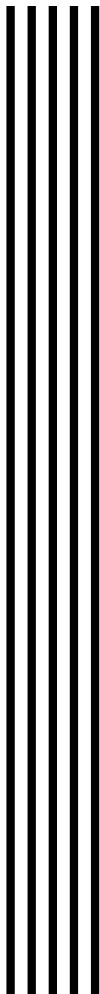


Министерство образования и науки, молодежи и спорта Украины  
Севастопольский национальный технический университет



## **РАЗДЕЛ 7. ВЕКТОРЫ. МЕТОД КООРДИНАТ ПРИ РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ**

Методические указания и контрольные задания  
для подготовки к внешнему независимому оцениванию  
по математике

Севастополь  
2011

**Методические указания и контрольные задания для подготовки к внешнему независимому оцениванию по математике. Раздел 7. Векторы. Метод координат при решении геометрических задач. / Сост. В.Г. Зенцева. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2011. - 60 с.**

Целью методических указаний является оказание помощи учащимся школ, лицеев и других средних учебных заведений в подготовке к внешнему независимому оцениванию и выполнении контрольных заданий по теме «Векторы. Метод координат при решении геометрических задач».

Указания содержат необходимые теоретические сведения, примеры решения задач, задачи для самостоятельного решения, а также контрольную работу и тест.

Методические указания предназначены, прежде всего, учащимся средних учебных заведений и могут быть использованы для проведения занятий на подготовительных курсах, а также при самостоятельной подготовке к внешнему независимому тестированию.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры «Высшая математика» 24.06.2011 г., протокол № 11.

Допущено учебно-методическим центром и научно-методическим советом СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: Деркач М.И., доцент кафедры высшей математики

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                 |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Глава .1. Векторы на плоскости и в пространстве.<br>Декартова система координат.....            | 4  |
| §1. Векторы и операции над ними .....                                                           | 4  |
| §2. Базис на плоскости и в пространстве.....                                                    | 14 |
| §3. Декартова система координат на прямой, на<br>плоскости и в пространстве .....               | 20 |
| Глава 2. Прямоугольные декартовы координаты и<br>простейшие задачи аналитической геометрии..... | 29 |
| §4. Проекция вектора на ось .....                                                               | 29 |
| §5. Прямоугольная декартова система координат .....                                             | 31 |
| §6. Скалярное произведение векторов.....                                                        | 36 |
| §7. Элементы аналитической геометрии .....                                                      | 49 |
| Контрольная работа.....                                                                         | 53 |
| Тест .....                                                                                      | 55 |
| <b><i>Библиографический список использованной<br/>литературы</i></b> .....                      | 59 |

# ГЛАВА 1. ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ. ДЕКАРТОВА СИСТЕМА КООРДИНАТ

## §1. Векторы и операции над ними.

### 1. Понятие вектора.

В математике и ее приложениях встречаются различные величины. Некоторые из них (длина линии, площадь фигуры, объем или масса тела) полностью определяются числом. Такие величины называются скалярами. Для определения других величин недостаточно одного числового значения; необходимо указать еще присущее им направление. К таким величинам относятся сила, скорость и т.д. Например, сила определяется не только числовым значением, но и направлением, в котором она действует. Такие величины называются векторами.

**Определение.** Отрезок прямой называют направленным отрезком или вектором, если указано, какой из его концов считается началом отрезка, а какой — концом. Направлением вектора считают направление от начала к концу.

Для указания направления на конце вектора рисуют стрелку (рисунок 1).

Вектор с началом в точке  $A$  и концом в точке  $B$  обозначают  $\overrightarrow{AB}$ . Мы будем часто записывать вектор в виде одной (как правило, малой латинской) буквы со стрелкой наверху, например:  $\vec{a}$  (рисунок 2).



Рисунок 1

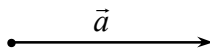


Рисунок 2

Длиной или модулем вектора  $\overrightarrow{AB}$  называют длину отрезка  $AB$  и обозначают  $|\overrightarrow{AB}|$ ; если вектор записан одной буквой, например  $\vec{a}$ , то его модуль обозначают  $|\vec{a}|$ .

Начало вектора  $\overrightarrow{AB}$  (точку  $A$ ) часто называют его точкой приложения.

**Определение.** Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называют коллинеарными.

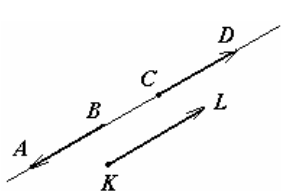


Рисунок 3

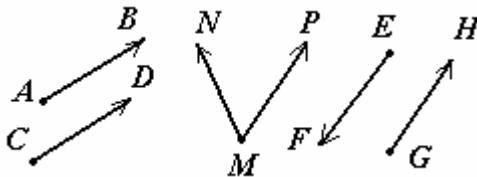


Рисунок 4

Любые два из трех векторов, изображенных на рисунке 3, коллинеарны друг другу.

**Определение.** Векторы называют равными, если они коллинеарны, имеют одинаковые длины и одинаковые направления.

Равенство векторов записывают в виде  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ . Приведенное определение равенства векторов означает, по существу, что точку приложения вектора можно выбирать где угодно. В этом смысле векторы называют свободными. На рисунке 4 изображены равные векторы  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$ . Векторы  $\overrightarrow{MN}$  и  $\overrightarrow{MP}$ , а также  $\overrightarrow{EF}$  и  $\overrightarrow{GH}$  – неравные.

Если начало вектора совпадает с его концом, то вектор изображается одной точкой и не имеет направления. Такой вектор называется нулевым или просто нулем. Для обозначения нулевого вектора будем использовать число ноль. Таким образом, равенство  $\vec{a} = 0$  будем считать так: «вектор  $\vec{a}$  равен

нулю» – и понимать в том смысле, что начало и конец вектора  $\vec{a}$  совпадают. Модуль нулевого вектора равен нулю.

В соответствии с данным ранее определением коллинеарных векторов нулевой вектор коллинеарен любому другому.

## 2. Сложение векторов.

Пусть  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  – два произвольных вектора. Если от произвольной точки  $O$  отложить вектор  $\vec{a}'$ , равный  $\vec{a}$ , затем от конца этого вектора отложить вектор  $\vec{b}'$ , равный  $\vec{b}$  (рисунок 5), то вектор, идущий из начала  $\vec{a}'$  (т.е. из точки  $O$ ) в конец  $\vec{b}'$ , и есть  $\vec{a} + \vec{b}$ .

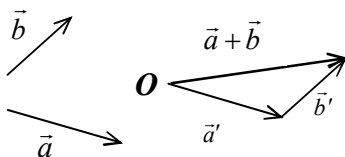


Рисунок 5



Рисунок 6

Важно понимать, что построенный таким способом вектор  $\vec{a} + \vec{b}$  не зависит от положения точки  $O$ ; если вместо точки  $O$  взять другую точку  $O'$ , то выполнив указанное построение, получим вектор, равный  $\vec{a} + \vec{b}$ , но отложенный от точки  $O'$  (рисунок 6).

В случае неколлинеарных векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  можно вместо правила треугольника использовать правило параллелограмма: для построения  $\vec{a} + \vec{b}$  следует перенести начало векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  в общую точку  $O$  и построить на этих векторах, как на смежных сторонах, параллелограмм (рисунок 7); тогда вектор, идущий из точки  $O$  в противоположную вершину параллелограмма, и есть  $\vec{a} + \vec{b}$ .

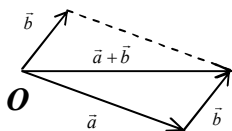


Рисунок 7

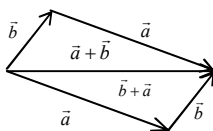


Рисунок 8

Правило параллелограмма играет важную роль в физике. Его используют при сложении сил, т.е. нахождении равнодействующей.

### Свойства операции сложения векторов.

1. Коммутативность (переместительность):

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}. \quad (1)$$

Иллюстрацией этого свойства для случая неколлинеарных векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  служит рисунок 8.

2. Ассоциативность (сочетательность):

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}). \quad (2)$$

Иллюстрацией служит рисунок 9.

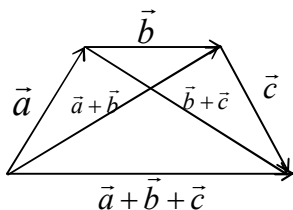


Рисунок 9

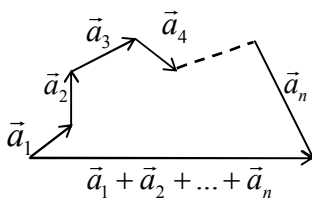


Рисунок 10

Из приведенных свойств сложения векторов вытекает, что сумма любого числа векторов не зависит от порядка слагаемых и от того, в каком порядке складывают векторы.

Для построения суммы  $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n$  удобнее всего использовать правило замыкания ломаной, представляющее собой обобщение правила треугольника: к концу  $\vec{a}_1$  следует

приложить вектор  $\vec{a}_2$ , к концу  $\vec{a}_2$  – вектор  $\vec{a}_3$  и т.д.; тогда вектор, идущий из начала  $\vec{a}_1$  к концу  $\vec{a}_n$ , и является суммой  $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n$  (рисунок 10).

### 3. Вычитание векторов

**Определение.** Пусть  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  – два произвольных вектора. Разностью  $\vec{b} - \vec{a}$  этих векторов называют такой вектор  $\vec{d}$ , который в сумме с вектором  $\vec{a}$  дает вектор  $\vec{b}$ .

Отсюда вытекает следующее правило вычитания: векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  нужно привести к общему началу  $O$  и затем их концы соединить с помощью вектора, который направлен к концу уменьшаемого вектора  $\vec{b}$ . Действительно, если  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$  и  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$  (рисунок 11), то

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}, \text{ т.е. } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}, \text{ или } \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}.$$

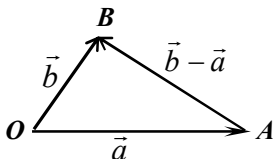


Рисунок 11

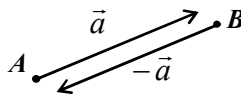


Рисунок 12

Вектор, имеющий ту же длину, что и вектор  $\vec{a}$ , но противоположное направление, называют противоположным вектору  $\vec{a}$  и обозначают  $-\vec{a}$ . Нетрудно видеть, что

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = 0. \quad (3)$$

Действительно, если  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ , то  $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ , тогда (рисунок 12)

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = 0.$$

Из формулы (3) вытекает следующая формула для разности двух векторов:

$$\vec{b} - \vec{a} = \vec{b} + (-\vec{a}). \quad (4)$$

Действительно, если сложить вектор  $\vec{a}$  с вектором  $\vec{b} + (-\vec{a})$ , то получим

$$\vec{a} + (\vec{b} + (-\vec{a})) = \vec{b} + (\vec{a} + (-\vec{a})) = \vec{b} + 0 = \vec{b}.$$

Формула (4) особенно удобна, когда требуется применить операцию сложения или вычитания к нескольким (более чем двум) векторам. Например, чтобы найти  $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} - \vec{d}$ , достаточно взять векторы  $\vec{a}, -\vec{b}, -\vec{c}, -\vec{d}$  и построить их сумму по правилу замыкания ломаной.

#### 4. Умножение вектора на число.

Пусть даны вектор  $\vec{a}$  и число  $\lambda$ . Произведением  $\lambda \vec{a}$  называют вектор, который коллинеарен вектору  $\vec{a}$ , имеет длину  $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$  и направлен так же, как и вектор  $\vec{a}$ , если  $\lambda > 0$ , и противоположно, если  $\lambda < 0$ . Здесь  $|\lambda|$  означает абсолютную величину числа  $\lambda$ .

Произведение  $0\vec{a}$  принимают равным нулю (нулевому вектору).

Если  $\lambda > 0$ , то смысл операции умножения вектора  $\vec{a}$  на число  $\lambda$  можно выразить наглядно следующим образом: вектор  $\lambda \vec{a}$  получается из  $\vec{a}$  «растяжением» в  $\lambda$  раз. Это выражение условно; например, если  $\lambda = \frac{1}{2}$ , то «растяжение» в  $\lambda$  раз означает уменьшение длины вектора  $\vec{a}$  в два раза. При  $\lambda < 0$  «растяжение» в  $|\lambda|$  раз сопровождается изменением направления вектора  $\vec{a}$  на противоположное (рисунок 13).

Операция умножения вектора на число обладает следующим свойством:

$$\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}. \quad (5)$$

Действительно, векторы  $\lambda(\mu\vec{a})$  и  $(\lambda\mu)\vec{a}$  имеют один и тот же модуль, равный  $|\lambda||\mu||\vec{a}|$ , и одно и то же направление, совпадающее с направлением вектора  $\vec{a}$ , если  $\lambda$  и  $\mu$  имеют одинаковый знак, и противоположное направление, если  $\lambda$  и  $\mu$

имеют разные знаки. Если одно из чисел  $\lambda$ ,  $\mu$  равно нулю, то оба вектора  $\lambda(\mu\vec{a})$  и  $(\lambda\mu)\vec{a}$  также равны нулю. Отметим еще одно важное свойство операции умножения вектора на число

$$-(\lambda\vec{a}) = (-\lambda)\vec{a}. \quad (6)$$

Иллюстрацией этого свойства служит рисунок 14.

