

Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный технический университет

РЯДЫ ФУРЬЕ И ПРАКТИЧЕСКИЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Методические указания
для самостоятельной работы
по дисциплине
„Высшая математика”
студентов экономических специальностей
дневной формы обучения

Севастополь
2010

УДК 51(075)

Ряды Фурье и практический гармонический анализ. Методические указания для самостоятельной работы студентов экономических специальностей по высшей математике / Сост. Н.Г. Плаксина. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2010. – 60 с.

Целью методических указаний является помощь студенту при изучении темы «Ряды. Ряды Фурье». Данная работа содержит краткие сведения по теории, задачи для самопроверки, а также 30 вариантов задач, которые можно использовать для домашних заданий и модульного контроля.

Методические указания предназначены для студентов дневной формы обучения экономических специальностей.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры «Высшая математика» 30.03.2010 г., протокол № 5.

Допущено учебно-методическим центром и научно-методическим советом СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: Деркач М.И., доцент кафедры высшей математики

СОДЕРЖАНИЕ

1. Основные понятия и определения	4
2. Геометрический ряд	6
3. Остаток числового ряда.....	8
4. Простейшие свойства сходящихся числовых рядов	9
5. Достаточные признаки сходимости для рядов с положительными членами	10
6. Сходимость знакопередающихся рядов	17
7. Степенные ряды и их области сходимости.....	20
8. Разложение функций в степенные ряды. Ряд Маклорена.....	23
9. Тригонометрические ряды	24
10. Ряды Фурье	26
11. Ряд Фурье для четных и нечетных функций	30
12. Ряд Фурье для функции, заданной на половине периода.....	33
13. Практический гармонический анализ.....	35
14. Задания для самостоятельной работы.....	36
Библиографический список.....	59

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим числовую последовательность $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$.

Образованный из этих чисел символ $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

называется числовым рядом, а сами числа – членами ряда: u_1 – первым членом, u_2 – вторым членом, $\dots u_n$ – n -ым членом (или общим членом). Зная формулу для общего члена u_n , можно, давая n значения $n=1, n=2, \dots$, определить (найти) любой член ряда.

Пример 1. Записать числовой ряд, используя формулу общего члена $u_n = \frac{n}{n^2 + 1}$.

Решение

При $n=1$ имеем $u_1 = \frac{1}{1^2 + 1}$; при $n=2$ – $u_2 = \frac{2}{2^2 + 1}$;

при $n=3$ – $u_3 = \frac{3}{3^2 + 1}$ и т.д.

Получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1} = \frac{1}{1^2 + 1} + \frac{2}{2^2 + 1} + \frac{3}{3^2 + 1} + \dots$

Пример 2. Найти общие члены рядов:

$$1. 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots; u_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$2. \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots; u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

$$3. \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \dots; u_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1}}.$$

Суммы $S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, \dots, S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \dots$

называются частичными суммами.

Конечный или бесконечный предел S частичной суммы S_n , составленной для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, при $n \rightarrow \infty : S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, называется суммой ряда и записывается $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Если ряд имеет конечную сумму, его называют сходящимся, в противном же случае, т.е. когда сумма равна $\pm \infty$ или же сумма вообще не существует, ряд называется расходящимся.

Пример 3. Доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ и найти его сумму.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} + \dots$$

Решение

Общий член ряда разложим на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right).$$

Затем, пользуясь этой формулой, определим члены ряда:

$$u_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right)$$

$$u_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right)$$

$$u_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$u_{n-2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right)$$

$$u_{n-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$u_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right).$$

Вычислим n -ую частичную сумму S_n :

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right). \end{aligned}$$

Найдем сумму ряда

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$$

Ряд имеет конечную сумму, следовательно, он сходится.

Задание для самостоятельной работы.

1. Записать числовой ряд, пользуясь формулой его общего

члена $u_n = \frac{3n}{2n+3}.$

2. Найти общие члены рядов

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{4}} + \frac{5}{\sqrt{6}} + \dots$$

3. Доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ и найти его сумму.

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД

Исследуем сходимость геометрического ряда, т.е. ряда, составленного из членов бесконечной геометрической прогрессии.

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, \text{ где } a - \text{первый член,}$$

а q – знаменатель прогрессии.

Необходимо установить, при каких значениях q ряд сходится, а при каких – расходится. Из школьного курса известно, что сумма n членов геометрической прогрессии, т.е.

n -ая частичная сумма ряда при $q \neq 1$ равна $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$.

Рассмотрим случаи:

1. $|q| < 1$, $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q}$, т.е. ряд сходится и его

сумма $S = \frac{a}{1-q}$.

2. $|q| > 1$, $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \infty$, т.е. ряд расходится.

3. $q = 1$, $a + a + a + \dots + a \dots$, $S_n = n \cdot a$;

$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a = \infty$, т.е. ряд расходится.

4. $q = -1$, $a - a + a - a + \dots = \begin{cases} a & \text{при } n - \text{нечетном,} \\ 0 & \text{при } n - \text{четном.} \end{cases}$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует и ряд расходится. Таким

образом, геометрический ряд сходится при $|q| < 1$ и его сумма

$S = \frac{a}{1-q}$. В случаях, когда $|q| \geq 1$, ряд расходится и суммы не

имеет.

Пример 1. Найти сумму ряда $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots$

Решение

Данный ряд – геометрический, $a = 1$, $q = -\frac{1}{3}$. Выполняется

условие $|q| < 1$. Значит, ряд сходится и его сумма $S = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{3})} = \frac{3}{4}$.

Пример 2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+5^n}{10^n}$.

Решение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+5^n}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10^n} + \frac{5^n}{10^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$ – геометрический, $a = \frac{1}{10}$; $q = \frac{1}{10}$.

Выполняется условие $|q| < 1$. Значит, ряд сходится и его сумма $S_1 = \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{9}$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ также сходится, так как является геометрическим $\left(q = \frac{1}{2}\right)$ и выполняется условие $|q| < 1$. Его сумма $S_2 = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$.

Вычислим сумму данного ряда: $S = S_1 + S_2 = \frac{1}{9} + 1 = \frac{10}{9}$.

Задание для самостоятельной работы.

Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n}$.

3. ОСТАТОК ЧИСЛОВОГО РЯДА

Если в ряде $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ отбросить первые n членов, то получится ряд $r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$, который называется остатком ряда после n -го члена.

Можно доказать, что если сходится ряд, то сходится и его остаток и, наоборот, если сходится остаток ряда, то сходится и сам ряд. Тогда $S = S_n + r_n$ для сходящегося ряда. Другими словами, факт сходимости или расходимости числового ряда не изменится при добавлении к нему или выбрасыванием из него конечного числа слагаемых.

4. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА СХОДЯЩИХСЯ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

1. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и имеет сумму S , то сходится ряд, полученный путем почленного умножения членов данного ряда на действительное число k , и его сумма равна kS .

2. Если сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ и имеют суммы, соответственно равные S_1 и S_2 , то сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ и его сумма равна $S_1 \pm S_2$.

3. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. (Необходимый признак сходимости числового ряда).

Необходимость его заключается в том, что ряд, для которого $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, расходится.

Пример. Проверить для данных рядов выполнение необходимого признака сходимости:

$$1. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \frac{1}{2} \neq 0. \quad \text{Необходимый}$$

признак не выполняется. Значит, ряд расходится.

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n+1}{n} = \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \right) = \ln 1 = 0.$$

Необходимый признак сходимости выполняется, но выводы однозначно пока сделать нельзя. Вычислим

$$S_n = \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \dots + \ln \frac{n+1}{n} = \ln \frac{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} = \ln(n+1).$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty, \text{ значит, ряд расходится.}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots - \text{гармонический ряд.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \text{ необходимый признак выполняется, но можно}$$

доказать, что гармонический ряд тем не менее расходится.

Задание для самостоятельной работы.

С помощью необходимого признака сходимости (достаточного признака расходимости) доказать расходимость

$$\text{рядов: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{7n+1}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin \frac{\pi}{n}.$$

5. ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ДЛЯ РЯДОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Предположим, что все члены ряда положительны. Рассмотрим достаточные признаки для таких рядов.

