



Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный технический университет

„ОСНОВЫ ВЕКТОРНОГО И ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА”

Методические указания
для самостоятельной работы
студентов специальности „Физика”
дневной формы обучения

Севастополь
2010

Основы векторного и тензорного анализа. Методические указания для самостоятельной работы студентов специальности «Физика» дневной формы обучения / Сост. Н.П. Левков. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2010. – 32с.

Целью методических указаний является оказание помощи студентам специальности «Физика» в выполнении модульной работы по дисциплине «Основы векторного и тензорного анализа».

Разработан комплекс заданий для работы студентов по теме модуля, состоящий из трех задач по векторной части дисциплины и четырех задач по тензорному анализу. Комплекс задач содержит 25 вариантов и «нулевой» вариант с подробным решением.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры высшей математики 27 апреля 2010 г., протокол № 6 .

Допущено учебно-методическим центром и научно-методическим советом СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: Захарова З.Д., доцент кафедры высшей математики

Содержание

1. Образец выполнения задания.....	4
2. Варианты заданий для самостоятельной работы.....	9
Библиографический список.....	31

Автор выражает благодарность доц. З.Д. Захаровой за предоставленный материал и критические замечания при рецензировании рукописи.

1. Образец выполнения задания

Вариант 0

Задача 1. Найти производную скалярного поля $u = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ по направлению циклоиды $x = t - \sin t$, $y = t - \cos t$ в точке, соответствующей значению $t = \frac{\pi}{2}$.

Решение

Находим координаты точки A : $x = \frac{\pi}{2} - 1$; $y = 1$.

Найдем направляющий вектор

$$\bar{l} = \{\cos \alpha, \cos \beta\}:$$

$$\operatorname{tg} \alpha = y'_x|_A = \frac{y'_t}{x'_t} \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4},$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \bar{l} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

Частные производственные функции u в т. А:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^2 + 1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-x}{x^2 + y^2} = \frac{1 - \frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^2 + 1}.$$

Производная поля U по направлению l

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^2 + 1} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1 - \frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^2 + 1} \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $= \frac{(4 - \pi)\sqrt{2}}{\pi^2 - 4\pi + 8}.$

Задача 2. Вычислить ротор векторного поля

$$\bar{F} = 2x^2 y \bar{i} - yz^2 \bar{j} + \frac{x}{y} \bar{k} \text{ в точке } M(-1; 1; 2).$$

Решение

Ротор поля $\bar{F} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}$ находим по формуле

$$\text{rot} \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \bar{k}.$$

Т.к. $X = 2x^2 y$, $Y = -yz^2$, $Z = \frac{x}{y}$, то в т. $M(-1; 1; 2)$

$$X'_y = 2x^2 = 2, \quad X'_z = 0, \quad Y'_x = 0, \quad Y'_z = -2yz = -4,$$

$$Z'_x = \frac{1}{y} = 1, \quad Z'_y = -\frac{x}{y^2} = 1,$$

$$\text{rot} \bar{F} = (1 + 4)\bar{i} + (0 - 1)\bar{j} + (0 - 2)\bar{k}$$

Ответ: $\{5; -1; -2\}$

Задача 3. Вычислить циркуляцию векторного поля

$$\bar{F} = (y - z)\bar{i} + (z - x)\bar{j} + (x - y)\bar{k} \text{ вдоль эллипса}$$

$x^2 + y^2 = 1, x + z = 1$, пробегаемого против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительной полуоси Oz .

Решение

Запишем параметрические уравнения эллипса. Из уравнения цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ получаем $x = \cos t, y = \sin t$. Из уравнения секущей плоскости $x + z = 1$ находим $z = 1 - x = 1 - \cos t$. При этом t изменяется от 0 до 2π . Циркуляцию поля $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ вдоль контура L находим по формуле

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \oint_L Xdx + Ydy + Zdz = \oint_L (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz = \\ &= \int_0^{2\pi} [(\sin t - 1 + \cos t)(-\sin t) + \end{aligned}$$

$$+ (1 - \cos t - \cos t)\cos t + (\cos t - \sin t)\sin t] dt = - \int_0^{2\pi} 2 dt = -4\pi$$

Задача 4. Найти тензор T , равный произведению тензора A на тензор B ,

$$\text{если } A_{ij} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}, B^{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Решение

$A_{ij}B^{kl} = T_{ij}^{\bullet\bullet kl}$ - тензор четвертого ранга. В данном примере это 16 чисел. (будь A_{ij} и B^{kl} в полном объеме, было бы $9 \cdot 9$ чисел).

$$T_{ij}^{\bullet\bullet 11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}, T_{ij}^{\bullet\bullet 12} = \begin{vmatrix} 12 & 4 \\ -12 & 8 \end{vmatrix},$$

$$T_{ij}^{\bullet\bullet 21} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}, T_{ij}^{\bullet\bullet 22} = \begin{vmatrix} 15 & 5 \\ -15 & 10 \end{vmatrix}$$

Задача 5. Свернуть тензор T , найденный в предыдущей задаче, по первому нижнему и второму верхнему индексам.