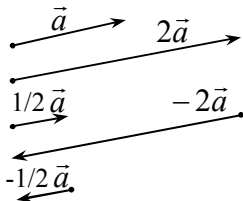


Рисунок 13

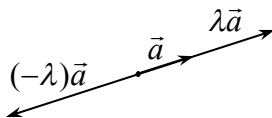


Рисунок 14

**Теорема (о коллинеарных векторах).** Если  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  – два коллинеарных вектора, причем вектор  $\vec{a}$  – ненулевой, то найдется единственное число  $\lambda$ , такое, что  $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ .

Доказательство. Если  $\vec{b} = 0$ , то, очевидно,  $\lambda = 0$ . Пусть теперь  $\vec{b} \neq 0$ . Положим  $\lambda = |\vec{b}|/|\vec{a}|$ , если векторы  $\vec{b}$  и  $\vec{a}$  направлены одинаково, и  $\lambda = -|\vec{b}|/|\vec{a}|$ , если  $\vec{b}$  и  $\vec{a}$  направлены противоположно. Тогда  $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ .

Если наряду с равенством  $\vec{b} = \lambda\vec{a}$  имеет место равенство  $\vec{b} = \mu\vec{a}$ , то  $(\lambda - \mu)\vec{a} = 0$ ; так как  $\vec{a} \neq 0$ , отсюда следует, что  $\lambda - \mu = 0$ ; т.е.  $\lambda = \mu$ .

## 5. Линейные операции над векторами.

Операции сложения векторов и умножения вектора на число называются линейными операциями. (Что касается операции вычитания, то она определяется через сложение и является в этом смысле «вторичной».)

Рассмотрим два свойства, в каждом из которых участвуют обе линейные операции:

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}, \quad (7)$$

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}. \quad (8)$$

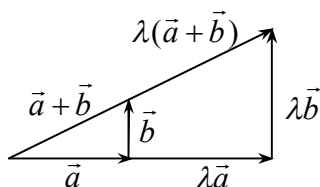


Рисунок 15

В этих равенствах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  – произвольные векторы, а  $\lambda$  и  $\mu$  – любые числа. Рисунок 15 иллюстрирует второе из равенств для случая  $\lambda > 1$ .

Свойства (7) и (8) вместе со свойствами (1)-(6) имеют важное

значение, так как позволяют проводить выкладки в векторной алгебре в основном так же, как в обычной алгебре.

В частности, при вычислениях с векторами можно применять обычные арифметические правила раскрытия скобок и вынесения общих множителей за скобки.

### 6. Линейные комбинации нескольких векторов.

Пусть дано несколько векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ .

**Определение.** Линейной комбинацией векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  называют сумму произведений этих векторов на какие-нибудь числа  $c_1, c_2, \dots, c_n$ :

$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \dots + c_n\vec{a}_n$ , где  $c_1, c_2, \dots, c_n$  – коэффициенты линейной комбинации векторов.

Так, вектор  $3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + 7\vec{c}$  есть линейная комбинация векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .

**Пример.** Дан четырехугольник  $ABCD$  (рисунок 16).

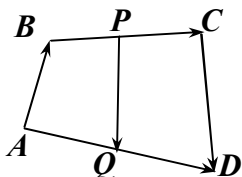


Рисунок 16

Точки  $P$  и  $Q$  – середины сторон  $BC$  и  $AD$ . Выразить вектор  $\overrightarrow{PQ}$  через векторы  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{CD}$ , т.е. представить в виде линейной комбинации этих векторов. Решение.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AQ} = \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}. \end{aligned}$$

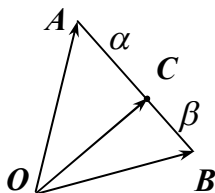
Если учесть, что  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = 0$ , и значит,  $\overrightarrow{DA} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$ , то получим

$$\overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}.$$

Как видим, вектор  $\overrightarrow{BC}$  в это выражение не входит.

### 7. Задача об отрезке, разделенном в данном отношении.

Пусть точка  $C$ , лежащая на отрезке  $AB$ , делит (рисунок 17) этот отрезок в отношении  $\alpha/\beta$ , т.е.



$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{\alpha}{\beta}. \text{ Тогда очевидно,}$$

$$\overrightarrow{AC} = \frac{\alpha}{\beta}\overrightarrow{CB}. \quad (9)$$

Рисунок 17

Соединим точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  с некоторой точкой  $O$  и поставим следующую задачу:

выразить вектор  $\overrightarrow{OC}$  через векторы  $\overrightarrow{OA}$  и  $\overrightarrow{OB}$ .

Решение.

$$\text{Имеем } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}.$$

Умножая обе части первого из этих равенств на  $\beta$ , а обе части второго — на  $\alpha$ , получаем  $\beta\overrightarrow{AC} = \beta(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$ ,  $\alpha\overrightarrow{CB} = \alpha(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$ .

Левые части равенств в силу (9) равны между собой, поэтому равны и правые части, т.е.  $\beta(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = \alpha(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$ .

Переписав это равенство в виде  $(\alpha + \beta)\overrightarrow{OC} = \beta\overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{OB}$ , получим

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{OA} + \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\overrightarrow{OB}. \quad (10)$$

**Пример.** Доказать, что медианы произвольного треугольника пересекаются в одной точке, а также что эта точка делит каждую из медиан в отношении 2:1, считая от вершины.

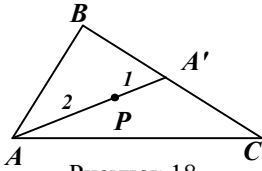


Рисунок 18

Решение. Выберем в плоскости треугольника произвольную точку  $O$ . Далее на медиане  $AA'$ , соединяющей вершину  $A$  с серединой стороны  $BC$ , рассмотрим точку  $P$ , делящую ее в отношении 2:1 (рисунок 18). По формуле (10) имеем

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2+1} \overrightarrow{OA} + \frac{2}{2+1} \overrightarrow{OA'},$$

$$\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OC}.$$

$$\text{Отсюда } \overrightarrow{OP} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \left( \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OC} \right) = \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{OB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{OC}.$$

В полученное выражение векторы  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OC}$  входят равноправно. Отсюда ясно, что если взять точку  $Q$ , делящую медиану  $BB'$  в отношении 2:1, а также точку  $R$ , которая делит медиану  $CC'$  в отношении 2:1, то для векторов  $\overrightarrow{OQ}$  и  $\overrightarrow{OR}$  получим точно такое же выражение. Следовательно,  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR}$ , что и доказывает совпадение точек  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ .

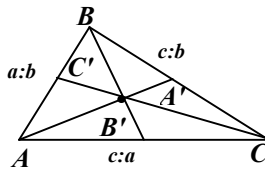


Рисунок 19

## §2. Базис на плоскости и в пространстве.

### 1. Базис на плоскости. Разложение произвольного вектора по базису.

**Лемма.** Если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  не коллинеарны, то равенство

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0 \quad (1)$$

возможно лишь при условии, что оба числа  $\alpha$  и  $\beta$  равны нулю.

Доказательство. Пусть, например,  $\alpha \neq 0$ . Тогда из (1) следует  $\vec{a} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{b}$ , а это противоречит тому, что векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  не коллинеарны. Поэтому  $\alpha = 0$ . Аналогично можно доказать, что  $\beta = 0$ .

Рассмотрим теперь в пространстве некоторую плоскость.

**Определение.** Базисом в данной плоскости называют любые два неколлинеарных вектора  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$  в этой плоскости.

**Теорема.** Пусть  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  – базис в плоскости. Тогда любой вектор  $\vec{a}$  этой плоскости может быть представлен, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации базисных векторов  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$ :

$$\vec{a} = X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2. \quad (2)$$

Доказательство.

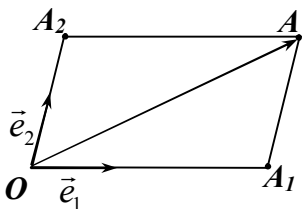


Рисунок 20

Приведем векторы  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  и  $\vec{a}$  к общему началу  $O$ . Далее проведем через точку  $A$  (конец вектора  $\vec{a}$ ) прямую, параллельную вектору  $\vec{e}_2$ , и пусть  $A_1$  – точка пересечения этой прямой с осью вектора  $\vec{e}_1$  (рис. 20); точка существует, так как векторы  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$  не коллинеарны. Имеем

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A}.$$

По теореме о коллинеарных векторах,  $\overrightarrow{OA_1} = X\vec{e}_1$ ,

$\overrightarrow{A_1A} = Y\vec{e}_2$ , где  $X$  и  $Y$  - некоторые числа.

Отсюда  $\vec{a} = X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2$ , что и доказывает представимость вектора  $\vec{a}$  в виде линейной комбинации векторов  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$ .

Докажем единственность этого представления. Пусть наряду с (2) имеет место равенство

$$\vec{a} = X'\vec{e}_1 + Y'\vec{e}_2. \quad (3)$$

Вычитая (3) из (2) получаем

$$(X - X')\vec{e}_1 + (Y - Y')\vec{e}_2 = 0.$$

По лемме отсюда следует, что  $X = X'$  и  $Y = Y'$ .

**Определение.** Равенство (2) называют разложением вектора  $\vec{a}$  по базису  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ , а числа  $X$  и  $Y$  - координатами вектора  $\vec{a}$  в базисе  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ :  $\vec{a} = (X, Y)$ .

**Пример.** Дан параллелограмм  $ABCD$  (рис. 21). Точки  $P$  и  $Q$  - середины сторон  $BC$  и  $CD$  соответственно. Найти координаты вектора  $\overrightarrow{PQ}$ , если за базисные векторы приняты

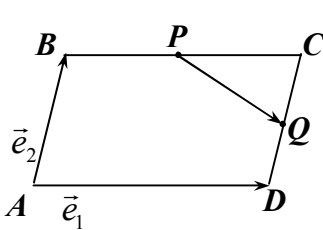


Рисунок 21

$$\vec{e}_1 = \overrightarrow{AD} \text{ и } \vec{e}_2 = \overrightarrow{AB}.$$

Решение.

Имеем

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \\ &= \frac{1}{2}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2. \end{aligned}$$

Значит,  $\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$  в базисе  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ .

## 2. Компланарные векторы.

Назовем вектор  $\overrightarrow{AB}$  параллельным данной плоскости  $\alpha$ , если прямая  $AB$ , на которой лежит этот вектор, параллельна плоскости  $\alpha$ . Нулевой вектор считают параллельным любой плоскости.

**Определение.** Несколько векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$  в пространстве

называются компланарными, если они параллельны одной и той же плоскости.

Если векторы  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$ ,  $\vec{OC}$ , ... с общим началом  $O$  компланарны, то, очевидно, точки  $A, B, C, \dots$  лежат в одной плоскости. В этом смысле говорят, что компланарные векторы можно перенести в одну плоскость.

**Пример.** Рассмотрим пирамиду с вершинами  $A, B, C, D$  (рисунок 22).

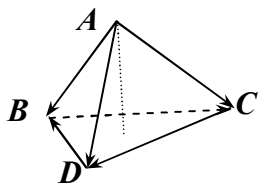


Рисунок 22

Векторы  $\vec{BC}$ ,  $\vec{CD}$ ,  $\vec{DB}$ , очевидно, компланарны. Векторы  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AD}$ ,  $\vec{AC}$ , напротив, не компланарны. Векторы  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AD}$ ,  $\vec{DC}$  также не компланарны: в противном случае точка  $C$  лежала в плоскости  $ABD$ .

Два вектора всегда компланарны. Три вектора могут и не быть компланарными. Если векторы  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$ ,

$\vec{OC}$  не компланарны, то, проведя через конец каждого из них плоскость, параллельную двум другим векторам, получим три различные плоскости. Эти три плоскости вместе с тремя другими

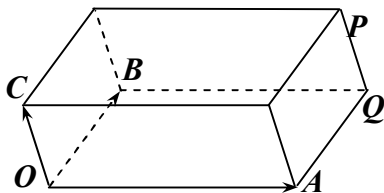


Рисунок 23

плоскостями, определяемыми соответственно парами векторов  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$ ;  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OC}$ ;  $\vec{OB}$ ,  $\vec{OC}$ , ограничивают некоторый параллелепипед (рисунок 23).

Если  $P$  — вершина этого параллелепипеда, противоположная  $O$ , то  $\vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP} = \vec{OQ} + \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ .

Полученное равенство дает способ построения суммы трех некомпланарных векторов  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$ ,  $\vec{OC}$ : нужно рассмотреть параллелепипед с вершиной  $O$ , имеющей в качестве трех сторон отрезки  $OA, OB, OC$ ; тогда вектор  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$  изобразится диагональю этого параллелепипеда, имеющей начало в вершине  $O$  и конец в противоположной вершине параллелепипеда.