Признак Даламбера.

Если существует при $n \rightarrow \infty$ предел отношения последующего члена ряда к предыдущему $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ и этот предел

меньше единицы, то ряд сходится. Если же предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$,

то ряд расходится. Если предел равен 1, то требуются дополнительные исследования.

Замечание 1. Ряд будет расходиться, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$.

Замечание 2. Для того, чтобы из выражения u_n общего члена ряда получить u_{n+1} , надо в формуле для определения u_n заменить n на $n+1$.

Замечание 3. Признак Даламбера применяется в тех случаях, когда u_n содержит показательную функцию a^n , факториал $n!$ и произведение переменного числа сомножителей.

Пример 1. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.

Решение $u_n = \frac{n}{3^n}$; $u_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 3^n}{3^{n+1} \cdot n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3^n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{1}{3} < 1.$$

Значит, по признаку Даламбера ряд сходится.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда $\sum \frac{n^n}{n!}$.

Решение $u_n = \frac{n^n}{n!}$; $u_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{n!}}{\frac{n^n}{n!}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{n! \cdot (n+1) n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = (1^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e > 1. \text{ Значит, ряд расходится.} \end{aligned}$$

Пример 3. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot \sqrt{n}}.$$

Решение

$$u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot \sqrt{n}}; \quad u_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1)}{2^{n+1} \cdot \sqrt{n+1}}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1)}{2^{n+1} \sqrt{n+1}}}{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot \sqrt{n}}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1) \cdot 2^n \cdot \sqrt{n}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot 2^{n+1} \cdot \sqrt{n+1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1) \cdot 2^n \cdot \sqrt{n}}{2^n \cdot 2 \sqrt{n+1}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1) \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1) = \infty. \end{aligned}$$

Ряд расходится.

Задание для самостоятельной работы.

Исследовать сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 2^n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \cdot n!}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}{\sqrt{n}}.$$

Интегральный признак Коши.

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, члены которого положительны и не возрастают, а функция $f(x)$, определенная при $x \geq 1$, непрерывная и невозрастающая, и $f(1) = u_1$, $f(2) = u_2, \dots$, $f(n) = u_n, \dots$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится или расходится одновременно с интегралом $\int_1^{\infty} f(x) dx$.

Замечание. Интегральный признак Коши используется в том случае, если несобственный интеграл от общего члена ряда вычисляется несложно.

Пример 1. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Решение

$$u_n = \frac{1}{n^p} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^p}. \quad J = \int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_1^{\infty} x^{-p} dx = \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^{\infty}.$$

$$1) \quad p > 1, \quad J = \left(\left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^{\infty} \right) = 0 - \frac{1}{-p+1} = \frac{1}{p-1} - \text{число, значит,}$$

несобственный интеграл сходится. Следовательно, и данный ряд сходится.

$$2) \quad p < 1, \quad J = \left(\left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^{\infty} \right) = \infty - \frac{1}{-p+1} = \infty, \quad \text{интеграл и}$$

данный ряд одновременно расходятся.

$$3) \quad p = 1, \quad J = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_1^{\infty} = \infty, \quad \text{интеграл и данный ряд}$$

одновременно расходятся.

$$\text{Итак, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{сходится, если } p > 1, \\ \text{расходится, если } p \leq 1. \end{cases}$$

Называется рассмотренный ряд обобщенным гармоническим.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

$$\text{Решение} \quad u_n = \frac{1}{n \ln n} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x \ln x}.$$

$$\text{Вычислим } \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \ln|\ln x| \Big|_2^{\infty} = \infty. \quad \text{Значит, данный ряд,}$$

также как и несобственный интеграл, расходится.

Задание для самостоятельной работы.

Исследовать сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}.$$

Признак сравнения.

Пусть даны положительные ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, причем при любом n $u_n \leq v_n$. Тогда: если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$; если расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Замечание 1. Так как сходимость ряда не изменяется при выбрасывании конечного числа членов ряда, то условие $u_n \leq v_n$ не обязательно должно выполняться с первых членов ряда и только для членов с одинаковыми номерами. Достаточно, чтобы оно выполнялось, начиная с некоторого номера $n = k$, или чтобы имело место неравенство $u_n \leq v_{m+n}$, где m – некоторое целое число.

Замечание 2. Для сравнения используются «эталонные ряды»:

1) геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ – сходится при $|q| < 1$,
расходится при $|q| \geq 1$;

2) обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{сходится, если } p > 1, \\ \text{расходится, если } p \leq 1. \end{cases}$$

Пример 1. Исследовать сходимость ряда

$$1 + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4^2} + \dots + \frac{1}{n \cdot 4^{n-1}} + \dots$$

Решение

Сравним данный ряд с геометрическим рядом

$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} + \dots$, который сходится, так как $q = \frac{1}{4} < 1$.

Члены данного ряда, начиная со второго, меньше соответствующих членов сходящегося геометрического ряда:

$\frac{1}{2 \cdot 4} < \frac{1}{4}$; $\frac{1}{3 \cdot 4^2} < \frac{1}{4^2}$; $\dots$ $\frac{1}{n \cdot 4^{n-1}} < \frac{1}{4^{n-1}}$, $\dots$. Поэтому данный ряд также сходится на основании признака сравнения.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$.

Решение

Сравним данный ряд с расходящимся гармоническим рядом $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$, отбросив его первый член.

$$\frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1}} > \frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 2}} > \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} > \frac{1}{n}; \dots$$

По признаку сравнения данный ряд расходится, так как его члены больше соответствующих членов гармонического ряда.

Трудность применения признака сравнения заключается в том, что необходимо подобрать «эталонный» ряд, а затем убедиться в выполнении неравенства из признака: $u_n \leq v_n$. Поэтому полезным очень часто оказывается предельный признак сравнения.

Теорема. Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – ряды с положительными членами и существует конечный $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k \neq 0$, то ряды одновременно сходятся или расходятся.

Пример 1. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n+2}$.

Решение

Так как $\operatorname{tg} \frac{\pi}{n+2} \sim \frac{\pi}{n+2}$ при $n \rightarrow \infty$, то сравним данный ряд

с рядом $\pi \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n+2} + \dots \right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n+2}.$

Вычислим $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n+2}}{\frac{\pi}{n+2}} = \left(\frac{0}{0} \right) = 1 \neq 0.$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ расходится, то расходится ряд

$\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2},$ а, следовательно, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n+2}.$

Пример 2. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 5}{4n^4 - 3n + 1}.$

Решение

Сравним данный ряд со сходящимся обобщенным гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (при $n \rightarrow \infty \frac{n^2 + 5}{4n^4 - 3n + 1} \sim \frac{1}{4n^2}$).

Вычислим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2 + 5}{4n^4 - 3n + 1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n^2 + 5)}{4n^4 - 3n + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \frac{1}{4} \neq 0.$$

Поэтому согласно предельному признаку сравнения данный ряд сходится.

Задание для самостоятельной работы.

Исследовать сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}}.$$

6. СХОДИМОСТЬ ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИХСЯ РЯДОВ

Пусть члены числового ряда имеют разные знаки. Числовой ряд называется знакопеременным, если его два любых соседних члена имеют противоположные знаки.

$\pm(u_1 - u_2 + u_3 - \dots + (-1)^{n-1} u_n \dots)$, где $u_n > 0$ и u_n – общий член ряда.

Для таких рядов справедлива теорема Лейбница и следствие из нее.

Признак Лейбница. Если члены знакопеременного ряда убывают по абсолютной величине $u_1 > u_2 > \dots > u_n > \dots$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, то ряд сходится и его сумма S по абсолютной величине не превосходит абсолютной величины первого члена: $|S| \leq |u_1|$.

Следствие. Остаток знакопеременного ряда по абсолютной величине не превосходит абсолютной величины первого отбрасываемого члена ряда, т.е. $|r_n| < |u_{n+1}|$, где u_{n+1} – первый отброшенный член ряда или первый член остатка r_n .

Таким образом, признак Лейбница позволяет не только установить сходимость знакопеременного ряда, но и оценить ошибку, которая возникает при отбрасывании некоторого количества членов ряда.

