. – 304 с.