### 3. Базис в пространстве. Разложение произвольного вектора по базису.

**Лемма.** Если векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  не компланарны, то равенство

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \quad (4)$$

возможно лишь при условии  $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$ .

**Определение.** Базисом в пространстве называют любые три некомпланарных вектора  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ .

**Теорема.** Пусть  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  – векторный базис в пространстве. Тогда любой вектор  $\vec{a}$  в пространстве может быть представлен, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации базисных векторов  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ :

$$\vec{a} = X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2 + Z\vec{e}_3. \quad (5)$$

**Определение.** Равенство (5) называют разложением вектора  $\vec{a}$  по базису  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ , а числа  $X, Y, Z$  – координатами вектора  $\vec{a}$  в базисе  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ .

**Пример.** Дана пирамида с вершинами  $A, B, C, D$ . Точки  $P$  и  $Q$  – середины ребер  $AD$  и  $BC$  соответственно (рисунок 24).

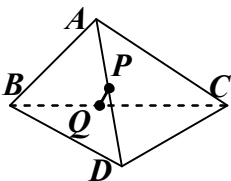


Рисунок 24

Найти координаты вектора  $\overrightarrow{PQ}$  в базисе

$$\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}, \vec{e}_3 = \overrightarrow{AD}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \text{Имеем } \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ} = \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} + \\ &+ \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \\ &= \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 - \frac{1}{2}\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Отсюда  $\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$  в базисе  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ .

#### 4. Действия над векторами, заданными своими координатами.

Пусть на плоскости выбран векторный базис  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  и относительно него векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  заданы своими координатами:  $\vec{a} = (X, Y)$ ,  $\vec{b} = (X', Y')$ . Тогда имеем  $\vec{a} = X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2$ ,  $\vec{b} = X'\vec{e}_1 + Y'\vec{e}_2$ , а значит,

$$\vec{a} + \vec{b} = (X + X')\vec{e}_1 + (Y + Y')\vec{e}_2,$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (X - X')\vec{e}_1 + (Y - Y')\vec{e}_2.$$

Таким образом,  $\vec{a} + \vec{b} = (X + X', Y + Y')$ ,  $\vec{a} - \vec{b} = (X - X', Y - Y')$ , т.е. при сложении или вычитании векторов складываются или вычитаются их одноименные координаты.

Аналогично, если  $\vec{a} = (X, Y)$ , то можно записать  $\vec{a} = X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2$ ,  $\lambda\vec{a} = \lambda X\vec{e}_1 + \lambda Y\vec{e}_2$ , откуда следует, что

$$\lambda\vec{a} = (\lambda X, \lambda Y),$$

т.е. при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

Для векторов в пространстве правила действий в координатах остаются теми же, что и в случае плоскости:

если  $\vec{a} = (X, Y, Z)$  и  $\vec{b} = (X', Y', Z')$ , то

$$\vec{a} + \vec{b} = (X + X', Y + Y', Z + Z'),$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (X - X', Y - Y', Z - Z'),$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda X, \lambda Y, \lambda Z).$$

**Пример.** Пусть  $\vec{a} = (-1, 2, 5)$ ,  $\vec{b} = (1, 3, 7)$ . Найти вектор  $7\vec{a} - 5\vec{b}$ .

Решение. Имеем  $7\vec{a} = (-7, 14, 35)$ ,  $5\vec{b} = (5, 15, 35)$ ,  $7\vec{a} - 5\vec{b} = (-12, -1, 0)$ .

### 5. Условие коллинеарности векторов в координатах.

Пусть  $\vec{a} = (X, Y)$ ,  $\vec{b} = (X', Y')$  – два вектора на плоскости, причем  $\vec{a} \neq 0$ . Если вектор  $\vec{b}$  коллинеарен  $\vec{a}$ , то  $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ , где  $\lambda$  – некоторое число. Так как равные векторы имеют соответственно равные координаты, то

$$X' = \lambda X, \quad Y' = \lambda Y. \quad (6)$$

Обратно: если имеют место равенства (6), то  $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ , т.е. вектор  $\vec{b}$  коллинеарен  $\vec{a}$ .

Итак, вектор  $\vec{b}$  коллинеарен ненулевому вектору  $\vec{a}$  в том и только в том случае, когда координаты вектора  $\vec{b}$  пропорциональны соответственным координатам вектора  $\vec{a}$ .

Такое заключение справедливо и для векторов в пространстве.

Если ни одна из координат вектора  $\vec{a}$  не равна нулю, можно записать условие коллинеарности вектора  $\vec{b}$  вектору  $\vec{a}$  в

виде  $\frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y}$  – в случае плоскости,

$$\frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y} = \frac{Z'}{Z} \quad \text{– в случае пространства.}$$

Например, вектор  $\vec{b} = (-2, 6, 4)$  коллинеарен  $\vec{a} = (-3, 9, 6)$ , так как  $\frac{-2}{-3} = \frac{6}{9} = \frac{4}{6}$ .

**Пример.** Проверить, что векторы  $\vec{a} = (-1, 3)$  и  $\vec{b} = (2, 2)$  на плоскости не коллинеарны, и разложить вектор  $\vec{c} = (7, -5)$  по базису  $\vec{a}, \vec{b}$ .

Решение. Так как  $-\frac{1}{2} \neq \frac{3}{2}$ , то векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  не коллинеарны. Следовательно, они образуют базис на плоскости. Пусть  $\vec{c} = X\vec{a} + Y\vec{b}$ . Чтобы найти  $X$  и  $Y$ , приравняем друг другу

соответственные координаты векторов  $\vec{c}$  и  $X\vec{a} + Y\vec{b}$ . Получим следующую систему двух уравнений с двумя неизвестными  $X$  и  $Y$ :

$$\begin{cases} 7 = X(-1) + Y \cdot 2 \\ -5 = X \cdot 3 + Y \cdot 2. \end{cases}$$

Решив ее, находим  $X = -3$ ,  $Y = 2$ .

Итак,  $\vec{c} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$ .

### §3. Декартова система координат на прямой, на плоскости и в пространстве

Пусть  $O$  - некоторая фиксированная точка, которую далее будем называть началом. Если  $M$  - произвольная точка, то вектор  $\overrightarrow{OM}$  называется радиусом-вектором точки  $M$  по отношению к началу  $O$ , короче, радиусом-вектором точки  $M$ .

#### 1. Декартовы координаты на прямой.

Пусть в пространстве дана некоторая прямая  $l$ . Выберем начало  $O$  лежащим на этой прямой. Кроме того, выберем на

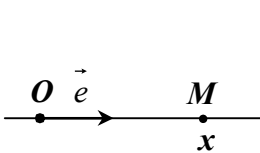


Рисунок 25

прямой  $l$  ненулевой вектор  $\vec{e}$ , который будем называть базисным (рисунок 25).

**Определение.** Совокупность  $\{O; \vec{e}\}$

точки  $O$  и базисного вектора  $\vec{e}$  называют декартовой системой координат на прямой.

Рассмотрим на прямой  $l$  произвольную точку  $M$ . Так как векторы  $\overrightarrow{OM}$  и  $\vec{e}$  коллинеарны, то  $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}$ , где  $x$  - некоторое число. Это число назовем координатой точки  $M$  на прямой. Начало  $O$  имеет координату нуль, все остальные точки  $M$  на прямой имеют положительные или отрицательные координаты в зависимости от того, совпадают ли с направлением векторов  $\overrightarrow{OM}$  и  $\vec{e}$  или же они противоположны. Прямую  $l$ , на которой

введены координаты, будем называть осью координат или осью  $OX$ .

Введение координат на прямой приводит к тому, что каждой точке  $M$  на прямой соответствует единственное число  $x$  – ее координата. Обратно: если дано произвольное число  $x$ , то существует единственная точка  $M$ , для которой это число является координатой.

## 2. Декартовы координаты на плоскости.

Выберем на плоскости начало  $O$  и два неколлинеарных вектора  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ , образующих векторный базис.

**Определение.** Совокупность  $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  точки  $O$  и векторного базиса  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  называют декартовой системой координат на плоскости.

Две прямые, проходящие через  $O$  и параллельные соответственно векторам  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$ , называют осями координат. Первую из них обычно называют осью абсцисс и обозначают  $OX$ , вторую – осью ординат и обозначают  $OY$ .

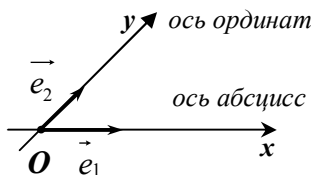


Рисунок 26

Будем всегда изображать векторы  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$  лежащими на соответствующих осях координат (рисунок 26). Если на плоскости задана декартова система координат, то положение любой

точки  $M$  по отношению к этой системе координат может быть охарактеризовано с помощью двух чисел  $x$  и  $y$  – координат точки  $M$  в этой системе.

**Определение.** Координатами точки  $M$  на плоскости относительно декартовой системы координат  $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  называют координаты ее радиуса-вектора  $\vec{OM}$  в базисе  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ .

Другими словами, чтобы найти координаты точки  $M$ , нужно разложить вектор  $\overrightarrow{OM}$  по базису  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ :

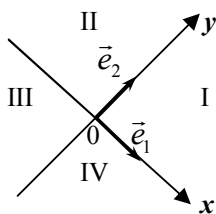
$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2,$$

тогда числа  $x, y$  и будут координатами  $M$  относительно декартовой системы координат  $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ .

Координату  $x$  называют абсциссой точки  $M$ , координату  $y$  – ординатой точки  $M$ . Координаты точки записывают в скобках рядом с обозначением этой точки: например, запись  $M(1; -2)$  означает «точка  $M$  имеет абсциссу 1 и ординату -2».

Итак, если выбрана система координат  $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  на плоскости, то каждой точке  $M$  плоскости отвечает упорядоченная пара чисел  $x$  и  $y$ . Обратно: любой упорядоченной паре чисел  $x$  и  $y$  отвечает единственная точка  $M$  на плоскости. Эта точка является концом вектора  $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ .

Начало  $O$  имеет координаты  $(0, 0)$ . Точки, лежащие на оси абсцисс, имеют ординату, равную 0, точки лежащие на оси ординат, абсциссу, равную 0. Остальная часть плоскости разбивается осями координат на четыре координатных угла или четверти (рисунок 27):



для точек первого угла  $x > 0, y > 0$ ;

для точек второго угла  $x < 0, y > 0$ ;

для точек третьего  $x < 0, y < 0$ ;

для точек четвертого  $x > 0, y < 0$ .

Рисунок 27

Введение системы координат лежит в основе метода аналитической геометрии, сущность которого состоит в том, чтобы научиться сводить любую геометрическую задачу к задаче арифметики или алгебры. Начальным этапом такого сведения является арифметизация исходных данных; например, задание точки означает задание ее координат. При этом арифметизируется и само решение задачи. Конечный результат

имеет также арифметическую форму; например, если ставится задача найти некоторую точку, то в итоге должны быть получены ее координаты.

### 3. Координаты вектора в декартовой системе.

**Определение.** Координатами вектора  $\vec{a}$  на плоскости относительно декартовой системы координат  $\{0; \vec{e}_1; \vec{e}_2\}$  называют координаты этого вектора в базисе  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ .

Иначе говоря, чтобы найти координаты вектора  $\vec{a}$ , нужно разложить его по базису  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ :

$$\vec{a} = X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2;$$

тогда коэффициенты  $X$  и  $Y$  и будут координатами вектора  $\vec{a}$  относительно декартовой системы  $\{0; \vec{e}_1; \vec{e}_2\}$ .

Рассмотрим следующую важную задачу.

**Задача.** Даны точки  $A(x; y)$  и  $B(x'; y')$ . Найти координаты  $X$  и  $Y$  вектора  $\vec{AB}$ .

Решение. Имеем  $\vec{OA} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ ,  $\vec{OB} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2$ . Вычитая из второго равенства первое, получаем  $\vec{AB} = (x' - x)\vec{e}_1 + (y' - y)\vec{e}_2$ . Следовательно,  $X = x' - x$ ,  $Y = y' - y$ . (1)

Итак, координаты вектора равны разности соответственных координат конца и начала вектора.

### 4. Декартова система координат в пространстве.

Пусть в пространстве зафиксирована некоторая точка  $O$  (начало) и выбран базис  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ .

**Определение.** Совокупность  $\{0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  называется декартовой системой координат в пространстве.

Три прямые, проходящие через  $O$  и параллельные соответственно векторам  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ , называют осями координат и обозначают соответственно  $OX, OY, OZ$ . Мы будем всегда

изображать векторы  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  лежащими на соответственных осях координат (рисунок 28).

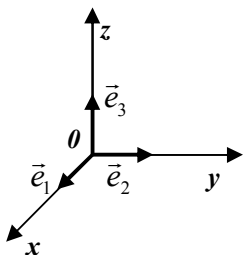


Рисунок 28

**Определение.** Координатами точки  $M$  в пространстве относительно декартовой системы координат  $\{0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  называют координаты ее радиуса-вектора  $\vec{OM}$  в этой системе.