Если среди членов ряда есть как положительные, так и отрицательные, то ряд называется знакопеременным.

Приведем теорему, которая называется достаточным признаком сходимости знакопеременного ряда и, следовательно, в полной мере относится к знакопеременным рядам.

Теорема. Если ряд, составленный из абсолютных величин членов знакопеременного ряда сходится, то сходится и знакопеременный ряд. Обратное утверждение неверно. Поэтому рассмотрим следующие определения.

Определение 1. Ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится как сам ряд, так и ряд, составленный из абсолютных величин его членов.

Определение 2. Ряд называется условно сходящимся, если сам ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Различие между абсолютно и условно сходящимися рядами заключается в том, что абсолютно сходящиеся ряды сходятся в основном в силу того, что их члены быстро убывают, а условно сходящиеся – в результате того, что положительные и отрицательные слагаемые уничтожают друг друга.

Пример 1. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$.

Решение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots$$

Применим к данному ряду признак Лейбница:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{4}} > \dots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0 \end{array} \right] \text{ – ряд сходится, так как признак Лейбница}$$

выполняется.

Определим, как он сходится, условно или абсолютно. Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}.$$

Полученный ряд расходится, так как он является обобщенным гармоническим при $p = \frac{1}{2} < 1$.

Значит, данный ряд сходится условно.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2 + 4}$.

Решение

Применим к данному ряду признак Лейбница.

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{1^2+4} + \frac{2}{2^2+4} - \frac{3}{3^2+4} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2+4} + \dots \\
 & \left. \begin{aligned}
 & \frac{1}{1^2+4} > \frac{2}{2^2+4} > \frac{3}{3^2+4} > \dots \\
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+4} = 0
 \end{aligned} \right] \quad - \text{ ряд сходится по признаку}
 \end{aligned}$$

Лейбница.

Определим, как сходится ряд, условно или абсолютно. Составим ряд из абсолютных величин членов знакочередующегося ряда.

$$\frac{1}{1^2+4} + \frac{2}{2^2+4} + \frac{3}{3^2+4} + \dots + \frac{n}{n^2+4} + \dots$$

Применим к нему интегральный признак Коши. Вычислим несобственный интеграл $\int_1^{\infty} \frac{x dx}{x^2+4} = \frac{1}{2} \ln|x^2+4| \Big|_1^{\infty} = \infty$, т.е. несобственный интеграл расходится. Значит, и ряд расходится. Поэтому данный ряд сходится условно.

Пример 3. Оценить остаток ряда после пятого члена:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Решение

На основании следствия из признака Лейбница $|r_5| < |u_6|$.

$$\left| \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \dots \right| < \frac{1}{11}.$$

Пример 4. Вычислить сумму ряда с точностью до 0,01:

$$1 - \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5^2} - \frac{1}{4 \cdot 5^3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 5^{n-1}} + \dots$$

Решение

Ранее получили, что сумма ряда $S = S_n + r_n$. $|r_n| < |u_{n+1}|$ и

$$|r_n| = |S - S_n|.$$

Оценим каждый член ряда и найдем тот, который по абсолютной величине меньше 0,01. Таким будет

$$|u_4| = \frac{1}{4 \cdot 5^3} = \frac{1}{500} = 0,002 < 0,01.$$

$$\text{Значит, } S \approx S_3; \quad S \approx 1 - \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5^2} = \frac{137}{150} \approx 0,913 \approx 0,91.$$

Поэтому $S \approx 0,91$.

Задание для самостоятельной работы.

Для следующих знакочередующихся рядов установить, сходятся они абсолютно или условно:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n^2 + n - 1)}{n^3 - n + n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^4 + 4}.$$

7. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ И ИХ ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ

Теперь будем рассматривать ряды, членами которых будут степенные функции $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$, где $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ — постоянные числа, называемые коэффициентами ряда. c_0 — нулевой член ряда, $c_n x^n$ — n -ый или общий член ряда. Сокращенная запись степенного ряда: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

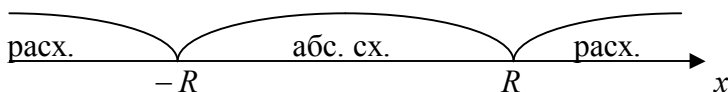
Значение x , при котором степенной ряд сходится, называется точкой сходимости степенного ряда. Совокупность точек сходимости называется областью сходимости степенного ряда, которая представляет собой интервал на числовой оси.

Для степенного ряда выполняется следующая теорема.

Теорема Абеля. Если степенной ряд сходится при $x = x_0 (x_0 \neq 0)$, то он абсолютно сходится и при всех x , удовлетворяющих неравенству: $|x| < |x_0|$. Если степенной ряд

расходится при $x = x_1$, то он расходится для всех x , удовлетворяющих неравенству: $|x| > |x_1|$.

Из этой теоремы следует, что существует интервал, симметричный относительно точки O , внутри которого степенной ряд абсолютно сходится, а вне – расходится.



Число R называется радиусом сходимости, а интервал $(-R; R)$ – интервалом сходимости. На концах интервала, т.е. в точке R и в точке $(-R)$, ряд может как сходиться, так и расходиться. Для радиуса сходимости существует формула

$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$. Для некоторых рядов интервал сходимости вырождается в точку ($R = 0$), у других охватывает всю ось Ox ($R = \infty$).

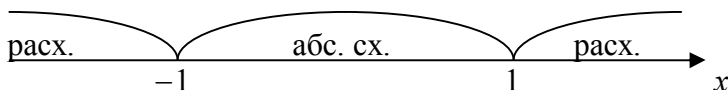
Пример 1. Найти интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.

Решение

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

Вычисляем
$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1; \quad (-1; 1) -$$

интервал сходимости.



$$x = -1, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{расходится, так как является}$$

гармоническим рядом.

$$x = +1, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$$

Применим признак Лейбница:

$$\left. \begin{array}{l} 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \end{array} \right\} - \text{ряд сходится.}$$

Вывод: ряд сходится в интервале $(-1; 1]$.

Пример 2. Найти интервал сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n = x + 2!x^2 + 3!x^3 + \dots + n!x^n + \dots$$

Решение

Вычислим

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n!}{n!(n+1)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Вывод: ряд сходится только в точке $x = 0$.

Пример 3. Найти интервал сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!} + \dots$$

Решение

Вычислим

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(2n-1)(2n-1)!}}{\frac{1}{(2n+1)(2n+1)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n+1)(2n+1)!}{(2n-1)(2n-1)!} \right| =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{(2n-1)!(2n)(2n+1)}{(2n-1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n(2n+1) = \infty.$$

Вывод: ряд сходится на всей числовой оси $(-\infty; +\infty)$.

Задание для самостоятельной работы.

Определить радиусы сходимости степенных рядов и исследовать поведение рядов на концах интервалов сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

В заключение отметим свойства степенных рядов:

1. Сумма степенного ряда представляет собой в интервале сходимости непрерывную функцию.
2. Степенной ряд в интервале сходимости можно почленно дифференцировать бесконечное число раз.
3. Степенной ряд в интервале сходимости можно почленно интегрировать.

8. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. РЯД МАКЛОРЕНА

Из свойств степенных рядов следует, что суммой степенного ряда является некоторая функция, непрерывная и бесконечное число раз дифференцируемая. Разложить функцию в степенной ряд означает записать такой ряд, суммой которого была бы данная функция (говорят, что ряд сходится к данной функции):

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$$

Используя свойства степенных рядов, получим ряд

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots,$$

который называется рядом Маклорена.

Получим разложение некоторых функций в ряд Маклорена.

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$, область сходимости $(-\infty; +\infty)$.

2. $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$, область сходимости $(-\infty; +\infty)$.

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots$, область сходимости $(-\infty; +\infty)$.

4. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-(n-1))}{n!}x^n + \dots$, область сходимости $(-1; 1)$, на

концах интервала при $x = \pm 1$ сходимость ряда зависит от конкретных значений m .

Задание для самостоятельной работы.

1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \cos 2x$.
2. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \sin^2 x$.

9. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ

1. Предварительно рассмотрим периодические функции.