Решение

Свертывание смешанного тензора возможно только по разноименным индексам. Чтобы свернуть тензор $T_{ij}^{\bullet\bullet kl}$ по i и по l , необходимо положить $l = i$ и просуммировать по i элементы $T_{ij}^{\bullet\bullet kl}$. В результате получим тензор второго ранга

$$C_j^{\bullet k} = \sum_{i=1}^2 T_{ij}^{\bullet\bullet ki}.$$

$$c_1^{\bullet 1} = T_{11}^{\bullet\bullet 11} + T_{21}^{\bullet\bullet 12} = 3 - 12 = -9;$$

$$c_1^{\bullet 2} = T_{11}^{\bullet\bullet 21} + T_{21}^{\bullet\bullet 22} = 6 - 15 = -9,$$

$$c_2^{\bullet 1} = T_{12}^{\bullet\bullet 11} + T_{22}^{\bullet\bullet 12} = 1 + 8 = 9,$$

$$c_2^{\bullet 2} = T_{12}^{\bullet\bullet 21} + T_{22}^{\bullet\bullet 22} = 2 + 10 = 12.$$

Ответ: $\begin{vmatrix} -9 & -9 \\ 9 & 12 \end{vmatrix}.$

Задача 6.

а) Симметризовать по нижним;

б) Альтернизовать по верхним индексам тензор T , найденный в задаче №4.

Решение

Симметризование и альтернирование смешанного тензора возможно только по одноименным индексам.

а) Чтобы симметризовать тензор $T_{ij}^{\bullet\bullet kl}$ по нижним индексам, необходимо найти полусумму

$$\frac{1}{2}(T_{ij}^{\bullet\bullet kl} + T_{ji}^{\bullet\bullet kl}) = S_{ij}^{\bullet\bullet kl} = S_{ji}^{\bullet\bullet kl}$$

$$S_{ij}^{\bullet\bullet 11} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad S_{ij}^{\bullet\bullet 12} = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 8 \end{vmatrix},$$

$$S_{ij}^{\bullet\bullet 21} = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}, \quad S_{ij}^{\bullet\bullet 22} = \begin{vmatrix} 15 & -5 \\ -5 & 10 \end{vmatrix}.$$

б) Чтобы альтернировать тензор $T_{ij}^{\bullet\bullet kl}$ по верхним индексам, необходимо найти полуразность

$$\frac{1}{2}(T_{ij}^{\bullet\bullet kl} - T_{ij}^{\bullet\bullet lk}) = A_{ij}^{\bullet\bullet kl} = -A_{ij}^{\bullet\bullet lk}$$

$$A_{ij}^{\bullet\bullet 11} = A_{ij}^{\bullet\bullet 22} = 0, \quad A_{ij}^{\bullet\bullet 12} = -A_{ij}^{\bullet\bullet 21} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Задача 7. Поднять индекс у тензора A_{ij} , умножив его на тензор B^{jk} . Тензоры A и B даны в задаче №4.

Решение.

Чтобы поднять индекс у дважды ковариантного тензора A_{ij} путем умножения его на дважды контравариантный тензор B^{jk} , необходимо перемножить тензоры A и B и провести суммирование по j . Произведение A на B найдено в задаче №4.

$$A_i^{\bullet k} = \sum_{j=1}^2 T_{ij}^{\bullet\bullet jk} = \begin{vmatrix} 3+2 & 12+5 \\ -3+4 & -12+10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 17 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Ответ: $\begin{vmatrix} 5 & 17 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}.$

2. Вырианты заданий для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Найти производную скалярного поля $u = y^2 z - 2xyz + z^2$ в точке $M_0(3,1,1)$ по направлению вектора $\bar{L}$, если этот вектор образует с координатными осями Ox и Oy соответственно углы $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, а угол, образованный вектором $\bar{L}$ с осью Oz , $\gamma < \frac{\pi}{2}$.