Иначе говоря, координаты точки  $M$  – это такие три числа  $x, y, z$ , что

$$\vec{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3.$$

Как и в случае плоскости  $x$  и  $y$  – соответственно абсцисса и ордината точки  $M$ ; третью координату  $z$  называют аппликатой точки  $M$ . Запись  $M(x; y; z)$  означает: «точка  $M$  имеет координаты  $x, y, z$ ».

Введение в пространстве декартовой системы координат позволяет установить взаимно однозначное соответствие между точками  $M$  пространства и упорядоченными тройками чисел  $x, y, z$ .

Начало  $O$  имеет координаты  $(0, 0, 0)$ . Точки, лежащие на осях  $Ox, Oy, Oz$ , имеют соответственно координаты  $(x; 0; 0)$ ,  $(0; y; 0)$ ,  $(0; 0; z)$ ; точки, принадлежащие координатным плоскостям  $xOy, xOz, yOz$  – соответственно координаты  $(x; y; 0)$ ,  $(x; 0; z)$ ,  $(0; y; z)$ . Множество всех остальных точек пространства разбивается координатными плоскостями на восемь частей, называемых октантами.

**Определение.** Координатами вектора  $\vec{a}$  в пространстве относительно декартовой системы координат  $\{0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  называют координаты этого вектора в базисе  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ .

Как и в случае плоскости, решается задача о нахождении координат вектора по координатам его концов: если  $A(x; y; z)$  и

$B(x'; y'; z')$ , то координаты  $X, Y, Z$  вектора  $\overrightarrow{AB}$  соответственно равны  $X = x' - x$ ,  $Y = y' - y$ ,  $Z = z' - z$ .

### 5. Координаты точки, делящей отрезок в данном отношении.

Пуст в пространстве заданы две точки:  $A(x, y, z)$ ,  $B(x'; y'; z')$ . Требуется найти точку  $C$ , делящую отрезок  $AB$  в данном отношении  $\alpha / \beta$ . В аналитической геометрии найти точку всегда означает найти ее координаты. Воспользуемся формулой

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{OA} + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \overrightarrow{OB},$$

выведенной в п.7. §1. Обозначая координаты точки  $C$   $X_C, Y_C, Z_C$ , получаем

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\beta}{\alpha + \beta} x + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} x', \\ y_c &= \frac{\beta}{\alpha + \beta} y + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} y', \\ z_c &= \frac{\beta}{\alpha + \beta} z + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} z', \end{aligned} \quad (2)$$

что и решает поставленную задачу.

Ту же задачу можно рассмотреть на плоскости; тогда  $A(x; y)$ ,  $B(x'; y')$ , а решение задачи дают первые две из формул (2).

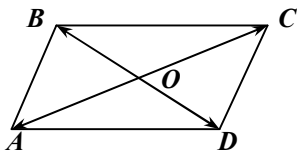
В частном случае  $\alpha = \beta$  формулы (2) принимают вид

$$x_c = \frac{x + x'}{2}, \quad y_c = \frac{y + y'}{2}, \quad z_c = \frac{z + z'}{2},$$

т.е. координаты середины отрезка равны полусуммам координат концов отрезка.

### Задачи с решениями.

**Пример 1.** В параллелограмме  $ABCD$  диагонали пересекаются в точке  $O$ . Найти сумму векторов  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}$ .

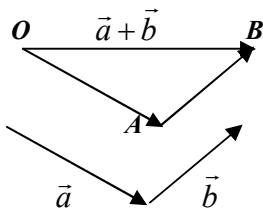


Решение.

Диагонали параллелограмма пересекаясь, делятся пополам:  $|\vec{OA}| = |\vec{OC}|$ . Векторы  $\vec{OA}$  и  $\vec{OC}$  противоположные, их сумма равна нулевому вектору:  $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{0}$ .

Аналогично устанавливается, что  $\vec{OB}$  и  $\vec{OD}$  – противоположные векторы. Итак,  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = (\vec{OA} + \vec{OC}) + (\vec{OB} + \vec{OD}) = \vec{0}$ .

**Пример 2.** Доказать, что для любых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  справедливо неравенство  $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ .



Решение. Если один из векторов  $\vec{a}$  или  $\vec{b}$  нулевой, то это неравенство очевидно выполняется. Пусть  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  ненулевые векторы,  $\vec{OA} = \vec{a}$  и  $\vec{AB} = \vec{b}$ , тогда по правилу сложения векторов (треугольника)  $\vec{OB} = \vec{a} + \vec{b}$ . По свойству расстояний для любых трех точек  $O, A$  и  $B$  выполняется

неравенство  $|\vec{OB}| \leq |\vec{OA}| + |\vec{AB}|$ , поэтому  $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ .

Заметим, что для различных точек  $O, A$  и  $B$  равенство  $|\vec{OB}| = |\vec{OA}| + |\vec{AB}|$  выполняется тогда и только тогда, когда  $O, A$  и  $B$  лежат на одной прямой, причем точка  $A$  лежит между точками  $O$  и  $B$ . Следовательно, для ненулевых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равенство  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$  справедливо тогда и только тогда, когда они сонаправлены.

**Пример 3.** Отрезок  $AB$ , где  $A(7;1)$ ,  $B(4;-5)$  разделен на три равные части. Найти координаты точек деления.

Решение. Пусть  $P$  – точка деления, ближайшая к  $A$ . Тогда  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2}$  и координаты точки  $P$  таковы:

$$x_P = \frac{2}{3} \cdot 7 + \frac{1}{3} \cdot 4 = 6, \quad y_P = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot (-5) = -1.$$

Для второй точки деления  $Q$  имеем  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{1}$ , следовательно

$$x_Q = \frac{1}{3} \cdot 7 + \frac{2}{3} \cdot 4 = 5, \quad y_Q = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot (-5) = -3.$$

Таким образом, точки деления:  $P(6;-1)$ ,  $Q(5;-3)$ .

**Пример 4.** Найти точку, симметричную точке  $A(-2;0;7)$  относительно точки  $B(5;-1;2)$ .

Решение. Если  $C$  – искомая точка, то  $B$  – середина отрезка  $AC$ . Поэтому, обозначив координаты точки  $C$  через  $x, y, z$ ,

$$\text{имеем} \quad \begin{cases} 5 = \frac{-2+x}{2}; \\ -1 = \frac{0+y}{2}; \\ 2 = \frac{7+z}{2}; \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x = 12; \\ y = -2; \\ z = -3. \end{cases}$$

**Пример 5.** На плоскости даны два вектора  $\vec{p} = (2;-3)$ ,  $\vec{g} = (1;2)$ . Найти разложение вектора  $\vec{a} = (9;4)$  по базису  $\vec{p}, \vec{g}$ .

Решение. Так как  $\frac{2}{1} \neq \frac{-3}{2}$ , то векторы  $\vec{p}$  и  $\vec{g}$  не коллинеарны. Следовательно, они образуют базис на плоскости. Пусть  $\vec{a} = X\vec{p} + Y\vec{g}$ . Чтобы найти  $X$  и  $Y$ , приравняем друг другу соответственные координаты векторов  $\vec{a}$  и  $X\vec{p} + Y\vec{g}$ . Получим систему двух уравнений с двумя неизвестными  $X$  и  $Y$ :

$$\begin{cases} 9 = 2x + y, \\ 4 = -3x + 2y. \end{cases}$$

Решив ее, находим  $x = 2$ ,  $y = 5$ . Итак,  $\vec{a} = 2\vec{p} + 5\vec{g}$ .

### Задачи для самостоятельного решения

1. Задайте произвольно векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  на плоскости и постройте: а)  $3\vec{a}$ ; б)  $-\frac{1}{2}\vec{b}$ ; в)  $2\vec{a} + 3\vec{b}$ ; г)  $\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}$ .

2. В параллелограмме  $ABCD$  имеем  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$  и  $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ . Выразите через  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  следующие векторы:  $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PD}$ , где  $P$  – точка пересечения диагоналей параллелограмма.

3. Сторона  $BC$  треугольника  $ABC$  разделена точками  $P$  и  $Q$  на три равные части. Обозначив  $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$  и  $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ , выразите через  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  векторы  $\overrightarrow{AP}$  и  $\overrightarrow{AQ}$ .

4. На плоскости даны два вектора:  $\vec{a} = (2; 3)$  и  $\vec{b} = (1; 2)$ . Проверьте, что они не коллинеарны, и найдите разложение вектора  $\vec{c} = (4; 9)$  по базису  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

5. Найдите точку, симметричную точке  $A(-3; 0)$  относительно точки  $B(2; 9)$ .

6. Отрезок  $AB$ , где  $A(1; -3; -5)$ ,  $B(7; 3; 4)$ , разделен на три равные части. Найдите точки деления.

### Ответы.

2.  $\overrightarrow{PA} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ ,  $\overrightarrow{PB} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$ ,  $\overrightarrow{PC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ ,  
 $\overrightarrow{PD} = -\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$ . 3.  $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$ .  
 4.  $\vec{c} = -\vec{a} + 6\vec{b}$ . 5.  $(7; 18)$ . 6.  $(3; -1; -2)$  и  $(5; 1; 1)$ .

## ГЛАВА 2. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ И ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

### §4. Проекция вектора на ось.

Пусть в пространстве задана прямая. Выберем на ней одно из двух направлений и будем считать его положительным.

**Определение.** Прямую, на которой выбраны положительное направление и единица для измерения длин, называют осью.

Обычно положительное направление и единицу длины задают одновременно с помощью вектора  $\vec{e}$  длины 1, параллельного этой прямой. Такой вектор называют единичным вектором данной оси или **ортом** (рисунок 29).

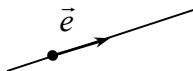


Рисунок 29

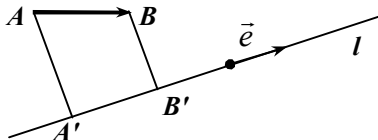


Рисунок 30

Обозначим рассматриваемую ось буквой  $l$ . Из произвольной точки  $A$  опустим перпендикуляр на  $l$ . Точку  $A'$  — основание перпендикуляра — называют ортогональной проекцией (или просто проекцией) точки  $A$  на ось  $l$ .

**Определение.** Пусть  $l$  — произвольная ось и  $\overrightarrow{AB}$  — произвольный вектор в пространстве. Вектор  $\overrightarrow{A'B'}$ , начало и конец которого суть проекции точек на ось  $l$  (рисунок 30).

Наряду с векторной проекцией применяют скалярную проекцию вектора на ось.

**Определение.** Скалярной проекцией вектора  $\overrightarrow{AB}$  на ось  $l$  называют такое число  $\lambda$ , что  $\overrightarrow{A'B'} = \lambda \vec{e}$ .

Скалярную проекцию будем обозначать так:  $np_l \overrightarrow{AB}$  или  $np_{\vec{a}} \overrightarrow{AB}$ , где  $\vec{a}$  – какой-нибудь ненулевой вектор, идущий в положительном направлении оси  $l$ .

### 1. Угол между векторами. Угол вектора с осью.

Пусть  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  – два произвольных вектора. Перенесем их начала в одну точку и затем проведем через них плоскость. Углом  $\varphi$  между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называют угол кратчайшего поворота от вектора  $\vec{a}$  к вектору  $\vec{b}$  в плоскости этих векторов (рисунок 31). Очевидно,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ .

Если имеется некоторый вектор  $\vec{a}$  и ось  $l$ , то углом между ними назовем угол  $\varphi$  между вектором  $\vec{a}$  и ортом  $\vec{e}$  оси  $l$  (рисунок 32). Угол  $\varphi$  будем обозначать символами  $(\vec{a}, \vec{b})$  и  $(\vec{a}, \vec{e})$ .

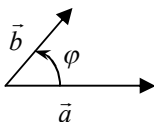


Рисунок 31

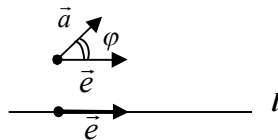


Рисунок 32

### 2. Теорема о проекции вектора на ось

**Теорема.** Проекция вектора  $\vec{a}$  на ось  $l$  равна произведению длины вектора  $\vec{a}$  на косинус угла между этим вектором и осью  $l$ :

$$np_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos(\vec{a}, l). \quad (1)$$

Формула (1) непосредственно следует из определения косинуса. Рисунок 33 поясняет возможные при этом случаи.

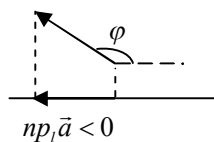
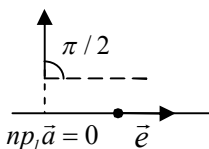
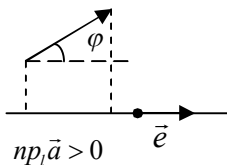


Рисунок 33

### 3. Свойства проекций

1. Равные векторы имеют равные проекции на одну и ту же ось. Действительно, если  $\vec{a} = \vec{b}$ , то  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$  и  $(\vec{a}, l) = (\vec{b}, l)$ , откуда по формуле (1) следует  $np_l \vec{a} = np_l \vec{b}$ .