Определение. Если $f(x) = f(x + kT)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, то T ($T > 0$) называется периодом функции, а функция — периодической. Если среди всех чисел T есть наименьшее, то оно называется основным периодом.

Для $\sin x, \cos x$ основной период 2π , для $\sin \omega x, \cos \omega x$ основной период $\frac{2\pi}{\omega}$. Обозначим $\frac{2\pi}{\omega} = 2l$, тогда $\omega = \frac{\pi}{l}$.

Важным примером периодической функции является простая гармоника $y = A \sin(\omega x + \varphi)$, которая описывает гармоническое колебательное движение.

A – амплитуда колебания, ω – частота колебания, φ – начальная фаза колебания, $(\omega x + \varphi)$ – фаза колебания.

$$y = A(\sin \omega x \cos \varphi + \sin \varphi \cos \omega x) = a \cos \omega x + b \sin \omega x.$$

$$A \sin(\omega x + \varphi) = a \cos \omega x + b \sin \omega x.$$

Отметим свойство периодических функций:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) dx \text{ не зависит от } \alpha, \text{ если } T - \text{ период функции } f(x).$$

2. Рассмотрим совокупность непрерывных на $[a, b]$ функций: $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$

Определение. Совокупность функций называется ортогональной на $[a, b]$, если каждые две функции из этой системы удовлетворяют равенству $\int_a^b u_x(x) \cdot u_n(x) dx = 0$, если $n \neq k$.

Примером ортогональной совокупности непрерывных функций является тригонометрическая система функций:

$1, \cos \omega x, \sin \omega x, \cos 2\omega x, \sin 2\omega x, \dots, \cos n\omega x, \sin n\omega x, \dots$. Все функции этой системы имеют период $\frac{2\pi}{\omega}$, но только для $\cos \omega x$ и $\sin \omega x$ это основной период $\frac{2\pi}{\omega} = 2l$; $\omega = \frac{\pi}{l}$.

Перепишем систему функций:

$$1, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{n\pi x}{l}, \dots$$

Докажем, что эта система ортогональна на любом отрезке, имеющем длину, равную периоду $2l$; например, на отрезке $[-l; l]$:

$$1) \int_{-l}^l 1 \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 2 \int_0^l \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 2 \cdot \frac{l}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{l} \Big|_0^l = 0.$$

$$2) \int_{-l}^l 1 \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0, \text{ так как подынтегральная функция нечетная.}$$

$$3) \int_{-l}^l \cos \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0 \text{ при любых } k \text{ и } n, \text{ так как}$$

подынтегральная функция – нечетная.

$$4) \int_{-l}^l \cos \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0 \text{ и } \int_{-l}^l \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0 \text{ при } k \neq n, \text{ так}$$

$$\text{как сводятся к интегралу } \int_{-l}^l \cos \alpha x dx = 0.$$

Дополнительно вычислим:

$$1) \int_{-l}^l 1^2 dx = x \Big|_{-l}^l = 2l.$$

$$2) \int_{-l}^l \cos^2 \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l (1 + \cos \frac{2k\pi x}{l}) dx = \frac{1}{2} x \Big|_{-l}^l = l.$$

$$3) \int_{-l}^l \sin^2 \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l (1 - \cos \frac{2k\pi x}{l}) dx = l$$

Определение. Ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l})$

называется тригонометрическим рядом.

10. РЯДЫ ФУРЬЕ

Предположим, что периодическую с периодом $2l$ функцию $f(x)$ можно представить тригонометрическим рядом, сходящимся к этой функции в интервале $(-l; l)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right).$$

Выведем формулы для вычисления коэффициентов a_0, a_n, b_n .

Для этого выполним следующее:

1) данный ряд проинтегрируем в пределах от $-l$ до l .

$$\int_{-l}^l f(x) dx = \int_{-l}^l \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-l}^l \cos \frac{n\pi x}{l} dx + b_n \int_{-l}^l \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right) = a_0 l.$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx.$$

2) данный ряд умножим на $\cos \frac{k\pi x}{l}$ и проинтегрируем в

пределах от $-l$ до l .

$$\int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \int_{-l}^l \frac{a_0}{2} \cos \frac{k\pi x}{l} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-l}^l \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{k\pi x}{l} dx + \right.$$

$$\left. + b_n \int_{-l}^l \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{k\pi x}{l} dx \right) = a_n l.$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx.$$

3) данный ряд умножим на $\sin \frac{k\pi x}{l}$ и проинтегрируем в пределах

от $-l$ до l .

$$\int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \int_{-l}^l \frac{a_0}{2} \sin \frac{k\pi x}{l} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-l}^l \cos \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} dx + \right.$$

$$\left. + b_n \int_{-l}^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} dx \right) = b_n l.$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Тригонометрический ряд, у которого коэффициенты вычисляются по полученным формулам, называются рядом Фурье, а коэффициенты ряда – коэффициентами Фурье.

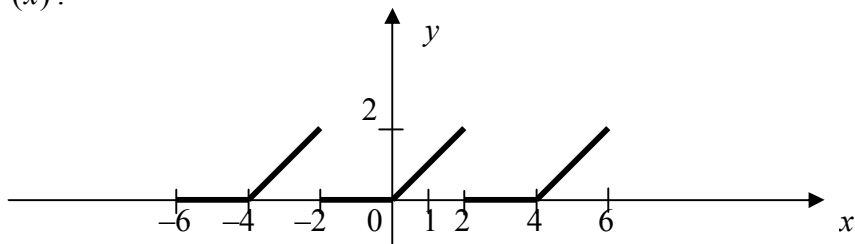
Выясним теперь, какими свойствами должна обладать функция, чтобы построенный для нее ряд Фурье сходился, и чтобы сумма построенного ряда Фурье равнялась значениям данной функции в соответствующих точках. Ответ на эти вопросы дает следующая теорема.

Теорема Дирихле. Если периодическая с периодом $T = 2l$ функция $f(x)$ на замкнутом интервале $[-l; l]$ кусочно-монотонна (имеет конечное число точек экстремума) и кусочно-непрерывна (имеет конечное число точек разрыва первого рода), то ряд Фурье, составленный для этой функции, сходится при всех значениях x . Сумма ряда равна $f(x)$ в каждой точке непрерывности, в точке x_0 разрыва первого рода сумма ряда равна среднему арифметическому левого и правого пределов ($S(x) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$). На концах отрезка $[-l; l]$ $S(x)$ равна среднему арифметическому пределов $f(x)$ при стремлении x к концам интервала изнутри интервала ($S(-l) = S(l) = \frac{f(-l + 0) + f(l - 0)}{2}$).

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -2 \leq x < 0, \\ x & \text{при } 0 \leq x < 2; \end{cases} \quad f(x \pm 2l) = f(x).$$

Решение. Здесь $l = 2$, $T = 2l = 4$. Построим график функции $f(x)$:



На отрезке $[-2; 2]$ функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле. Определим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 0 dx + \frac{1}{2} \int_0^2 x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 1.$$

$$\begin{aligned} a_n \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx &= \frac{1}{2} \int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos \frac{n\pi x}{2} dx \end{array} \right| \begin{array}{l} du = dx \\ v = \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \end{array} \Bigg\} = \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} dx \right) = \\ &= \frac{1}{n\pi} \cdot \frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 = \frac{2}{n^2 \pi^2} ((-1)^n - 1), \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

При вычислении $\sin n\pi = 0$ и $\cos n\pi = (-1)^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} b_n \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx &= \frac{1}{2} \int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = x \\ dv = \sin \frac{n\pi x}{2} dx \end{array} \right| \begin{array}{l} du = dx \\ v = -\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \end{array} \Bigg\} = \frac{1}{2} \left(-\frac{2x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 + \right. \\ &+ \left. \int_0^2 \frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} dx \right) = -\frac{2}{n\pi} (-1)^n + \frac{4}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 = \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

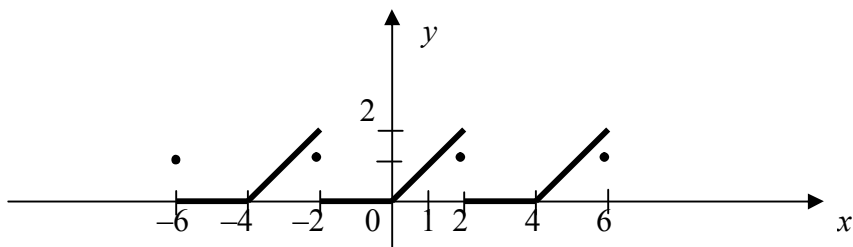
Получим:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{l}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) = \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2((-1)^n - 1)}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} + \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \right). \end{aligned}$$

Окончательно:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{2}.$$

График суммы полученного ряда Фурье частично отличается от графика функции $f(x)$. Построим график суммы:



$$S(-2) = S(2) = \frac{f(-2+0) + f(2-0)}{2} = \frac{0+2}{2} = 1.$$

$$S(x+2l) = S(x+4) = S(x).$$

Согласно теореме Дирихле функция $S(x)$ совпадает с функцией $f(x)$ в точках непрерывности, этот факт виден на рисунках.