2. Вычислить ротор векторного поля $\bar{F} = x^2 \bar{j} - y^2 \bar{i} - z^2 \bar{k}$.

3. Вычислить поток векторного поля $\bar{F} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ через боковую поверхность цилиндра $x^2 + y^2 \leq R^2$, $0 \leq z \leq H$.

4. Найти тензор T , равный произведению тензора A на тензор B ,

если $A_{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$, $B^{ij} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$.

5. Свернуть тензор T , найденный в предыдущей задаче, по первому нижнему и второму верхнему индексам.

6. Симметризовать по нижним и альтернировать по верхним индексам тензор T , найденный в задаче №4.

7. Поднять индекс у тензора A_{ij} , умножив его на тензор B^{jk} . Тензоры A и B даны в задаче №4.

Вариант 2

1. Найти производную скалярного поля $u = xy^2z^3$ в точке $M_0(3,2,1)$ по направлению вектора $\bar{L} = i - 2j + 2k$.

2. Найти $\operatorname{div}[\bar{u} \bullet \bar{v}]$, где $\bar{u} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $\bar{v} = x\bar{k} + y\bar{i} + z\bar{j}$.

3. Вычислить поток векторного поля $\bar{F} = (x - 2z)\bar{i} + (3z - 4x)\bar{j} + (5x + y)\bar{k}$ через треугольник ABC с вершинами $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$, предполагая, что нормальный вектор составляет острые углы с координатными осями.

4. Найти тензор T , равный произведению тензора A на тензор B ,

если $A_{ij} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$, $B^{ij} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$.

5. Свернуть тензор T , найденный в предыдущей задаче, по первому нижнему и второму верхнему индексам.

6. Симметризовать по нижним и альтернировать по верхним индексам тензор T , найденный в задаче №4.

7. Поднять индекс у тензора A_{ij} , умножив его на тензор B^{jk} . Тензоры A и B даны в задаче №4.

Вариант 3

1. Найти производную скалярного поля $u = 4x^3 - 3y^3$ в точке $M_0(1,2)$ по направлению $\bar{L}$, идущему от этой точки к точке $M(4,6)$.

2. Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, расположенной в первом октанте. Нормаль – внешняя нормаль сферы.
3. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = xz\vec{i} - yz^2\vec{j} + xy\vec{k}$ вдоль контура $\gamma : z = x^2 - y^2 + 2a^2, \quad x^2 + y^2 = a^2$.
4. Найти тензор T , равный произведению тензора A на тензор B ,
если $A_{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}, B^{ij} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.
5. Свернуть тензор T , найденный в предыдущей задаче, по первому нижнему и второму верхнему индексам.
6. Симметризовать по нижним и альтернировать по верхним индексам тензор T , найденный в задаче №4.
7. Поднять индекс у тензора A_{ij} , умножив его на тензор B^{jk} . Тензоры A и B даны в задаче №4.

Вариант 4

1. Найти производную скалярного поля $u = x^2 + y^2 - 3x + 2y$ в точке $O(0,0)$ по направлению, идущему из начала координат в точку $M(3,4)$.
2. Найти ротор векторного поля $\vec{F} = xyz(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$.

3. Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = x^2\vec{i} + x\vec{j} + xz\vec{k}$ через поверхность параболоида вращения $y = x^2 + z^2$, отсекаемую плоскостями $x = 0, z = 0, y = 1, (x \geq 0, z \geq 0)$.
4. Найти тензор T , равный произведению тензора A на тензор B ,
если $A_{ij} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, B^{ij} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$.
5. Свернуть тензор T , найденный в предыдущей задаче, по первому нижнему и второму верхнему индексам.
6. Симметризовать по нижним и альтернировать по верхним индексам тензор T , найденный в задаче №4.
7. Поднять индекс у тензора A_{ij} , умножив его на тензор B^{jk} . Тензоры A и B даны в задаче №4.

Вариант 5

1. Найти производную скалярного поля $u = xy^2 + z^3 - xyz$ в точке $M_0(1,1,2)$ по направлению вектора $\vec{L}$, образующему с осями координат углы $60^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ соответственно.
2. Найти ротор векторного поля $\vec{F} = \arctg(x - y + z)(\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k})$.
3. Найти поток векторного поля $\vec{F} = (x - z)\vec{i} + (z^2 - y^2)\vec{j} + (x + z)\vec{k}$ через часть цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = R^2$, ограниченную

плоскостями $y = 0$ и $y = a$ ($a > 0$) в сторону внешней нормали.