2. Проекция суммы нескольких векторов на произвольную ось равна сумме их проекций на эту ось:

$$np_l(\vec{a} + \vec{b} + \dots) = np_l \vec{a} + np_l \vec{b} + \dots$$

3. При умножении вектора на число его проекция умножается на то же число:

$$np_l(k \cdot \vec{a}) = k \cdot np_l \vec{a}.$$

### §5. Прямоугольная декартова система координат.

Среди декартовых систем координат простейшей является прямоугольная декартова система координат.

**Определение.** Декартова система координат  $\{0; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  на плоскости называется прямоугольной, если  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$  – взаимно перпендикулярные единичные векторы.

Аналогично определяется прямоугольная декартова система координат  $\{0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  в пространстве; в этом случае векторы  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  также должны быть взаимно перпендикулярными и единичными.

Базисные векторы  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  прямоугольной декартовой системы координат на плоскости обозначают обычно  $\vec{i}, \vec{j}$ ; базисные векторы  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  прямоугольной декартовой системы координат в пространстве обозначают  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ .

Соответственно разложение произвольного радиус-вектора  $\overrightarrow{OM}$  по базису записывают в виде

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \text{ (для плоскости),}$$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \text{ (для пространства).}$$

В первом случае точка  $M$  имеет координаты  $x, y$ , во втором – координаты  $x, y, z$  (рисунок 34).

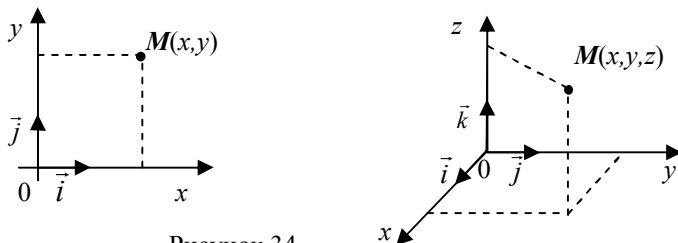


Рисунок 34

### 1. Координаты вектора в прямоугольной системе как его проекции на оси координат.

Пусть в прямоугольной системе координат на плоскости точка  $A$  имеет координаты  $x, y$ . Тогда ее проекциями на координатные оси являются  $A_1(x; 0)$ ,  $A_2(0; y)$ . Это непосредственно следует из сказанного ранее. Аналогично, если в прямоугольной системе координат в пространстве точка  $A$  имеет координаты  $x, y, z$ , то ее проекции на координатные оси суть  $A_1(x; 0; 0)$ ,  $A_2(0; y; 0)$ ,  $A_3(0; 0; z)$ .

**Теорема.** Координаты вектора  $\overrightarrow{AB}$  в любой прямоугольной системе координат совпадают с его проекциями на координатные оси.

**Доказательство.** Пусть  $A(x; y; z)$  и  $B(x'; y'; z')$ . По доказанному ранее, координаты вектора  $\overrightarrow{AB}$  в данной системе координат соответственно равны  $x' - x$ ,  $y' - y$ ,  $z' - z$ .

Спроецируем точки  $A$  и  $B$  на координатные оси; в результате получим точки  $A_1, A_2, A_3$  и  $B_1, B_2, B_3$ . Далее имеем

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} = x'\vec{i} - x\vec{i} = (x' - x)\vec{i} \text{ и, аналогично,}$$

$$\overrightarrow{A_2B_2} = (y' - y)\vec{j}, \quad \overrightarrow{A_3B_3} = (z' - z)\vec{k}.$$

Эти равенства показывают, что

$$np_{0x} \overrightarrow{AB} = x' - x, \quad np_{0y} \overrightarrow{AB} = y' - y, \quad np_{0z} \overrightarrow{AB} = z' - z.$$

## 2. Длина отрезка в координатах.

Пусть на координатной оси с началом 0 и единичным базисным вектором  $\vec{e}$  взяты две точки  $A(x_1)$  и  $B(x_2)$  (рисунок 35).

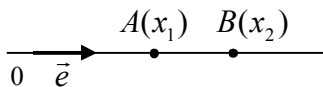


Рисунок 35

Тогда  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1)\vec{e}$ . Отсюда следует, что расстояние между точками **A** и **B** равно

$$|AB| = |x_2 - x_1|.$$

Пусть теперь относительно прямоугольной системы координат на плоскости взяты две точки  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$ . Предположим сначала, что отрезок  $AB$  не параллелен ни одной из координатных осей. Проведем через каждую из точек **A** и **B** прямые, параллельны координатным осям (рисунок 36). По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника  $ABP$

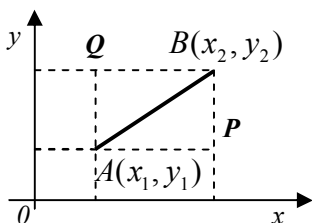


Рисунок 36

находим  $|AB|^2 = |AP|^2 + |BP|^2$ .

$$\text{Но } |AP| = |np_{0x} \overrightarrow{AB}| = |x_2 - x_1|,$$

$$|BP| = |np_{0y} \overrightarrow{AB}| = |y_2 - y_1|,$$

откуда следует, что

$$|AB|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2.$$

$$\text{Итак, } |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1)$$

Полученная формула верна и в тех случаях, когда отрезок  $AB$  параллелен оси  $OX$  или оси  $OY$ .

Формула (1) позволяет выразить длину отрезка на плоскости через координаты его концов.

Наконец, рассмотрим точки **A** и **B** в пространстве. Пусть  $A(x_1; y_1; z_1)$  и  $B(x_2; y_2; z_2)$ . Допустим сначала, что отрезок  $AB$  не параллелен координатной плоскости  $XOY$ . Спроецируем каждую из точек **A**, **B** на эту плоскость; получим точки  $A'(x_1; y_1; 0)$  и  $B'(x_2; y_2; 0)$ .

По доказанному,  $|A'B'|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ .

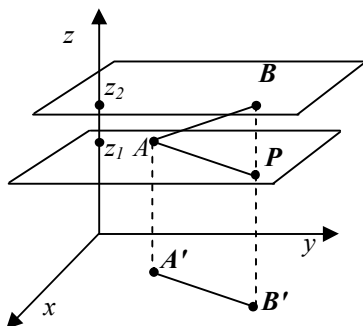


Рисунок 37

Проведем через точки  $A$  и  $B$  плоскости перпендикулярные оси  $OZ$  (рисунок 37).

По теореме Пифагора из треугольника  $ABP$  найдем

$$|AB|^2 = |AP|^2 + |PB|^2 = |A'B'|^2 + |PB|^2.$$

Но  $|PB| = |z_2 - z_1|$ , поскольку  $|PB|$  — абсолютная величина проекции вектора  $\overrightarrow{AB}$  на ось  $OZ$ . Отсюда

$$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

$$\text{Итак, } |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (2)$$

Полученная формула верна и в том случае, когда отрезок  $AB$  параллелен плоскости  $XOY$  (тогда  $|AB| = |A'B'|$ , а  $z_2 - z_1 = 0$ ).

Формула (2) позволяет выразить длину отрезка в пространстве через координаты его концов.

### 3. Длина вектора в координатах.

Ранее были получены формулы, выражающие координаты вектора  $\overrightarrow{AB}$  через координаты его концов:  $X = x_2 - x_1$ ,  $Y = y_2 - y_1$ , если  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$  — две точки на плоскости и  $X = x_2 - x_1$ ,  $Y = y_2 - y_1$ ,  $Z = z_2 - z_1$ , если  $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$  — две точки в пространстве.

Используя формулы (1) и (2), можно теперь записать формулы, выражающие длину произвольного вектора  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$  через его координаты в прямоугольной системе координат:

$$|\vec{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \text{если } \vec{a} = (X, Y) \text{ - вектор плоскости, и}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad \text{если } \vec{a} = (X, Y, Z) \text{ - вектор в пространстве.}$$

#### 4. Направляющие косинусы.

Пусть  $\vec{a}$  – ненулевой вектор в пространстве. Обозначим через  $\alpha, \beta, \gamma$  – углы, которые этот вектор образует с осями  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  прямоугольной системы координат (рисунок 38).

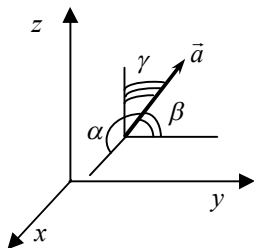


Рисунок 38

Так как проекции вектора на координатные оси совпадают с соответственными координатами  $X, Y, Z$  этого вектора, то можно записать равенства

$$X = |\vec{a}| \cos \alpha, Y = |\vec{a}| \cos \beta, Z = |\vec{a}| \cos \gamma. \quad (3)$$

Итак, каждая координата вектора равна произведению его длины на косинус угла между вектором и соответствующей координатной осью.

**Определение.** Числа  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  называют направляющими косинусами вектора  $\vec{a}$ .

Направляющие косинусы связаны между собой соотношением

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (4)$$

Действительно  $|\vec{a}|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$ , откуда согласно (3)

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma),$$

сокращая на  $|\vec{a}|^2$ , приходим к равенству (4).

**Пример 1.** Найти направляющие косинусы вектора  $\overrightarrow{AB}$ , если  $A(1; -1; 3)$ ,  $B(2; 1; 1)$ .

**Решение.** Координатами вектора  $\overrightarrow{AB}$  являются числа  $x = 2 - 1 = 1$ ,  $y = 1 - (-1) = 2$ ,  $z = 1 - 3 = -2$ .

$$\text{Отсюда } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3.$$

По формулам (3) находим

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{a}|} = \frac{1}{3}, \quad \cos \beta = \frac{y}{|\vec{a}|} = \frac{2}{3}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{|\vec{a}|} = -\frac{2}{3}.$$

**Пример 2.** Вектор  $\vec{a}$  образует с осями  $OX$  и  $OY$  углы  $60^\circ$ . Какой угол он образует с осью  $OZ$ ?

Решение. Обозначая искомый угол через  $\gamma$ , можно записать  $\cos^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 \gamma = 1$ ; откуда следует, что  $\cos \gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Имеем два решения:  $\gamma = 45^\circ$  и  $\gamma = 135^\circ$ . Очевидно, они отвечают двум векторам, симметричным друг другу относительно координатной плоскости  $XOY$ .

## §6. Скалярное произведение векторов.

1. **Определение.** Скалярным произведением двух ненулевых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называют число

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \left( \hat{\vec{a}, \vec{b}} \right).$$

Если хотя бы один из векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  равен нулю, то их скалярное произведение принимают равным нулю.

Скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  обозначают  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ . Итак,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi, \quad (1)$$

где  $\varphi$  – угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Случай, когда  $\vec{a} = 0$  или  $\vec{b} = 0$ , также охватывается формулой (1), поскольку тогда  $|\vec{a}| = 0$  или  $|\vec{b}| = 0$  (угол  $\varphi$  при этом можно считать произвольным).

Скалярное произведение тесно связано с проекциями векторов. Если обозначить через  $pr_{\vec{a}} \vec{b}$  проекцию вектора  $\vec{b}$  на ось, имеющую направление вектора  $\vec{a}$ , то, согласно теореме о

проекциях, будем иметь  $np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cos\varphi$ ,  $np_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$ . Из этих формул и из формулы (1) следует, что

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|np_{\vec{a}}\vec{b}, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|np_{\vec{b}}\vec{a}, \quad (2)$$

т.е. скалярное произведение двух векторов равно произведению длины одного из них на проекцию другого вектора на направление первого.

Скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{a}$  вектора  $\vec{a}$  на себя называют скалярным квадратом вектора  $\vec{a}$  и обозначают  $\vec{a}^2$ . Так как в этом случае угол  $\varphi = 0$ , то

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}|\cos 0 = |\vec{a}|^2,$$

т.е. скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

## 2. Свойства скалярного произведения.

1. Коммутативность:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

Это свойство непосредственно следует из определения скалярного произведения.

2. Ассоциативность по отношению к умножению вектора на число:

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Свойство вытекает из свойств проекций, поскольку

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = |\vec{b}|np_b(k\vec{a}) = |\vec{b}|k np_b\vec{a} = k|\vec{b}|np_b\vec{a} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

3. Дистрибутивность относительно сложения векторов:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

Доказательство этого свойства также следует из свойств проекций:

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} &= |\vec{c}|np_c(\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{c}|(np_c\vec{a} + np_c\vec{b}) = |\vec{c}|np_c\vec{a} + |\vec{c}|np_c\vec{b} = \\ &= \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}. \end{aligned}$$

4. Свойство знака. Если  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  – два ненулевых вектора и  $\varphi$  – угол между ними, то

$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$  тогда и только тогда, когда угол  $\varphi$  – острый;

$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$  тогда и только тогда, когда угол  $\varphi$  – тупой;

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  тогда и только тогда, когда угол  $\varphi$  – прямой.