Частный случай (пусть $l = \pi$).

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx;$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

11. РЯД ФУРЬЕ ДЛЯ ЧЕТНЫХ И НЕЧЕТНЫХ ФУНКЦИЙ

Учтем, что $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$, если $f(x)$ – четная и

$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$, если $f(x)$ – нечетная функция.

1. Пусть $f(x)$ – четная функция, т.е. $f(-x) = f(x)$.

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx; \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx; \quad b_n = 0;$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}.$$

2. Пусть $f(x)$ – нечетная функция, т.е. $f(-x) = -f(x)$.

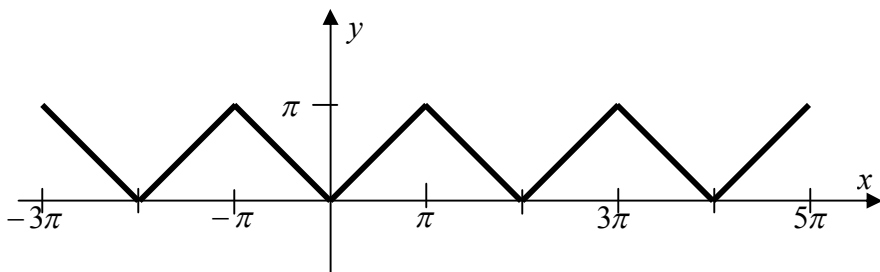
$$a_0 = a_n = 0; \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx;$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |x|$ на $[-\pi; \pi]$, $f(x \pm 2\pi) = f(x)$.

Решение

Построим график функции $f(x) = |x|$:



На отрезке $[-\pi; \pi]$ функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле. $f(x)$ – четная функция.

$$\text{Вычислим } a_0 = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \pi;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos nx dx \end{array} \right| \begin{array}{l} du = dx \\ v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{x}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx dx \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1), \quad n = 1, 2, 3, \dots; \quad b_n = 0$$

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) \cos nx.$$

Распишем этот ряд подробно:

$$\begin{aligned} |x| &= \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \left(-\frac{2}{1^2} \cos x - \frac{2}{3^2} \cos 3x - \frac{2}{5^2} \cos 5x - \dots \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

Полезно заметить, что полученное разложение (как и вообще другие разложения в ряд Фурье) служит источником формул сумм некоторых числовых рядов. Подставим в полученное разложение значение $x = 0$. Получим

$$0 = \frac{\pi}{4} - \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \right).$$

Отсюда $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$, т.е. получили сумму

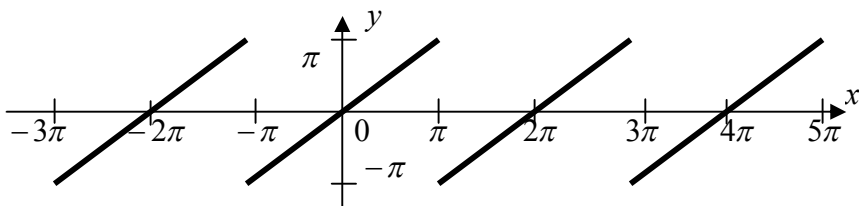
числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Отметим, что графики функций $f(x)$ и

$S(x)$ в данном случае совпадают.

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ на $[-\pi; \pi]$, $f(x \pm 2\pi) = f(x)$.

Решение

Построим график функции $f(x) = x$:



На отрезке $[-\pi; \pi]$ функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле. $f(x)$ – нечетная функция. Поэтому $a_0 = a_n = 0$,

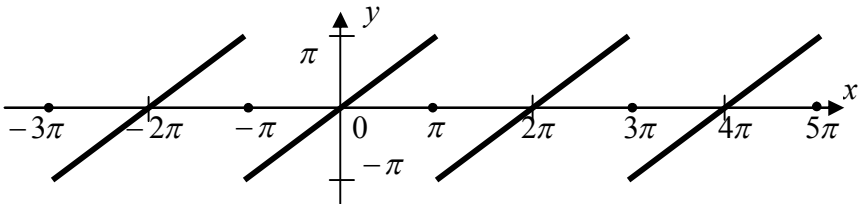
$$\begin{aligned} \text{вычислим } b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \\ dv = \sin nx dx \end{array} \right| \begin{array}{l} du = dx \\ v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \Bigg|_0^{\pi} = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{x}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right) = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi}{n} \cos n\pi + \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_0^{\pi} \right) = \\ &= -\frac{2}{\pi} (-1)^n = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi}. \end{aligned}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi} \sin nx = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin nx.$$

Графики функций $y = f(x)$ и $y = S(x)$ для данной функции отличаются друг от друга.

$$\text{Вычислим } S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{-\pi + \pi}{2} = 0.$$

Построим график функции $y = S(x)$.



Заметим, что ряд Фурье для четной функции содержит только косинусы, а нечетной – только синусы.

12. РЯД ФУРЬЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ НА ПОЛОВИНЕ ПЕРИОДА

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[0; l]$. Дополняя определение этой функции на отрезок $[-l; 0]$ произвольным

образом (сохраняя кусочно монотонность), мы можем разложить эту функцию в ряд Фурье.

В частности, мы можем дополнить определение этой функции на $[-l;0]$ следующими способами:

1. Принять, чтобы $f(-x) = f(x)$, тогда говорят, что функция продолжена четным образом. Её ряд Фурье будет содержать только косинусы. Таким образом, заданную на $[0;l]$ функцию $f(x)$ мы разложим по косинусам.

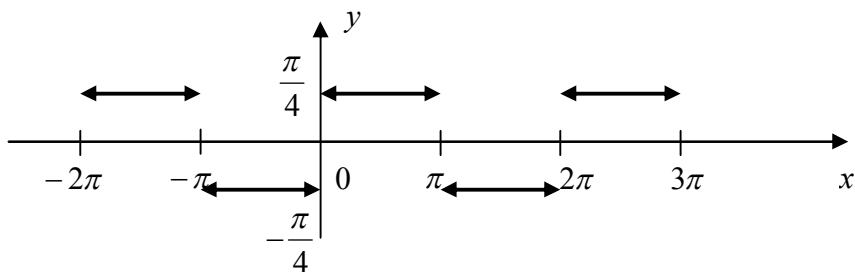
2. Принять, чтобы $f(-x) = -f(x)$, тогда говорят, что функция продолжена нечетным образом. Её ряд Фурье будет содержать только синусы. Таким образом, заданную на $[0;l]$ функцию $f(x)$ мы разложим по синусам.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию

$$f(x) = \frac{\pi}{4} \text{ в интервале } (0; \pi).$$

Решение

Построим график функции $f(x) = \frac{\pi}{4}$ в интервале $(0; \pi)$, а затем продолжим её в интервале $(-\pi; 0)$ нечетным образом.



На интервале $(-\pi; \pi)$ функция удовлетворяет условиям

Дирихле. $a_0 = a_n = 0$, вычислим $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi}{4} \sin nx dx =$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{n} \cos nx \right) \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2n} ((-1)^n - 1) = \frac{1}{2n} (1 - (-1)^n).$$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} (1 - (-1)^n) \sin nx = \frac{1}{2} \left(\frac{2 \sin x}{1} + \frac{2 \sin 3x}{3} + \frac{2 \sin 5x}{5} + \dots \right) =$$

$$= \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots$$

При $x = \frac{\pi}{2}$ получим $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} + \dots$ (вычислили сумму знакочередующегося ряда).

13. ПРАКТИЧЕСКИЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Теория разложения функций в ряды Фурье называется гармоническим анализом.

Если функция задана аналитическим выражением, то можно вычислить коэффициенты Фурье и построить соответствующий ей тригонометрический ряд Фурье.

Но на практике функция часто задается таблицей или графиком. В этом случае коэффициенты Фурье вычисляются при помощи приближенных методов интегрирования, в частности метода прямоугольников. Методы приближенного разложения функции, заданной графически или таблицей, в ряд Фурье составляют практический гармонический анализ.

Будем рассматривать промежуток $[-\pi; \pi]$ длины 2π . Разделим отрезок $[-\pi; \pi]$ на n равных частей точками $-\pi = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = \pi$. Тогда шаг деления будет равен $\Delta x = \frac{2\pi}{n}$.

Значения функции $f(x)$ в точках $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ обозначим соответственно $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ (эти значения определяем или по таблице или графику данной функции – измерением соответствующих ординат).

Тогда, пользуясь, например, формулой прямоугольников вычисления определенных интегралов, получим приближенные формулы для вычисления коэффициентов Фурье:

$$a_0 \approx \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n y_i; \quad a_k \approx \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n y_i \cos kx_i; \quad b_k \approx \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n y_i \sin kx_i.$$

Формулы прямоугольников:
$$\int_a^b f(x) dx = \Delta x (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1})$$

или
$$\int_a^b f(x) dx = \Delta x (y_1 + y_2 + \dots + y_n).$$
 Принимая во внимание особенности множителей $\cos kx_i$ и $\sin kx_i$, берут n чаще всего равным 12 или 24, или 48.

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^n (a_k \cos kx_i + b_k \sin kx_i).$$

($f(x)$) получаем в виде конечной суммы гармоник или в виде тригонометрического многочлена определенного порядка).

В MS Excel реализованы процедуры преобразования Фурье: прямая – разложение функции $f(x)$ на промежутке в ряд Фурье, и обратная – по значениям коэффициентов Фурье восстанавливается исходная функция.

14. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Условия к заданиям каждого варианта

1. Написать пять первых членов рядов. Проверить для данных рядов выполнение необходимого признака сходимости.
2. Исследовать ряды на сходимость с помощью признака Даламбера.
3. Исследовать ряды на сходимость с помощью интегрального признака Коши.
4. Исследовать ряды на сходимость с помощью признака сравнения.
5. Исследовать ряды на сходимость.

6. Определить область сходимости степенных рядов.

7. Разложить в ряд Фурье указанные функции в указанных интервалах. Построить графики функций, раскладываемых в ряд Фурье, и графики суммы рядов.

Вариант 1

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n+1}$;

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2+2}$;

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(2n-3)^2}}$;

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \ln n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$;

5. а) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^4 + 1}$;

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$;

7. а) $f(x) = x^2; x \in [-\pi; \pi]$;

б) $f(x) = x + 1; x \in (0; \pi)$ по синусам;

в) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ по косинусам;

г) $f(x) = \begin{cases} -1, & -2 < x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$.

Вариант 2

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+1}$;

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n!}$;

$$3. \quad \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\sqrt{n+2}};$$

$$4. \quad \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{n+1}};$$

$$5. \quad \text{a)} 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots;$$

$$6. \quad \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!};$$

$$7. \quad \text{a)} f(x) = 2x + 1; x \in (-\pi; \pi];$$

$$\text{б)} f(x) = x + \pi; x \in (0; \pi) \text{ по косинусам};$$

$$\text{в)} f(x) = e^x \quad x \in [-1; 1];$$

$$\text{г)} f(x) = \begin{cases} 2, & 0 < x \leq 1 \\ x, & 1 < x \leq 2 \end{cases} \text{ по синусам.}$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)};$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+2)}{n}$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8n+3};$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n};$$

Вариант 3

$$1. \quad \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}};$$

$$2. \quad \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(2n+1)};$$

$$3. \quad \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2};$$

$$4. \quad \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2 \ln n};$$

$$5. \quad \text{a)} \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots;$$

$$6. \quad \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)! x^n;$$

$$7. \quad \text{a)} f(x) = x + 1; x \in (-\pi; \pi];$$

$$\text{б)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 + 2}{\ln n};$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{3^n(n+2)};$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\ln(n+3)};$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{n+1};$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{n(n+1)};$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n (-1)^n}{n^2};$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ x, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases} \text{ по косинусам;}$$

$$\text{в) } f(x) = |x| \quad x \in (-2; 2];$$

$$\text{г) } f(x) = 3x, \quad 0 < x < 1 \text{ по синусам.}$$

Вариант 4

$$1. \quad \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+2}{n+1};$$

$$2. \quad \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{\pi}{3^n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n^3+1)}{(n+1)!};$$

$$3. \quad \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}};$$

$$\text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n};$$

$$4. \quad \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2};$$

$$5. \quad \text{а) } 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)};$$

$$6. \quad \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n};$$

$$7. \quad \text{а) } f(x) = x; \quad x \in (-\pi; \pi];$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} -1, & 0 < x < 1 \\ 2x, & 1 < x < \pi \end{cases} \text{ по синусам;}$$

$$\text{в) } f(x) = \begin{cases} 2x+1, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < 1 \end{cases};$$

$$\text{г) } f(x) = 5x, \quad x \in (0; \pi) \text{ по косинусам.}$$

Вариант 5

$$1. \quad \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{3^n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3+1}{\ln n};$$

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{(3n+5)2^n}$;
3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt[5]{n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1}$;
4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2}{n}}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$;
5. а) $\frac{1}{3} - \frac{4}{9} + \frac{9}{27} - \frac{16}{81} + \dots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$;
6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n nx^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!}$;
7. а) $f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi < x \leq 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$;
 б) $f(x) = 1 - x, \quad 0 < x < \pi$ по косинусам;
 в) $f(x) = 2x, \quad x \in (-1; 1]$;
 г) $f(x) = x + 3, \quad 0 < x \leq 3$ по синусам.

Вариант 6

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(3n-1)(2n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{5^n}$;
2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{5}{n}}{n!}$;
3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\sqrt{n+2}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$;
4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$;
5. а) $-\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)2^n}$;

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$;
7. а) $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 0, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$
 б) $f(x) = x+1, \quad x \in (0; \pi]$ по косинусам;
 в) $f(x) = x, \quad x \in (-1; 1]$
 г) $f(x) = 2x, \quad x \in (0; 2)$ по синусам.

Вариант 7

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n^2 - n + 1}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{\ln n}$;
2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^{n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} n! \operatorname{tg} \frac{1}{3^n}$;
3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1 + \ln n)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}$;
4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+5)2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3n}$;
5. а) $-\frac{12}{5} + \frac{13}{6} - \frac{14}{7} + \frac{15}{8} - \dots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)3^n}$;
6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{\sqrt{n}}$;
7. а) $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-\pi; 0) \\ x, & x \in [0; \pi) \end{cases}$;
 б) $f(x) = x+1, \quad x \in (0; \pi)$ по косинусам;
 в) $f(x) = 2x+1, \quad x \in (-1; 1]$;
 г) $f(x) = x, \quad 0 < x \leq 1$ по синусам.

Вариант 8

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+3};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\ln n+1};$

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{3^n \cdot (n+1)!};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!};$

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\sqrt{(n+3)}};$

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2+1};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} tg \frac{2\pi}{n};$

5 а); $1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \dots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)};$

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+3}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n (-1)^n}{n};$

7. а) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in (-\pi; 0) \\ 2, & x \in [0; \pi] \end{cases};$

б) $f(x) = \frac{x}{2}, \quad x \in (0; \pi) \text{ по синусам};$

в) $f(x) = x, \quad x \in (-3; 3];$

г) $f(x) = x^2, \quad x \in (0; 1) \text{ по косинусам}.$

Вариант 9

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2n+1};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n+1};$

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{3n+1}}{5^{2n+1}};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)!};$

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt[5]{(n+1)}};$

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} 3 \sin \frac{\pi}{2^n};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+4)};$

- 5 а) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \frac{1}{17} - \dots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$;
- 6 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{nx^n}}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{4n+1}$;
- 7 а) $f(x) = 3x - 1; x \in (-\pi; \pi]$;
 б) $f(x) = x^2 + 1, x \in (0; \pi]$ по косинусам;
 в) $f(x) = 5x, x \in (-3; 3)$;
 г) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0; 1) \\ 1, & x \in [1; 2] \end{cases}$ по синусам.