4. Найти тензор T , равный произведению тензора A на тензор B ,

если $A_{ij} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$, $B^{ij} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$.

5. Свернуть тензор T , найденный в предыдущей задаче, по первому нижнему и второму верхнему индексам.

6. Симметризовать по нижним и альтернировать по верхним индексам тензор T , найденный в задаче №4.

7. Поднять индекс у тензора A_{ij} , умножив его на тензор B^{jk} . Тензоры A и B даны в задаче №4.

Вариант 6

1. Найти производную скалярного поля $u = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ по направлению, перпендикулярному к линии уровня функции u , проходящей через эту точку.

2. Найти дивергенцию векторного поля $\bar{F} = e^{xy}(y\bar{j} - x\bar{i} + xy\bar{k})$.

3. Найти поток векторного поля $\bar{F} = x\bar{i} + (z+y)\bar{j} + (z-y)\bar{k}$

через часть сферической поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 9$,

отсеченную плоскостью $z = \frac{3}{2} \left(z \geq \frac{3}{2} \right)$ в сторону внешней

нормали.

4. Найти тензор T , равный произведению тензора A на тензор B , если $A_{ij} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$, $B^{ij} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$.
5. Свернуть тензор T , найденный в предыдущей задаче, по первому нижнему и второму верхнему индексам.
6. Симметризовать по нижним и альтернировать по верхним индексам тензор T , найденный в задаче №4.
7. Поднять индекс у тензора A_{ij} , умножив его на тензор B^{jk} . Тензоры A и B даны в задаче №4.

Вариант 7

1. Найти производные скалярного поля $u = y^2z - 3x^2yz + z^3$ в точке $M_0(3,1,1)$ по направлению координатных осей.
2. Вычислить ротор векторного поля $\vec{F} = e^{x+2y+3z}(3\vec{x} + y\vec{j} + z\vec{k})$ в точке $M_0(3,-3,1)$.
3. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ вдоль контура $\gamma: x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 1$ по направлению, соответствующему положительному обходу проекции контура на плоскость xOy .
4. Найти тензор T , равный произведению тензора A на тензор B , если $A_{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$, $B^{ij} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$.
5. Свернуть тензор T , найденный в предыдущей задаче, по первому нижнему и второму верхнему индексам.

6. Симметризовать по нижним и альтернировать по верхним индексам тензор T , найденный в задаче №4.
7. Поднять индекс у тензора A_{ij} , умножив его на тензор B^{jk} . Тензоры A и B даны в задаче №4.

Вариант 8

1. Найти производную скалярного поля $u = \ln(x + y)$ в точке $M_0(1, 2)$ по направлению параболы $y^2 = 4x$.
2. Найти дивергенцию векторного поля $\bar{F} = (3x^2y - y^3)\bar{i} + (x^3 - 3xy^2)\bar{j}$ в точке $M_0(1, 1)$.
3. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{F} = z\bar{i} + x\bar{j} + y\bar{k}$ вдоль контура $\gamma: x^2 + y^2 = 4, z = 0$.
4. Найти тензор T , равный произведению тензора A на тензор B , если $A_{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$, $B^{ij} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$.
5. Свернуть тензор T , найденный в предыдущей задаче, по первому нижнему и второму верхнему индексам.
6. Симметризовать по нижним и альтернировать по верхним индексам тензор T , найденный в задаче №4.
7. Поднять индекс у тензора A_{ij} , умножив его на тензор B^{jk} . Тензоры A и B даны в задаче №4.

Вариант 9

1. Найти производную скалярного поля $u = 5x^2yz - zxy^2 + 5xyz^2$ в точке $M_0(1,1,1)$ по направлению вектора $\bar{L} = 8\bar{i} - 4\bar{j} + 8\bar{k}$.

2. Найти ротор векторного поля $\bar{F} = (x+z)\bar{i} + (y+z)\bar{j} + (x^2+z)\bar{k}$.

3. Найти поток векторного поля $\bar{F} = y^2\bar{i} + x^2\bar{j} + \bar{k}$ через поверхность параболоида $1 - z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$.

4. Найти тензор T , равный произведению тензора A на тензор B ,

если $A_{ij} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$, $B^{ij} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$.

5. Свернуть тензор T , найденный в предыдущей задаче, по первому нижнему и второму верхнему индексам.