Действительно, так как  $|\vec{a}| > 0$  и  $|\vec{b}| > 0$ , то:

неравенство  $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$  равнозначно неравенству  $\cos \varphi > 0$ ;

неравенство  $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$  равнозначно неравенству  $\cos \varphi < 0$ ;

неравенство  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  равнозначно неравенству  $\cos \varphi = 0$ ;

5. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  перпендикулярны в том и только в том случае, когда их скалярное произведение равно 0.

Действительно, если  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , то  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , откуда следует  $\cos \varphi = 0$ , а значит и  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

Обратно, если  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , то либо  $|\vec{a}| = 0$ , либо  $|\vec{b}| = 0$ , либо  $\cos \varphi = 0$ . В первом и втором случаях  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , так как нулевой вектор перпендикулярен любому другому, в третьем же случае  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  и  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

### 3. Выражение скалярного произведения через координаты векторов.

Пусть в прямоугольной системе координат на плоскости заданы координаты векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ :  $\vec{a} = (x_1, y_1)$ ,  $\vec{b} = (x_2, y_2)$ . Тогда имеет место важная формула

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2,$$

т.е. скалярное произведение равно сумме произведений одноименных координат.

Чтобы вывести эту формулу, разложим векторы по ортам:

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}, \quad \vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j},$$

затем перемножим их скалярно, используя установленные ранее свойства скалярного произведения. Получим

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1 x_2) \vec{i} \vec{i} + (x_1 y_2) \vec{i} \vec{j} + (y_1 x_2) \vec{j} \vec{i} + (y_1 y_2) \vec{j} \vec{j}.$$

Так как  $\vec{i} \vec{i} = \vec{j} \vec{j} = 1$  (векторы  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$  имеют длину, равную 1) и  $\vec{i} \vec{j} = \vec{j} \vec{i} = 0$  (вектор  $\vec{i}$  перпендикулярен  $\vec{j}$ ), то выражение для  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  приводится к требуемому виду:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Если  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  – два вектора в пространстве и  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ , то, рассуждая аналогично, приходим к равенству

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2, \quad (3)$$

которое формулируется точно так же, как и в случае плоскости.

В частности, для одного вектора  $\vec{a} = (x, y, z)$  имеем

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

откуда следует уже знакомая формула

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

#### 4. Применение скалярного произведения.

1) Условие перпендикулярности двух векторов.

Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  перпендикулярны в том и только в том случае, когда

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0.$$

Это предложение непосредственно следует из формулы (3) и свойства 5 скалярного произведения.

2) Угол между векторами. Пусть  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  – два ненулевых вектора,  $\varphi$  – угол между ними. Из определения скалярного произведения следует

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\text{или} \quad \cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (4)$$

С помощью этой формулы можно находить косинус угла между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

3) Проекция вектора на ось.

Пусть в пространстве дана некоторая ось  $\ell$ , единичный вектор которой  $\vec{e}$  составляет с координатными осями углы  $\alpha, \beta, \gamma$ . Тогда проекция произвольного вектора  $\vec{a} = (x, y, z)$  на эту ось определяется формулой

$$np_{\ell} \vec{a} = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma. \quad (5)$$

Действительно, поскольку длина вектора  $\vec{e}$  равна 1, его проекции на координатные оси равны  $1 \cdot \cos \alpha$ ,  $1 \cdot \cos \beta$ ,  $1 \cdot \cos \gamma$ . Следовательно, координаты вектора  $\vec{e}$  также равны  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$ . Так как

$$np_{\ell} \vec{a} = |\vec{a}| np_{\ell} \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{e},$$

то в результате получаем формулу (5).

**Пример 1.** Даны точки  $A(2;0;1), B(2;1;0), C(1;0;0)$ . Найти угол  $ABC$ .

Решение. Рассмотрим векторы  $\overrightarrow{BA} = (0; -1; 1)$  и  $\overrightarrow{BC} = (-1; -1; 0)$ . Искомый угол  $ABC$  есть угол  $\varphi$  между этими векторами. По формуле для косинуса угла между двумя векторами находим

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 0}{\sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,  $\varphi = 60^\circ$ .

**Пример 2.** Найти проекцию вектора  $\vec{a} = (1, 2, 3)$  на ось  $\ell$ , образующую с координатными осями равные острые углы.

Решение. Как следует из ранее сказанного, направляющие косинусы оси  $\ell$  таковы:

$\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Следовательно,

$$np_{\ell} \vec{a} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

**Пример 3.** Даны векторы  $\vec{a} = (1, 2, -1)$ ,  $\vec{b} = (2, -1, 3)$ . Найти  $np_{\vec{a}} \vec{b}$ .

Решение. Так как  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| np_{\vec{a}} \vec{b}$ , то

$$np_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{1 \cdot 2 + 2(-1) + (-1) \cdot 3}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{-3}{\sqrt{6}} = -\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

### ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

1. Найдите скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если:

а)  $|\vec{a}| = \sqrt{3}$ ,  $|\vec{b}| = 1$ ,  $(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{\pi}{6}$ ;

Решение.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{3} \cdot 1 \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}.$$

Ответ:  $\frac{3}{2}$ .

б)  $\vec{a} = (3; -1; 5)$ ,  $\vec{b} = (1; 2; -3)$ ;

Решение.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 5(-3) = 3 - 2 - 15 = -14.$$

Ответ: -14.

в)  $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ;

Решение.

Вектор  $\vec{a}$  имеет координаты  $\vec{a} = (2; -3; 4)$ , вектор  $\vec{b} = (1; -2; 1)$ , тогда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + (-3)(-2) + 4 \cdot 1 = 2 + 6 + 4 = 12.$$

Ответ: 12.

г)  $\vec{a} = \vec{p} + \vec{g} - 2\vec{r}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{p} - \vec{g} + \vec{r}$ , где  $\vec{p} = (3; 4; 2)$ ,  $\vec{g} = (2; 3; 5)$ ,  $\vec{r} = (-3; -2; -4)$ ;

Решение.

Найдем координаты векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$

$$\vec{a} = (3; 4; 2) + (2; 3; 5) - 2(-3; -2; -4) = (11; 11; 15),$$

$$\vec{b} = 2(3; 4; 2) - (2; 3; 5) + (-3; -2; -4) = (1; 3; -5).$$

Тогда скалярное произведение

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 11 \cdot 1 + 11 \cdot 3 + 15 \cdot (-5) = -31.$$

д)  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$ , где  $A(-2; -3; 8)$ ,  $B(2; 1; 7)$ ,  $C(1; 4; 5)$ ,  $D(-7; -4; 7)$ .

Решение.

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (2 - (-2); 1 - (-3); 7 - 8) = (4; 4; -1).$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{CD} = (-7 - 1; -4 - 4; 7 - 5) = (-8; -8; 2).$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 4(-8) + 4(-8) + (-1)2 = -32 - 32 - 2 = -66.$$

2. Найдите угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $\vec{a} = (-1; 2; -2)$ ,  $\vec{b} = (-6; -3; 6)$ .

Решение.

$$\begin{aligned} \cos(\vec{a}, \vec{b}) &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-1 \cdot (-6) + 2 \cdot (-3) + (-2) \cdot 6}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \\ &= \frac{6 - 6 - 12}{\sqrt{1 + 4 + 4} \cdot \sqrt{36 + 9 + 36}} = \frac{-12}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{81}} = -\frac{4}{9}. \end{aligned}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos\left(-\frac{4}{9}\right).$$

Ответ:  $\arccos\left(-\frac{4}{9}\right)$ .

3. При каком значении  $a$  векторы  $\vec{p} = a\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$  и  $\vec{g} = \vec{i} + 2\vec{j} - a\vec{k}$  перпендикулярны?

Решение.

Если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю.

$$\vec{p} \cdot \vec{g} = 0.$$

$$a \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-a) = 0.$$

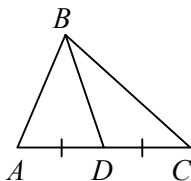
$$a - 6 - 2a = 0. \quad -6 - a = 0. \quad a = -6.$$

Ответ:  $a = -6$ .

4. Известны вершины  $\triangle ABC$ :  $A(2;-3;0)$ ,  $B(2;-1;1)$ ,  $C(0;1;4)$ .  
Найдите угол между медианой  $BD$  и основанием  $AC$ .

Решение.

Найдем векторы  $\overrightarrow{BD}$  и  $\overrightarrow{AC}$ . Точка  $D$  середина отрезка  $AC$  и по формулам ( ) имеем



$$x_D = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2+0}{2} = 1, y_D = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-3+1}{2} = -1,$$

$$z_D = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{0+4}{2} = 2.$$

Итак, точка  $D(1;-1;2)$ .

$$\overrightarrow{BD} = (-1;0;1), \overrightarrow{AC} = (-2;4;4).$$

$$\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{BD}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{(-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 4}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 4^2}} =$$

$$= \frac{2+0+4}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{36}} = \frac{6}{\sqrt{2} \cdot 6} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

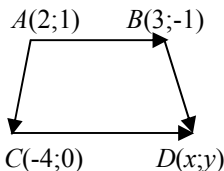
$$(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}) = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Ответ:  $\frac{\pi}{4}$ .

5. Даны три точки  $A(2;1)$ ,  $B(3;-1)$ ,  $C(-4;0)$ , являющиеся вершинами равнобедренной трапеции  $ABCD$ . Найти координаты точки  $D$ , если  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ .

Решение. По условию,  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$  (1).

Находим координаты векторов  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  (рисунок 30):



$\overrightarrow{AB}(1; -2)$ ,  $\overrightarrow{CD}(x+4; y)$ , где  $x$  и  $y$  — координаты точки  $D$ . Из (1) следует, что  $\frac{1}{x+4} = \frac{-2}{y}$  или  $y = -2x - 8$  (2).

Так как трапеция  $ABCD$  равнобедренная, то  $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$  и  $\overrightarrow{AC} \nparallel \overrightarrow{BD}$ .

Найдем векторы  $\overrightarrow{AC} = (-6; -1)$ ,  $\overrightarrow{BD} = (x-3; y+1)$  и воспользуемся тем, что  $\overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{BD}^2$ , имеем  $36 + 1 = (x-3)^2 + (y+1)^2$  или  $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 27$  (3). Решив систему уравнений (2) и (3)

$$\begin{cases} y = -2x - 8 \\ x^2 + y^2 - 6x + 2y = 27 \end{cases}, \text{ получим } \begin{matrix} x_1 = -1,4, & y_1 = -5,2; \\ \text{или } x_2 = -3, & y_2 = -2. \end{matrix}$$

Этим значениям соответствуют два вектора:  $\overrightarrow{BD}(-4,4;-4,2)$  и  $\overrightarrow{BD}(-6;-1)$ . Последний вектор коллинеарен  $\overrightarrow{AC}$  и, значит, не удовлетворяет условию. Итак, получаем ответ:  $D(-1,4;-5,2)$ .

6. Найдите модуль вектора  $\vec{m} = \vec{a} - 2\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 1$ , а угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен  $60^\circ$ .

Решение. Вектор  $\vec{m} = \vec{a} - 2\vec{b}$ ; возведем в квадрат обе части этого равенства

$$\vec{m}^2 = (\vec{a} - 2\vec{b})^2 \text{ или } \vec{m}^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2.$$

Используя свойства скалярного квадрата и определения скалярного произведения векторов, имеем:

$$|\vec{m}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 60^\circ + 4|\vec{b}|^2 = 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 = 4, \text{ итак}$$

$|\vec{m}|^2 = 4$ , откуда следует, что  $|\vec{m}| = 2$ .

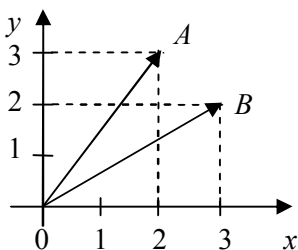
7. Вычислите  $|\vec{a} - \vec{b}|$ , если  $|\vec{a}| = 13$ ,  $|\vec{b}| = 19$ ,  $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$ .

Решение. По определению следует, что  $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} - \vec{b})^2}$ ;  
 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2}$ .

Пусть  $(\vec{a} - \vec{b})^2 = x^2$  или  $a^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = x^2$ , тогда по условию задачи  $\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = 24^2$ , сложим эти равенства, получим  $2\vec{a}^2 + 2\vec{b}^2 = x^2 + 24^2$ , используем свойства скалярного квадрата, т.е.  $2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 = x^2 + 24^2$ . Подставим начальные данные

$$2 \cdot 13^2 + 2 \cdot 19^2 = x^2 + 24^2 \text{ или } x^2 = 2 \cdot 169 + 2 \cdot 361 - 576, \\ x^2 = 484; x = 22, \text{ т.е. } |\vec{a} - \vec{b}| = 22.$$

8. Найдите скалярное произведение векторов, изображенных на рисунке.



Точки  $O(0;0)$ ,  $A(2;3)$ ,  $B(3;2)$ ,  
 вектор  $\vec{OA} = (2;3)$ , вектор  $\vec{OB} = (3;2)$ .  
 Скалярное произведение векторов,  
 заданных своими координатами,  
 вычисляется по формуле  
 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12$ .