Вариант 10

- 1 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+3}{n}$;
- 2 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2 + 2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(2n+1)!}$;
- 3 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^{\frac{4}{3}}}$;
- 4 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^{n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \ln n}$;
- 5 а) $\frac{1}{2} - \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} - \frac{4}{2^4} + \dots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)}{3n}$;
- 6 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)^2}$;
- 7 а) $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\pi; 0) \\ x, & x \in [0; \pi] \end{cases}$;
 б) $f(x) = 5x + 1, x \in (0; \pi]$ по косинусам;

$$\text{в) } f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (-2; 0); \\ 0, & x \in [0; 2] \end{cases};$$

$$\text{г) } f(x) = x^2, \quad x \in (0; 2] \text{ по синусам.}$$

Вариант 11

$$1. \quad \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^2};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{5};$$

$$2. \quad \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \dots (2n+5)};$$

$$3. \quad \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+3};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\sqrt[4]{n+3}};$$

$$4. \quad \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+5};$$

$$5. \quad \text{а) } 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{27} - \frac{1}{64} + \dots;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!};$$

$$6. \quad \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{3^n};$$

$$7. \quad \text{а) } f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (-\pi; 0); \\ 0, & x \in [0; \pi] \end{cases};$$

$$\text{б) } f(x) = e^x, \quad x \in [0; \pi] \text{ по синусам};$$

$$\text{в) } f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 0; \\ x, & 0 < x < 1 \end{cases};$$

$$\text{г) } f(x) = x+2, \quad x \in (0; 2) \text{ по косинусам.}$$

Вариант 12

$$1. \quad \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+3};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{3^n};$$

$$2. \quad \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)n!}{3^n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6 \cdot 9 \dots (3n+3)}{3 \cdot 5 \dots (2n+1)};$$

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)^2}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$;
4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \sqrt{n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+5}$;
5. а) $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \dots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$;
6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}(-1)^n}{n^2}$;
7. а) $f(x) = x + 3, \quad x \in (-\pi; \pi]$;
- б) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \\ x, & x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \end{cases}$ по косинусам;
- в) $f(x) = |x|, \quad x \in (-1; 1)$;
- г) $f(x) = 2x + 1, \quad x \in (0; 2)$ по синусам.

Вариант 13

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1}$;
2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6 \cdot 11 \cdot 16 \dots (5n+1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3n+1)2^n}$;
3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg 5n}{25n^2+1}$;
4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \tg \frac{2\pi}{3n}$;
5. а) $\frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{6}{7} - \frac{8}{9} + \dots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3(n+1)}$;
6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(-1)^n x^n}{n!}$;
7. а) $f(x) = x^2 + x, \quad x \in (-\pi; \pi]$;

$$\text{б)} f(x) = 1 - \frac{2}{\pi}x, \quad x \in [0; \pi] \text{ по синусам};$$

$$\text{в)} f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x < 0; \\ x, & 0 \leq x < 2 \end{cases};$$

$$\text{г)} f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{\pi}{4} \\ 2, & \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ по косинусам.}$$

Вариант 14

$$1. \quad \text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)};$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \pi n;$$

$$2. \quad \text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)^2};$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{8 \cdot 11 \cdot 14 \dots (3n+5)};$$

$$3. \quad \text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4 + 1};$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \ln(n+2)};$$

$$4. \quad \text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)};$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n+1};$$

$$5. \quad \text{а)} \frac{1}{102} - \frac{2}{104} + \frac{3}{106} - \frac{4}{108} \dots;$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)};$$

$$6. \quad \text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n \cdot 7^n};$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n!};$$

$$7. \quad \text{а)} f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4}, & x \in (-\pi; 0) \\ \frac{\pi}{4}, & x \in (0; \pi) \end{cases};$$

$$\text{б)} f(x) = 4x, \quad x \in (0; \pi) \text{ по косинусам};$$

$$\text{в)} f(x) = e^x, \quad x \in (-2; 2];$$

$$\text{г)} f(x) = 2x - 1, \quad x \in (0; 1] \text{ по синусам.}$$

Вариант 15

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}$;
2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n+1)!4^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$;
3. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}$;
4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{-n}}{n+3}$;
5. а) $-\frac{2}{3} + \frac{4}{6} - \frac{8}{9} + \frac{16}{12} - \dots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2(n+3)}$;
6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^{n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$;
7. а) $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$; б) $f(x) = x^2 - 1, \quad x \in (0; \pi)$ по косинусам;
 в) $f(x) = 1 - x, \quad x \in (-2; 2)$;
 г) $f(x) = 3x, \quad x \in (0; 1)$ по синусам.

Вариант 16

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{\sin \frac{\pi}{2^n}}$;
2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 4}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3n+1}$;
3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2 + 1}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^5}$;
4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{5n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5 + 3}$;

$$5 \quad \text{a)} -1 + \frac{2}{3} - \frac{3}{5} + \frac{4}{7} - \dots;$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{(n+1)3^n};$$

$$6. \quad \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{4^n(2n-1)};$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n+1)};$$

$$7. \quad \text{a)} f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi; 0); \\ x, & x \in [0; \pi]; \end{cases};$$

$$\text{б)} f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \quad x \in (0; \pi) \text{ по синусам};$$

$$\text{в)} f(x) = 4 - 2x, \quad x \in (-3; 3];$$

$$\text{г)} f(x) = e^x, \quad x \in (0; 1) \text{ по косинусам}.$$

Вариант 17

$$1. \quad \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3};$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2 - 1}{n};$$

$$2. \quad \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!};$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)};$$

$$3. \quad \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}};$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4 + 3};$$

$$4. \quad \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1};$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{5n};$$

$$5 \quad \text{a)} \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \dots;$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n n!};$$

$$6. \quad \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin \frac{\pi}{2^n};$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{2^n (n+1)};$$

$$7. \quad \text{a)} f(x) = 3x - 1, \quad x \in (-\pi; \pi);$$

$$\text{б)} f(x) = 1 - x^2, \quad x \in (0; \pi) \text{ по синусам};$$

$$\text{в)} f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0; \\ x, & 0 \leq x < 1; \end{cases};$$

$$\text{г)} f(x) = e^x, \quad x \in (0; \pi] \text{ по косинусам}.$$

Вариант 18

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n}$;
2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{3n+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}$;
3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+3}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^5 n}$;
4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{-n}}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sqrt{n+1}}$;
5. а) $\frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{10} - \frac{1}{13} \dots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! 2^n}$;
6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{2^n}$;
7. а) $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi < x < 0; \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$;
 б) $f(x) = 1 + x, \quad x \in (0; \pi]$ по косинусам;
 в) $f(x) = \begin{cases} -1, & -4 < x < 0; \\ x, & 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$;
 г) $f(x) = 2x, \quad x \in (0; 1]$ по синусам.

Вариант 19

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+1}$;
2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} n! \sin \frac{\pi}{2^n}$;
3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^5 \sqrt{n+1}}$;

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^3 + 1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n}}$;
5. а) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n}$;
6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$;
7. а) $f(x) = \frac{x}{2}, \quad x \in (-\pi; \pi]$;
 б) $f(x) = x + 1, \quad x \in (0; \pi]$ по синусам;
 в) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$;
 г) $f(x) = 2 - x, \quad x \in (0; 2)$ по косинусам.