6. Симметризовать по нижним и альтернировать по верхним индексам тензор T , найденный в задаче №4.

7. Поднять индекс у тензора A_{ij} , умножив его на тензор B^{jk} . Тензоры A и B даны в задаче №4.

Вариант 10

1. Найти производную скалярного поля $u = xy + z^2$ по направлению винтовой линии $x = 4 \cos t$, $y = 4 \sin t$, $z = 3t$ в точке $P(x, y, z)$, соответствующей значению $t = \pi$.

2. Найти дивергенцию векторного поля $\bar{F} = [\bar{a} \bullet \bar{r}]$, где $\bar{a} = x^2 \bar{i} + y^2 \bar{j}$ и $\bar{r} = x \bar{i} + y \bar{j} + z \bar{k}$.

3. Вычислить поток векторного поля $\bar{F} = (x - y) \bar{i} + (3y - z) \bar{j} + (2z - x) \bar{k}$ через треугольник, полученный при пересечении плоскости $6x + 2y + 3z - 6 = 0$ с плоскостями координат (нормаль составляет острые углы с осями координат).

4. Найти тензор T , равный произведению тензора A на тензор B ,

если $A_{ij} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$, $B^{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$.

5. Свернуть тензор T , найденный в предыдущей задаче, по первому нижнему и второму верхнему индексам.

6. Симметризовать по нижним и альтернировать по верхним индексам тензор T , найденный в задаче №4.

7. Поднять индекс у тензора A_{ij} , умножив его на тензор B^{jk} . Тензоры A и B даны в задаче №4.

Вариант 11

1. Найти производную скалярного поля $u = x^2 + \frac{1}{2}y^2$ в точке

$M_0(2, -1)$ по направлению $\bar{L}$, идущему от этой точки к точке $M(6, 2)$.

2. Найти дивергенцию векторного поля $\bar{F} = f(r) \bar{r}$,

где $\bar{r} = x \bar{i} + y \bar{j} + z \bar{k}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

3. Найти ротор векторного поля $\bar{F} = x\bar{i} - z^2\bar{j} + y^2\bar{k}$.

4. Найти тензор T , равный произведению тензора A на тензор B ,

если $A_{ij} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$, $B^{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$.

5. Свернуть тензор T , найденный в предыдущей задаче, по первому нижнему и второму верхнему индексам.

6. Симметризовать по нижним и альтернировать по верхним индексам тензор T , найденный в задаче №4.

7. Поднять индекс у тензора A_{ij} , умножив его на тензор B^{jk} . Тензоры A и B даны в задаче №4.

Вариант 12

1. Найти производную скалярного поля $u = 2xz + 2z$ по направлению винтовой линии $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = 4t$ в точке $M(x, y, z)$, соответствующей значению $t = \frac{3}{2}\pi$.

2. Найти дивергенцию векторного поля $\bar{F} = u\bar{a}$, где $u = xy^2z^3$ и $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$.

3. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{F} = z^2\bar{i}$ по границе части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, расположенной в первом октанте ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$).

4. Найти тензор T , равный произведению тензора A на тензор B , если $A_{ij} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$, $B^{ij} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$.
5. Свернуть тензор T , найденный в предыдущей задаче, по первому нижнему и второму верхнему индексам.
6. Симметризовать по нижним и альтернировать по верхним индексам тензор T , найденный в задаче №4.
7. Поднять индекс у тензора A_{ij} , умножив его на тензор B^{jk} . Тензоры A и B даны в задаче №4.

Вариант 13

1. Найти производную скалярного поля $u = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + z$ в точке $M_0(2,1,1)$ по направлению прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{2}$ в сторону возрастания поля.
2. Найти дивергенцию векторного поля $\bar{F} = f(r)\frac{\bar{r}}{r}$, где $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
3. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{F} = y^2\bar{i} + z^2\bar{j}$ вдоль контура $\gamma: x^2 + y^2 = 9, 3y + 4z = 5$.

4. Найти тензор T , равный произведению тензора A на тензор B , если $A_{ij} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$, $B^{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$.

5. Свернуть тензор T , найденный в предыдущей задаче, по первому нижнему и второму верхнему индексам.

6. Симметризовать по нижним и альтернировать по верхним индексам тензор T , найденный в задаче №4.

7. Поднять индекс у тензора A_{ij} , умножив его на тензор B^{jk} . Тензоры A и B даны в задаче №4.