9. Дан вектор  $\vec{a}(1;-2;5)$ . Найти координаты вектора  $\vec{b}$ , лежащего в плоскости  $XOY$  и перпендикулярного вектору  $\vec{a}$ , если  $|\vec{b}| = 2\sqrt{5}$ .

Решение. Если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ . Так как вектор  $\vec{b} \in XOY$ , то он имеет координаты  $(x; y; 0)$ . Скалярное

произведение в координатной форме имеет вид  $1 \cdot x + (-2)y = 0$ .

Найдем длину вектора  $\vec{b} = \sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{5}$ .

Получили систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{5} \\ x - 2y = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x = 2y \end{cases} \quad \begin{cases} 5y^2 = 20 \\ x = 2y \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = 4 & y = \pm 2, \\ x = 2y & x = \pm 4. \end{cases}$$

Получили два вектора  $\vec{b}_1 = (4; 2; 0)$  и  $\vec{b}_2 = (-4; -2; 0)$ .

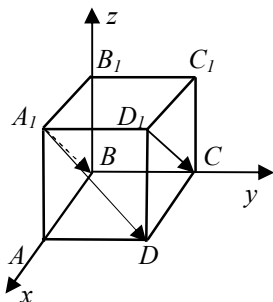
10. Найти угол между скрещивающимися диагоналями смежных граней куба. Найти угол между векторами  $\vec{D_1C}$  и  $\vec{A_1D}$ .

Решение. Пусть длина ребра куба равна  $a$ , тогда вершины куба имеют следующие координаты в системе  $XOYZ$ :

$A(a; 0; 0)$ ,  $A_1(a; 0; a)$ ,  $C(0; a; 0)$ ,  $C_1(0; a; a)$ ,  $B(0; 0; 0)$ ,  $B_1(0; 0; a)$ ,

$D(a; a; 0)$ ,  $D_1(a; a; a)$ .

$\vec{a} = \vec{A_1D} = (a - a, -0 + a, -a + 0) = (0, a, -a)$ .



$\vec{b} = \vec{D_1C} = (0 - a, a - a, 0 - a) = (-a, 0, -a)$ .

Вектор  $\vec{A_1B} = \vec{D_1C}$ , поэтому найдем угол между векторами  $\vec{A_1B}$  и  $\vec{A_1D}$ :

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{A_1B, A_1D}) &= \frac{\vec{A_1D} \cdot \vec{A_1B}}{|\vec{A_1D}| \cdot |\vec{A_1B}|} = \\ &= \frac{0(-a) + a \cdot 0 + (-a)(-a)}{\sqrt{0^2 + a^2 + (-a)^2} \cdot \sqrt{(-a)^2 + 0^2 + (-a)^2}} = \\ &= \frac{a^2}{\sqrt{2a^2} \sqrt{2a^2}} = \frac{a^2}{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\vec{A_1B} \cdot \vec{A_1D} = \arccos \frac{1}{2} = 60^\circ.$$

11. Длины ненулевых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равны. Найти угол между этими векторами, если известно, что векторы  $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b}$  и  $\vec{g} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$  перпендикулярны.

Решение. Так как векторы  $\vec{p}$  и  $\vec{g}$  перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю:

$$\vec{p} \cdot \vec{g} = (\vec{a} + 2\vec{b})(5\vec{a} - 4\vec{b}) = 5|\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 8|\vec{b}|^2.$$

Таким образом,

$$5|\vec{a}|^2 + 6|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) - 8|\vec{b}|^2 = 0, \quad \text{откуда} \quad \text{при} \quad |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

$$\text{получаем} \quad +6|\vec{a}|^2 \cos(\vec{a}, \vec{b}) - 3|\vec{a}|^2 = 0.$$

$$\text{Так как } |\vec{a}| \neq 0, \text{ то сокращая на } |\vec{a}|^2, \text{ находим } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен  $60^\circ$ .

Ответ:  $60^\circ$ .

### ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

1. Найдите скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если:

а)  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 4$ ,  $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$ . Ответ: -6.

б)  $\vec{a} = (5; 7; 4)$ ,  $\vec{b} = (2; 3; -8)$ . Ответ: -1.

в)  $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$ , где  $C(-1; 2; 0)$ ,  $D(2; 1; 3)$ . Ответ: 4.

2. Найдите угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если:

а)  $\vec{a} = (3; 1; -2)$ ,  $\vec{b} = (-2; 3; 4)$ . Ответ:  $\arccos\left(-\frac{11}{\sqrt{406}}\right)$ .

б)  $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{BD}$ , где  $A(1;-2;2)$ ,  $B(1;4;0)$ ,  $C(-4;1;1)$ ,  $D(-5;-5;3)$ . Ответ:  $90^\circ$ .

3. Найдите угол между векторами  $\vec{c} = 4\vec{a} + \vec{b}$  и  $\vec{d} = -\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{7}{4}\vec{b}$ , если  $\vec{a} = (-1;1)$  и  $\vec{b} = (1;3)$ . Ответ:  $45^\circ$ .

4. Покажите, что точки  $A(1;-1;1)$ ,  $B(1;3;1)$ ,  $C(4;3;1)$ ,  $D(4;-1;1)$  являются вершинами прямоугольника.

5. Найдите координаты точек, симметричных  $A(-3;1;2)$  относительно координатных плоскостей  $XOY$ ,  $XOZ$ ,  $YOZ$ .  
 Ответ:  $(-3;1;-2)$ ,  $(-3;-1;2)$ ,  $(3;-1;2)$ .

6. Вектор  $\vec{a}$  образует с осями координат равные острые углы. Определить эти углы. Ответ:  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

7. Найдите  $pr_a \vec{b}$ , если  $\vec{a} = (1;2;-2)$ ,  $\vec{b} = (0;5;2)$ .

8. Длины ненулевых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равны. Найти угол между этими векторами, если известно, что векторы  $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b}$  и  $\vec{g} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$  перпендикулярны. Ответ:  $60^\circ$ .

## §7. Элементы аналитической геометрии.

### 1. Уравнение прямой на плоскости.

а)  $ax + by + c = 0$  – в общем виде; (1)

б) с угловым коэффициентом (при  $b \neq 0$ )

$$y = kx + b \text{ – прямая } l \quad (2)$$

$k = \operatorname{tg} \varphi$  – угловой коэффициент для прямой  $AB$

$$k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}. \quad (3)$$

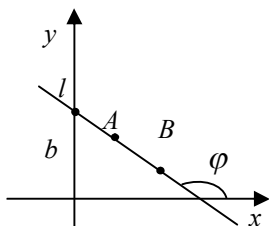


Рисунок 39

### 2. Уравнение плоскости в пространстве

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ – плоскость } \alpha \quad (4)$$

$$\alpha \perp \vec{n} = \{a, b, c\}.$$

Если плоскость проходит через точку  $M(x_0, y_0, z_0)$  и  $\alpha \perp \vec{n}$ , то уравнение плоскости  $\alpha$ :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \quad (5)$$

**Условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости.**

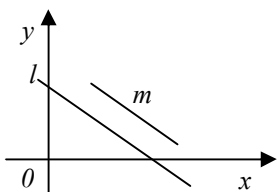


Рисунок 40

$$y = k_1x + b_1 \text{ – прямая } l$$

$$y = k_2x + b_2 \text{ – прямая } m$$

$$l \parallel m \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2. \end{cases} \quad (6)$$

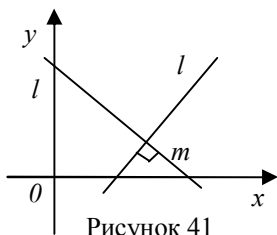


Рисунок 41

$$l \perp m \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1 \quad (7)$$

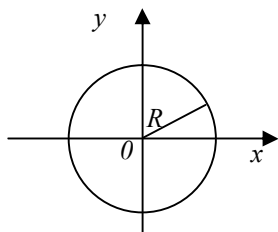


Рисунок 42

**Уравнение окружности.**

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (8)$$

Центр окружности – начало координат.

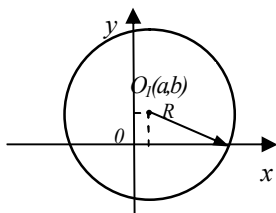


Рисунок 43

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \quad (9)$$

Центр окружности – точка  $O_1(a, b)$ .

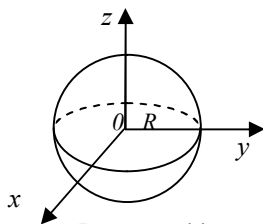


Рисунок 44

**Уравнение сферы.**

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (10)$$

Центр сферы – начало координат.

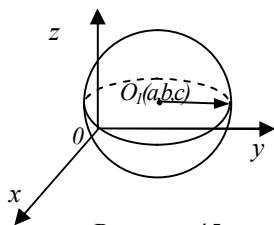


Рисунок 45

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \quad (11)$$

Центр сферы – точка  $O_1(a, b, c)$ .

### Задачи с решениями.

1. Запишите уравнение прямой на плоскости, если эта прямая проходит через:

а) точку  $M(3;-2)$  перпендикулярно вектору  $\overrightarrow{AB}$ , где  $A(3;2)$ ,  $B(-1;5)$ .

Решение.

Найдем координаты вектора  $\overrightarrow{AB} = (-4;3)$ , т.е.  $\vec{n} = (-4;3)$ .  
Используя уравнение (5), имеем

$$-4(x-3) + 3(y+2) = 0 \text{ или}$$

$$-4x + 12 + 3y + 6 = 0, \quad -4x + 3y + 18 = 0.$$

$$4x - 3y - 18 = 0.$$

Ответ:  $4x - 3y - 18 = 0$ .

б) точку  $M(-1;2)$  параллельно прямой  $x - 2y + 3 = 0$ .

Решение. Вектор нормали к данной прямой имеет координаты  $\vec{n} = (1;-2)$  – это коэффициенты при  $x$  и  $y$ . Если данная прямая параллельна искомой прямой, то у них один вектор нормали, поэтому искомая прямая, проходящая через данную точку  $M$  перпендикулярно вектору нормали, имеет вид:

$$1(x+1) - 2(y-2) = 0.$$

$$x + 1 - 2y + 4 = 0 \text{ или } x - 2y + 5 = 0$$

Ответ:  $x - 2y + 5 = 0$ .

2. Запишите уравнение плоскости, если она проходит через точку  $A(1;2;3)$  перпендикулярно вектору  $\overrightarrow{AB}$ , где  $B(4;6;9)$ .

Решение. Найдем координаты вектора  $\overrightarrow{AB}(3;4;6)$ . Он является вектором нормали к плоскости, поэтому уравнение плоскости имеет вид:

$$3(x-1) + 4(y-2) + 6(z-3) = 0,$$

$$3x - 3 + 4y - 8 + 6z - 18 = 0,$$

$$3x + 4y + 6z - 29 = 0.$$

Ответ:  $3x + 4y + 6z - 29 = 0$ .

3. Запишите уравнение сферы, если точки  $A(2;-3;5)$  и  $B(4;1;-3)$  являются концами одного из ее диаметров.

Решение.

Найдем вектор  $\overrightarrow{AB} = (2;4;-8)$ , вычислим его длину  $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-8)^2} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$ .

$|\overrightarrow{AB}|$  является диаметром сферы. Следовательно,  $R = \frac{d}{2} = \sqrt{21}$ .

Найдем координаты середины диаметра, которая является центром сферы.

$$x_{O'} = \frac{2+4}{2} = 3, \quad y_{O'} = \frac{-3+1}{2} = -1, \quad z_{O'} = \frac{5-3}{2} = 1. \text{ Точка } O'$$

центр сферы имеет координаты  $O'(3;-1;1)$ .

Тогда сфера имеет уравнение

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = (\sqrt{21})^2 = 21.$$

Ответ:  $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 21$ .

4. Определите координаты центра сферы и ее радиус, если сфера задана уравнением  $x^2 + y^2 + z^2 + 20y = 0$ .

Решение.

Выделим полный квадрат относительно переменной  $y$

$$x^2 + (y^2 + 20y) + z^2 = 0.$$

$$x^2 + (y^2 + 2 \cdot 10 \cdot y + 100) - 100 + z^2 = 0.$$

$$x^2 + (y+10)^2 + z^2 = 100.$$

Центр сферы имеет координаты  $O'(0;-10;0)$  и радиус  $R = 10$ .

**КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1**  
**«Векторы. Решение геометрических задач с помощью векторов»**

1.  $OABC$  - тетраэдр,  $\overrightarrow{AM}$  - медиана грани  $ABC$ . Разложить вектор  $\overrightarrow{AM}$  по векторам  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OC}$ .

Ответ:  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OA})$ .

2. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  неколлинеарны. Найти числа  $x$  и  $y$ , если векторы  $x\vec{a} + y\vec{b}$  и  $(y+1)\vec{a} + (2-x)\vec{b}$  равны.

Ответ:  $x = \frac{3}{2}$ ,  $y = \frac{1}{2}$ .