Вариант 20

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{11+n}{n+4}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$;
2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n (n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{2^{n+1}}$;
3. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^2 + 3}$;
4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{5^n}$;
5. а) $\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{3}{7} - \frac{4}{9} + \dots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 (n+1)}$;
6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x 4^n}{n}$;
7. а) $f(x) = \frac{x}{2} + 1, \quad x \in (-\pi; \pi]$;
 б) $f(x) = e^x, \quad x \in (0; \pi]$ по косинусам;

$$\text{в) } f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0; \\ 1 + 3x, & 0 \leq x < 1; \end{cases}$$

$$\text{г) } f(x) = 2 - x, \quad x \in (0; 2) \text{ по синусам.}$$

Вариант 21

$$1. \quad \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 2};$$

$$\text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\ln n};$$

$$2. \quad \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{n!};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)5^n}{3n-1};$$

$$3. \quad \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg 2n}{4n^2 + 1};$$

$$4. \quad \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{3^n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+2)}{n+2};$$

$$5. \quad \text{а) } -\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \frac{1}{17} - \dots;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{2n-1};$$

$$6. \quad \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{5^n (n^2 + 1)}$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)};$$

$$7. \quad \text{а) } f(x) = \begin{cases} \pi, & x \in (-\pi; 0); \\ \pi - x, & x \in (0; \pi); \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = x + \pi, \quad x \in (0; \pi) \text{ по синусам.}$$

$$\text{в) } f(x) = x + 2, \quad x \in (-2; 2);$$

$$\text{г) } f(x) = x, \quad x \in (0; 1) \text{ по косинусам.}$$

Вариант 22

$$1. \quad \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\ln(n+1)};$$

$$2. \quad \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{10n+1};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}};$$

$$3. \quad \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^4+1};$$

$$4. \quad \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^{2n-1}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n+5};$$

$$5. \quad \text{a) } 2 - \frac{3}{4} + \frac{4}{9} - \frac{5}{16} + \dots; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1};$$

$$6. \quad \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n(n+1)}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1};$$

$$7. \quad \text{a) } f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\pi; 0); \\ 1, & x \in (0; \pi); \end{cases}$$

б) $f(x) = \pi - x, \quad x \in (0; \pi)$ по косинусам;

в) $f(x) = 1 - x, \quad x \in (-1; 1);$

г) $f(x) = 2x, \quad x \in (0; 2)$ по синусам.

Вариант 23

$$1. \quad \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n};$$

$$2. \quad \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! 2^n}{n+5}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{7^n};$$

$$3. \quad \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+3)}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+5};$$

$$4. \quad \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+1}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{7n};$$

$$5. \quad \text{a) } -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{4}{\sqrt{17}} - \dots; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1};$$

$$6. \quad \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)! x^n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2n-1};$$

$$7. \quad \text{a) } f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi; 0); \\ x, & x \in [0; \pi]; \end{cases}$$

- б) $f(x) = x - \pi$, $x \in (0; \pi)$; по синусам;
 в) $f(x) = 1 - 2x$, $x \in (-3; 3)$;
 г) $f(x) = 2x$, $x \in (0; 1)$ по косинусам.

Вариант 24

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n}$;
2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}$;
3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5)\sqrt{n+5}}$;
4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)5^n}$;
5. а) $\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)!}$;
6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+1)x^n$;
7. а) $f(x) = \begin{cases} -1 & x \in (-\pi; 0) \\ x & x \in [0; \pi] \end{cases}$;

б) $f(x) = x - 2\pi$, $x \in (0; \pi)$ по косинусам;

в) $f(x) = 5x$, $x \in (-1; 1]$;

г) $f(x) = \begin{cases} -x, & x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \\ 0, & x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$ по синусам.

Вариант 25

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{2n-1}$;

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7 \cdot 9 \cdot 11 \dots (2n+5)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}$;
3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(2n-3)^2}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$;
4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\ln(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$;
- 5 а) $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$;
6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n+2)(2n+3)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n$;
7. а) $f(x) = 2 - x, \quad x \in (-\pi; \pi]$;
- б) $f(x) = 1 - \frac{x}{2}, \quad x \in (0; \pi)$ по синусам;
- в) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (-1; 0) \\ 1, & x \in [0; 1] \end{cases}$;
- г) $f(x) = 3 - x, \quad x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ по косинусам.

Вариант 26

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{n^2+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{5n+1}$;
2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n!}$;
3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+2)(n+3)}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg 3n}{9n^2+1}$;
4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^{n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n+1}}$;
- 5 а) $-\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} - \frac{3}{2^3} + \dots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$;

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{(n+1)3^n}$;
7. а) $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \\ 2, & x \in \left[\frac{\pi}{4}; \pi\right] \end{cases}$ по синусам;
- б) $f(x) = 4x - 1, \quad x \in (-\pi; \pi)$;
- в) $f(x) = 1 - 5x, \quad x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ по косинусам;
- г) $f(x) = \begin{cases} 6, & x \in (-4; 2) \\ 3x, & x \in [2; 4] \end{cases}$.

Вариант 27

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^2+2n-1}$;
2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{3n}$;
3. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^7 n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+5}$;
4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{\sqrt{n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)3^n}$;
5. а) $-\frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \dots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n!}$;
6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^{n+1}$;
7. а) $f(x) = 3, \quad x \in (-\pi; \pi]$;
- б) $f(x) = |x|, \quad x \in (-4; 4]$;
- в) $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \in (-\pi; 0) \\ 1, & x \in [0; \pi] \end{cases}$;

г) $f(x) = 1 - 3x$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ по косинусам.

Вариант 28

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{n+1}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\ln n}$;
 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{(n+4)n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+3}$;
 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\sqrt{n+3}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^6+4}$;
 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^3+5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{2n+1}$;
 5. а) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3^n}$;
 6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$;
 7. а) $f(x) = 1 - x$, $x \in (-\pi; \pi]$;
- б) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \\ 3x, & x \in \left[\frac{\pi}{4}; \pi\right] \end{cases}$ по синусам;
- в) $f(x) = 1 - x^2$, $x \in (-2; 2]$;
- г) $f(x) = x + \frac{1}{2}$, $x \in (0; 3)$ по косинусам.

Вариант 29

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n+5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$;

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n!}$;
3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)\sqrt[4]{n+4}}$;
4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^{2n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{2n-1}$;
5. а) $\frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{8}{7} - \frac{16}{9} + \dots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$;
6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n n}{n+1}$;
7. а) $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x, \quad x \in (-\pi; \pi]$;
- б) $f(x) = 1 - \frac{x}{\pi}, \quad x \in (0; \pi)$ по синусам;
- в) $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-3; 0] \\ 2x+1, & x \in (0; 3] \end{cases}$;
- г) $f(x) = 1 - \frac{3}{2}x, \quad x \in (0; \pi)$ по косинусам.

Вариант 30

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{3n+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$;
2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{3^n}$;
3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+n^3}{1+n^4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$;
4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \sqrt{1+2n}}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$;

$$5 \quad \text{a) } \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \dots; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 + \sqrt{n}};$$

$$6. \quad \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}};$$

$$7. \quad \text{a) } f(x) = \frac{1}{2} - 2x, \quad x \in (-\pi; \pi);$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} x, & x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \\ x^2, & x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \end{cases} \quad \text{по синусам};$$

$$\text{в) } f(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & -4 < x < 0; \\ 2, & 0 \leq x < 4; \end{cases}$$

$$\text{г) } f(x) = \pi x + 1, \quad x \in (0; 1) \text{ по косинусам.}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Высшая математика для экономистов: Учебное пособие для вузов/Н.Ш. Кремер И.М. Тришин и др.; Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997.-439с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Н.С.Пискунов. – М.:Наука,1980. – т.2 – 575с.
3. Берман Г.П. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.П. Берман. – М.:Наука,1985. – 414 с.
4. Задачи и упражнения по математическому анализу / Под ред. В.П. Демидовича. – М.:Наука,1968. – 472 с.
5. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов при изучении высшей математики, раздел «Ряды» / Сост. Н.П. Носенко, Ю.Л. Носенко. – Донецк: ДПИ,1988. – 40с.
6. Решение математических задач средствами Excel: Практикум / В.Я. Гельман. – СПб.: Питер,2003. – 240с.

Заказ № _____ от _____ 2010 г. Тираж _____ экз.
Изд-во СевНТУ