Вариант 14

1. Найти производную скалярного поля $u = x^2 + y^2 - z^2$ в точке $M_0(1,3,2)$ по направлению вектора $\bar{L} = 2\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$.

2. Найти ротор векторного поля $\bar{F} = y^3\bar{i} - x^2\bar{j} + z^2\bar{k}$.

3. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{F} = y\bar{i} + z^2\bar{j}$ по контуру $\gamma : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = z$.

4. Найти тензор T , равный произведению тензора A на тензор B ,

если $A_{ij} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$, $B^{ij} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$.

5. Свернуть тензор T , найденный в предыдущей задаче, по первому нижнему и второму верхнему индексам.

6. Симметризовать по нижним и альтернировать по верхним индексам тензор T , найденный в задаче №4.

7. Поднять индекс у тензора A_{ij} , умножив его на тензор B^{jk} . Тензоры A и B даны в задаче №4.

Вариант 15

1. Найти производную скалярного поля $u = x^2 - y^2$ в точке $M_0(\sqrt{3}, 2)$ по направлению вектора $\bar{L} = \bar{i} + \sqrt{3}\bar{j}$.

2. Является ли векторное поле $\bar{F} = (y+z)\bar{i} + (x+z)\bar{j} + (x+y)\bar{k}$ потенциальным? Если «Да», то найти его потенциал.

3. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{F} = (xz + y)\bar{i} + (yz - x)\bar{j} - (x^2 - y^2)\bar{k}$ вдоль контура $\gamma: x^2 + y^2 = 1, z = 3$.

4. Найти тензор T , равный произведению тензора A на тензор B ,

$$\text{если } A_{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}, B^{ij} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

5. Свернуть тензор T , найденный в предыдущей задаче, по первому нижнему и второму верхнему индексам.

6. Симметризовать по нижним и альтернировать по верхним индексам тензор T , найденный в задаче №4.

7. Поднять индекс у тензора A_{ij} , умножив его на тензор B^{jk} . Тензоры A и B даны в задаче №4.

Вариант 16

1. Найти производную скалярного поля $u = x^3 + xy + 3y^4$ в точке $M_0(-2, 1)$ по направлению, образующему с осью Ox угол $\alpha = \frac{\pi}{6}$ и угол $\beta \geq \frac{\pi}{2}$ с осью Oy .

2. Найти ротор векторного поля $\vec{F} = (\vec{r}, \vec{a})\vec{r}$, где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

3. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = y^2\vec{i} + z^2\vec{j} + x^2\vec{k}$ вдоль контура $\gamma: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 = Rx$, ($z \geq 0$).

4. Найти тензор T , равный произведению тензора A на тензор B ,

если $A_{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$, $B^{ij} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$.

5. Свернуть тензор T , найденный в предыдущей задаче, по первому нижнему и второму верхнему индексам.

6. Симметризовать по нижним и альтернировать по верхним индексам тензор T , найденный в задаче №4.

7. Поднять индекс у тензора A_{ij} , умножив его на тензор B^{jk} . Тензоры A и B даны в задаче №4.

Вариант 17

1. Найти производную скалярного поля $u = (x^2 + y^2)z$ по направлению винтовой линии

$\vec{r}(t) = \cos t \cdot \vec{i} + \sin t \cdot \vec{j} + t \cdot \vec{k}$ в точке M_0 , отвечающей значению $t = \pi$.

2. Найти дивергенцию векторного поля $\vec{F} = \vec{r}^2 \vec{c}$, где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{c}$ - постоянный вектор.

3. Найти $\text{rot}(\vec{r}, \vec{a})\vec{b}$, где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$.

4. Найти тензор T , равный произведению тензора A на тензор B ,

если $A_{ij} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$, $B^{ij} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$.

5. Свернуть тензор T , найденный в предыдущей задаче, по первому нижнему и второму верхнему индексам.

6. Симметризовать по нижним и альтернировать по верхним индексам тензор T , найденный в задаче №4.

7. Поднять индекс у тензора A_{ij} , умножив его на тензор B^{jk} . Тензоры A и B даны в задаче №4.

Вариант 18

1. Найти производную скалярного поля $u = \ln(e^x + e^y)$ в направлении, параллельном биссектрисе первого координатного угла.

2. Найти ротор векторного поля $\vec{F} = \sin(2x - y - z) \cdot (2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$.

3. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{F} = y\bar{i} + z\bar{j} + x\bar{k}$ по окружности $\gamma: x^2 + y^2 + z^2 = r^2, x + y + z = 0$, пробегаемой против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительной оси Ox .
4. Найти тензор T , равный произведению тензора A на тензор B ,
если $A_{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, B^{ij} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$.
5. Свернуть тензор T , найденный в предыдущей задаче, по первому нижнему и второму верхнему индексам.
6. Симметризовать по нижним и альтернировать по верхним индексам тензор T , найденный в задаче №4.
7. Поднять индекс у тензора A_{ij} , умножив его на тензор B^{jk} .
Тензоры A и B даны в задаче №4.

Вариант 19

1. Найти производную функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точке $M_0(1,1,1)$ по направлению вектора $\bar{L} = \{\sqrt{2}; 1; 1\}$.
2. Найти дивергенцию векторного поля $\bar{F} = (4x^2z + 3)\bar{i} + (2xy - 3)\bar{j} + (6xyz - 9)\bar{k}$.
3. Какова должна быть функция $f(x, z)$, чтобы ротор векторного поля $\bar{F} = yz\bar{i} + f(x, z)\bar{j} + xy\bar{k}$ совпадал с вектором $\bar{k} - \bar{i}$?
4. Найти тензор T , равный произведению тензора A на тензор B ,

если $A_{ij} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$, $B^{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$.

5. Свернуть тензор T , найденный в предыдущей задаче, по первому нижнему и второму верхнему индексам.

6. Симметризовать по нижним и альтернировать по верхним индексам тензор T , найденный в задаче №4.

7. Поднять индекс у тензора A_{ij} , умножив его на тензор B^{jk} . Тензоры A и B даны в задаче №4.

Вариант 20

1. Найти производную функции $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ в точке

$M_0(3, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ в направлении радиуса - вектора этой точки.

2. Найти ротор векторного поля

$$\vec{F} = x^2 y^2 z^2 \vec{i} - x y z \vec{j} + (x + y + z) \vec{k}.$$

3. Вычислить циркуляцию векторного поля

$$\vec{F} = (y + z) \vec{i} + (x + z) \vec{j} + (x + y) \vec{k} \text{ вдоль окружности}$$

$$\gamma : x^2 + y^2 + z^2 = r^2, x + y + z = 0.$$

4. Найти тензор T , равный произведению тензора A на тензор B ,

если $A_{ij} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$, $B^{ij} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$.

5. Свернуть тензор T , найденный в предыдущей задаче, по первому нижнему и второму верхнему индексам.

6. Симметризовать по нижним и альтернировать по верхним индексам тензор T , найденный в задаче №4.

7. Поднять индекс у тензора A_{ij} , умножив его на тензор B^{jk} . Тензоры A и B даны в задаче №4.

Вариант 21

1. Найти производную функции $u = x^2 yz$ в направлении, составляющем с осями координат равные углы, в точке $M_0(1, 2, 1)$.

2. Вычислить дивергенцию векторного поля

$$\bar{F} = e^{xy} \cos z \cdot \bar{i} + \arctg \frac{x}{y} \sin z \cdot \bar{j} + ctgz \cdot \bar{k} \text{ в точке } M_0(-1, 1, \frac{\pi}{2}).$$

3. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{F} = y\bar{i} - 2z\bar{j} + x\bar{k}$ вдоль эллипса, образованного сечением гиперboloида $2x^2 - y^2 + z^2 = r^2$ плоскостью $y = x$ в положительном направлении относительно орты $\bar{i}$.

4. Найти тензор T , равный произведению тензора A на тензор B , если $A_{ij} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$, $B^{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$.

5. Свернуть тензор T , найденный в предыдущей задаче, по первому нижнему и второму верхнему индексам.

6. Симметризовать по нижним и альтернировать по верхним индексам тензор T , найденный в задаче №4.

7. Поднять индекс у тензора A_{ij} , умножив его на тензор B^{jk} . Тензоры A и B даны в задаче №4.

Вариант 22

1. Найти производную скалярного поля $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $M_0(3,4)$ по направлению биссектрисы первого координатного угла.

2. Найти ротор векторного поля

$$\vec{F} = (x - y + 3z)\vec{i} + (y - 3x + z)\vec{j} + (x - 3y + z)\vec{k}.$$

3. Вычислить дивергенцию векторного поля

$$\vec{F} = \ln \frac{xy}{z} \cos y \cdot \vec{i} + \arcsin \frac{y}{x} \cdot \vec{j} + \frac{1}{x} \ln \frac{z}{y} \cdot \vec{k} \quad \text{в точке}$$

$$M_0\left(\frac{5}{9}\pi, -\frac{\pi}{3}, -2\right).$$

4. Найти тензор T , равный произведению тензора A на тензор B ,

$$\text{если } A_{ij} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}, B^{ij} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

5. Свернуть тензор T , найденный в предыдущей задаче, по первому нижнему и второму верхнему индексам.