3. Определить при каких  $x$  и  $y$  вектор  $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + y\vec{k}$  коллинеарен вектору  $\vec{b} = x\vec{i} - b\vec{j} + 2\vec{k}$ .

Ответ:  $x = 4$ ,  $y = -1$ .

4. Определить длины векторов  $\vec{a} + \vec{b}$  и  $\vec{a} - \vec{b}$ , если  $\vec{a} = (3; -5; 8)$  и  $\vec{b} = (-1; 1; -4)$ .

Ответ:  $|\vec{a} + \vec{b}| = 6$ ,  $|\vec{a} - \vec{b}| = 14$ .

5. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = (1; 2)$  и  $\vec{b} = (2; -1)$ .

Ответ:  $90^\circ$ .

6. Вычислить скалярное произведение векторов  $4\vec{a} - \vec{b}$  и  $2\vec{a} + 3\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$  и угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен  $120^\circ$ .

Ответ: -25.

7. Найти  $(6\vec{e}_1 + \vec{e}_2)(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2)$ , если угол между единичными векторами  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$  равен  $60^\circ$ .

Ответ:  $-\frac{3}{2}$ .

8. Найти координаты вектора  $\vec{b}$ , коллинеарного вектору  $\vec{a} = (-1; 2)$ , если  $|\vec{b}| = \sqrt{10}$ .

Ответ:  $\pm(\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$ .

9. Найти, при каком  $m$  вектор  $\vec{a} = (m; 7; -2)$  перпендикулярен вектору  $\vec{b}(-3; m; 2)$ .

Ответ: 1.

10. Найти расстояние от точки  $M(-2; 0; 1)$  до середины отрезка  $AB$ , если  $A(2; -1; 0)$  и  $B(-2; 3; 2)$ .

Ответ:  $\sqrt{5}$ .

11. Даны  $A(-1; 3; -7)$ ,  $B(2; -1; 5)$ ,  $C(0; 1; -5)$ . Найти  $|\vec{AB}|$  и  $(2\vec{AB} - \vec{CB})(2\vec{BC} + \vec{BA})$ .

Ответ: 13; -524.

12. Вычислите внутренние углы треугольника  $ABC$ , где  $A(1; 2; 1)$ ,  $B(3; -1; 7)$ ,  $C(7; 4; -2)$ . Является ли этот треугольник равнобедренным?

Ответ:  $\arccos \frac{61}{7\sqrt{122}}$ ,  $\arccos \frac{61}{7\sqrt{122}}$ ,  $\arccos \left(-\frac{12}{49}\right)$ .

Треугольник равнобедренный.

13. Известны вершины  $\triangle ABC$ :  $A(2; -3; 0)$ ,  $B(2; -1; 1)$ ,  $C(0; 1; 4)$ . Найдите угол между медианой  $\vec{BD}$  и основанием  $AC$ .

Ответ:  $\frac{\pi}{4}$ .

14. Запишите уравнение сферы с центром в точке  $A(1; 2; 3)$  и радиусом  $R = 4$ .

Ответ:  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4^2$ .

15. Боковое ребро правильной треугольной призмы равно стороне основания. Найти угол между стороной основания и непересекающей ее диагональю боковой грани.

Ответ:  $\arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$ .

**Тест № 1. «Векторы. Метод координат при решении геометрических задач»**

1. Даны точки  $A(1;2;-3)$ ,  $B(3;-3;0)$ ,  $C(0;-3;4)$  и  $D(2;-8;7)$ .  
Найдите разность векторов  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$ .

А)  $(0;0;0)$ . Б)  $(4;-6;6)$ . В)  $(4;0;0)$ . Г)  $(-4;6;-6)$ . Д)  $(0;-6;6)$ .

2. При каких  $n$  вектора  $\vec{a}(n;-2;3)$  и  $\vec{b}(n;n;-1)$  перпендикулярны? В ответ запишите произведение всех полученных  $n$ .

А) -3. Б) 3. В) 1. Г) 4. Д) 2.

3. Круг с центром в точке  $O(-1;3)$  проходит через точку  $A(2;-2)$ . Найдите радиус данного круга.

А)  $\sqrt{20}$ . Б) 4. В)  $\sqrt{34}$ . Г) 2. Д) Другой ответ.

4. Укажите точку, которая отстоит от начала координат на 3 единицы.

А)  $(2;2;2)$ . Б)  $(1;1;1)$ . В)  $(0;0;2)$ . Г)  $(2;2;1)$ . Д)  $(0;0;-2)$ .

5. Точки  $A$  и  $B$  заданы координатами. Укажите случай, когда середина отрезка  $AB$  лежит на плоскости  $XOY$ .

А)  $A(1;2;4)$ ; Б)  $A(2;5;6)$ ; В)  $A(0;6;-8)$ ; Г)  $A(10;-12;0)$ ;  
 $B(3;2;-4)$ .  $B(2;3;2)$ .  $B(2;0;4)$ .  $B(0;12;4)$ .

Д)  $A(2;2;5)$ ;  
 $B(-2;-2;3)$ .

6. Определите расстояние от вершины  $A$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  до плоскости  $BDD_1 B_1$ , если ребро куба равно  $6\sqrt{2}$  см.

А) 7 см. Б) 4 см. В) 6 см. Г) 12 см. Д)  $6\sqrt{2}$  см.

7. Укажите уравнение окружности с центром в точке  $A(5;0)$  и радиусом 3:

А)  $(x+5)^2 + y^2 = 9$ . Б)  $(x-5)^2 + y^2 = 9$ . В)  $(x+5)^2 + y^2 = 3$ .  
Г)  $x^2 + (y-5)^2 = 9$ . Д)  $x^2 + (y+5)^2 = 9$ .

8. Даны плоскость  $\alpha$  и точка  $A$ , которая не принадлежит плоскости  $\alpha$ . Геометрическое место середин отрезков, которые соединяют точку  $A$  с точками плоскости  $\alpha$ , – это:

- А) Точка. Б) Отрезок. В) Прямая. Г) Плоскость.  
Д) Многоугольник.

9. Даны четыре точки:  $A(0;1;1)$ ,  $B(1;1;2)$ ,  $C(0;-2;2)$ ,  $D(2;-3;1)$ . Найдите градусную меру угла между векторами  $\overrightarrow{BC}$  и  $\overrightarrow{AD}$ .

- А)  $30^\circ$ . Б)  $60^\circ$ . В)  $-45^\circ$ . Г)  $45^\circ$ . Д) Другой ответ.

10. Какая из приведенных точек удалена от оси  $OY$  на расстояние 10?

- А)  $(4;3;4)$ . Б)  $(8;1;-6)$ . В)  $(7;0;7)$ . Г)  $(1;1;10)$ . Д)  $(0;10;0)$ .

11. Даны векторы  $\vec{a}(3;0;-3)$ ,  $\vec{b}(4;2;-4)$ . Найдите вектор  $\vec{S} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ .

- А)  $(2;-3;1)$ . Б)  $(-3;1;3)$ . В)  $(3;1;-3)$ . Г)  $(3;1;2)$ . Д)  $(3;1;-2)$ .

12. Дан треугольник  $ABC$ . Найдите внешний угол при вершине  $B$ , если  $B(2;-1;-1)$ ,  $A(2;2;-4)$  и  $C(3;-1;-2)$ . Выразите его градусную меру.

- А)  $120^\circ$ . Б)  $100^\circ$ . В)  $130^\circ$ . Г)  $90^\circ$ . Д)  $150^\circ$ .

13. Центр какой из окружностей, уравнения которых приведены, принадлежит оси абсцисс?

- А)  $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 2$ . Б)  $(x+4)^2 + (y+4)^2 = 2$ .

- В)  $(x-4)^2 + y^2 = 2$ . Г)  $x^2 + (y-4)^2 = 2$ .

14. Точка  $M$  – середина отрезка  $AB$ ,  $A(-3;2;-6)$ ,  $M(1;-5;2)$ . Найдите координаты точки  $B$ .

- А)  $B(-7;9;-14)$ . Б)  $B(5;-12;10)$ . В)  $B(-1;-1,5;-2)$ . Г)  $B(-1;-8;-2)$ .

15. При каком значении  $k$  векторы  $\vec{m}(2;-3;k)$  и  $\vec{n}(k;4;2)$  перпендикулярны?

- А) 3. Б) -3. В) 4. Г) -4.

16. Даны точки  $M(-1;4;3)$ ,  $N(-2;5;-2)$ ,  $K(3;-4;6)$ ,  $F(2;-3;1)$ . Какое из утверждений верно?

А)  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{FK}$ . Б)  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{KF}$ . В)  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FK}$ . Г)  $\overrightarrow{MN} = -2\overrightarrow{FK}$ .

17. Найдите координаты вектора  $\vec{b}$ , если  $\vec{b} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$ , где  $\vec{e}_1(1;0;0)$ ,  $\vec{e}_2(0;1;0)$ ,  $\vec{e}_3(0;0;1)$ .

А)  $\vec{b}(2;-1;3)$ . Б)  $\vec{b}(1;1;1)$ . В)  $\vec{b}(0;0;0)$ . Г)  $\vec{b}(2;1;-3)$ .

18. Даны скрещивающиеся прямые  $a$  и  $b$ . Сколько существует плоскостей, проходящих через прямую  $a$  и параллельных прямой  $b$ ?

А) Одна. Б) Две. В) Бесконечно много. Г) Ни одной.

19. Относительно какой из данных точек симметричны точки  $C(3;5;6)$  и  $D(-1;-3;4)$ ?

А)  $M(2;2;10)$ . Б)  $N(-2;4;-1)$ . В)  $K(4;8;2)$ . Г)  $P(1;1;5)$ .

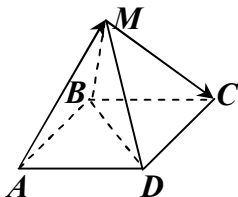
20. Найдите сумму векторов  $\overrightarrow{MN}$  и  $\overrightarrow{NK}$ , если  $M(4;-3;2)$ ,  $K(2;1;-1)$ ,  $N$  - произвольная точка пространства.

А)  $(-2;4;-3)$ . Б)  $(6;-2;1)$ . В)  $(3;-1;0,5)$ . Г) Найдти невозможно.

21. Найдите координаты вектора  $\vec{g} = 3\vec{m} + \frac{1}{4}\vec{n}$ , если  $\vec{m}(-1;2;-0,5)$ ,  $\vec{n}(8;-4;2)$ .

А)  $\vec{g}(1;1;0)$ . Б)  $\vec{g}(-5;7;-2)$ . В)  $\vec{g}(-1;5;-1)$ . Г)  $\vec{g}(5;2;0,5)$ .

22. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды  $MABCD$ , изображенной на рисунке, равна 2.



Чему равен модуль суммы  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}$ ?

А) 1. Б)  $\sqrt{2}$ . В) 2. Г)  $2\sqrt{2}$ .

Рисунок – К задаче 22

23. Найдите координаты начала вектора  $\overline{EF}$ , если  $\overline{EF}(0;-3;6)$ ,  $F(3;3;3)$ .

А)  $E(-3;0;3)$ . Б)  $E(3;0;3)$ . В)  $E(3;6;-3)$ . Г)  $E(-3;-6;3)$ .

24. Найдите расстояние от точки  $A(2;3;-6)$  до координатной плоскости  $XOY$ .

А) -6. Б) 2. В) 3. Г) 6. Д) 7.

25. Найдите угол между векторами  $\vec{a} - \vec{b}$  и  $\vec{c}$  в градусах, если известно, что  $\vec{a}(3;5;-4)$ ,  $\vec{b}(-2;5;-4)$  и  $\vec{c}(0;0;2)$ .

А)  $90^\circ$ . Б)  $60^\circ$ . В)  $45^\circ$ . Г)  $120^\circ$ . Д)  $30^\circ$ .

### Ответы к тестам

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| А  | А  | В  | Г  | А  | В  | Б  | Г  | Г  | Б  | В  | А  | В  | Б  | А  |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |    |    |    |    |    |
| Б  | Г  | А  | Г  | А  | В  | Г  | В  | Г  | А  |    |    |    |    |    |

***Библиографический список использованной литературы***

1. Солодовников А.С. Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии / А.С. Солодовников, Г.А. Торопова. – М.: Высш. шк., 1987. – С.5-43.
2. Гальперина А.Р. Математика. Типовые тестовые задания / А.Р. Гальперина, Е.Я. Михеева. – Х: Факт, 2008. – 128 с.
3. Сборник заданий для государственной итоговой аттестации по математике. Книга 1 / М.И. Бурда [и др.] – Х.: Гимназия, 2008. – 224 с.
4. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы: учеб. пособие / Под ред. Сканава М.И. – 5-е изд., дополн. – М.: Высш. шк., 1988. – 357 с.
5. Математика. Сборник задач с решениями для поступающих в вузы / Под. ред. В.М. Говорова, Н.В. Мирошина. – М.: Астрель, 2006. – С. 554 – 607.

Заказ № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 2010 г. Тираж \_\_\_\_\_ экз.  
Изд-во СевНТУ