6. Симметризовать по нижним и альтернировать по верхним индексам тензор T , найденный в задаче №4.

7. Поднять индекс у тензора A_{ij} , умножив его на тензор B^{jk} .

Тензоры A и B даны в задаче №4.

Вариант 23

1. Найти производную скалярного поля $u = \sqrt{x^2 + 4y^2}$ в точке $M_0(3,2)$ по направлению радиуса – вектора точки M_0 .

2. Найти ротор векторного поля
 $\vec{F} = xyz \vec{i} + (x + y + z) \vec{j} - x^2 y^2 \vec{k}$.

3. Найти дивергенцию векторного поля

$$\vec{F} = \sqrt{1 - \ln^2(xyz)} \vec{i} + \arccos \frac{x}{5z} \vec{j} + \frac{\ln 2}{\sqrt[3]{x}} \vec{k}$$

4. Найти тензор T , равный произведению тензора A на тензор B ,

если $A_{ij} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$, $B^{ij} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$.

5. Свернуть тензор T , найденный в предыдущей задаче, по первому нижнему и второму верхнему индексам.

6. Симметризовать по нижним и альтернировать по верхним индексам тензор T , найденный в задаче №4.

7. Поднять индекс у тензора A_{ij} , умножив его на тензор B^{jk} . Тензоры A и B даны в задаче №4.

Вариант 24

1. Найти производную функции $u = \ln(x + 2y^2)$ в точке $M_0(3,1)$ по направлению вектора $\vec{L} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$.

2. Найти дивергенцию векторного поля $\bar{F} = r^4 \bar{r}$, где $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

3. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{F} = y^2\bar{i} + xy\bar{j} + (x^2 + y^2)\bar{k}$ по контуру, вырезаемому в первом октанте из параболоида $x^2 + z^2 = Rz$ плоскостями $x = 0, y = 0, z = R$ в положительном направлении относительно внешней нормали параболоида.

4. Найти тензор T , равный произведению тензора A на тензор B ,

если $A_{ij} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$, $B^{ij} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$.

5. Свернуть тензор T , найденный в предыдущей задаче, по первому нижнему и второму верхнему индексам.

6. Симметризовать по нижним и альтернировать по верхним индексам тензор T , найденный в задаче №4.

7. Поднять индекс у тензора A_{ij} , умножив его на тензор B^{jk} . Тензоры A и B даны в задаче №4.

Вариант 25

1. Найти производную функции $z = \arctg \frac{y}{x}$ в точках $M_1(1,3)$ и $M_2(2,1)$ по направлению вектора $\bar{L} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$.
2. Найти ротор векторного поля $\bar{F} = (x^2 + y^2 + 2Rx)\bar{i} + R(x + y)\bar{j}$.

3. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{F} = x^2 y^3 \bar{i} + \bar{j} + z \bar{k}$ вдоль окружности $x^2 + y^2 = R^2$.

4. Найти тензор T , равный произведению тензора A на тензор B ,

если $A_{ij} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$, $B^{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$.

5. Свернуть тензор T , найденный в предыдущей задаче, по первому нижнему и второму верхнему индексам.

6. Симметризовать по нижним и альтернировать по верхним индексам тензор T , найденный в задаче №4.

7. Поднять индекс у тензора A_{ij} , умножив его на тензор B^{jk} . Тензоры A и B даны в задаче №4.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Л.И.Коваленко. Элементы векторного анализа / Л.И.Коваленко, Изд.МФТИ,2000.-35с.
2. А.И. Борисенко. Векторный анализ и начала тензорного исчисления / А.И. Борисенко, И.Е. Тарапов – Харьков, Вища школа,1986.- 215 с.
3. З.Д. Захарова. Теория поля- Методические указания, СевГТУ,2001.- 38 с.

Научный редактор редакционно –
издательского совета СевНТУ,
д-р техн.наук,профессор

В.К. Маригодов

Директор библиотеки

Н.Л. Ржевцева

Нормоконтролер,
инженер 1-й категории

И.А. Черевкова

Заказ № _____ от _____ 2010 г. Тираж _____ экз.
Изд-во СевНТУ