

Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный технический университет



ИССЛЕДОВАНИЕ РЯДОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАКЕТА MathCAD

Методические указания и варианты контрольных заданий по теме модуля в дисциплине «Высшая математика» для студентов технических специальностей



Севастополь
2010

УДК 517(075.8)

Исследование рядов с использованием пакета MathCAD. Методические указания и варианты контрольных заданий по теме модуля в дисциплине «Высшая математика» для студентов технических специальностей/ Сост.: Е.Н. Ларионова, С.Ф. Ледяев – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2010.-40 с.

Целью методических указаний является оказание помощи студентам технических специальностей в выполнении модульной работы по разделу «Числовые и функциональные ряды».

Разработан комплекс заданий для работы студентов по теме модуля. Каждое практическое задание содержит 30 вариантов. Для каждого задания даны краткие теоретические пояснения. Приведены примеры выполнения задач как ручным способом, так и с применением компьютерного пакета MathCAD.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры высшей математики, протокол №4 от 11 февраля 2010 года.

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: доцент кафедры высшей математики
В.И. Мордашев

СОДЕРЖАНИЕ

Задания по теме «Числовые и функциональные ряды».	3
Указания к выполнению заданий и примеры решения	15

Задания по теме «Числовые и функциональные ряды»

Задание 1. Найти сумму числового ряда

$$1.1 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{9n^2 - 12n - 5}. \quad 1.2 \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{4n^2 - 9}. \quad 1.3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}.$$

$$1.4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{49n^2 - 84n - 13}. \quad 1.5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}. \quad 1.6 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 2}.$$

$$1.7 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{36n^2 + 12n - 35}. \quad 1.8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{7^n}. \quad 1.9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 + 6n - 8}.$$

$$1.10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2 + 8n - 15}. \quad 1.11 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}. \quad 1.12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 4n - 3}.$$

$$1.13 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 + 12n - 5}. \quad 1.14 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{8^n}. \quad 1.15 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3}.$$

$$1.16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 70n - 24}. \quad 1.17 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 3^n}{8^n}. \quad 1.18 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{6}{n^2 + n - 2}.$$

$$1.19 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{15 - 8n - 16n^2}. \quad 1.20 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2}{4^n}. \quad 1.21 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^n}{3^n}.$$

$$1.22 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{49n^2 - 70n - 24}. \quad 1.23 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 7^n}{12^n}. \quad 1.24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{18}{9n^2 - 3n - 2}.$$

$$1.25 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n-1)}. \quad 1.26 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 6^n}{12^n}. \quad 1.27 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 0,75}.$$

$$1.28 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}. \quad 1.29 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 1}{5^n}. \quad 1.30 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+1)}.$$

Ответы. 1.1) $\frac{5}{24}$. 1.2) $-\frac{1}{18}$. 1.3) $\frac{1}{3}$. 1.4) $\frac{5}{84}$. 1.5) $\frac{13}{6}$. 1.6) $\frac{11}{18}$. 1.7) $\frac{2}{21}$.

1.8) $\frac{25}{12}$. 1.9) $\frac{5}{24}$. 1.10) $\frac{3}{20}$. 1.11) $\frac{3}{2}$. 1.12) 0. 1.13) $\frac{7}{60}$. 1.14) 2. 1.15) $\frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned}
 & 1.16) \frac{3}{20} \cdot 1.17) \frac{26}{35} \cdot 1.18) \frac{11}{3} \cdot 1.19) \frac{-3}{4} \cdot 1.20) \frac{11}{3} \cdot 1.21) \frac{5}{2} \cdot 1.22) \frac{3}{28} \cdot \\
 & 1.23) \frac{19}{10} \cdot 1.24) 6 \cdot 1.25) \frac{1}{2} \cdot 1.26) \frac{12}{7} \cdot 1.27) \frac{4}{3} \cdot 1.28) \frac{1}{3} \cdot 1.29) \frac{5}{4} \cdot 1.30) \frac{1}{2} \cdot
 \end{aligned}$$

Задание 2. Исследовать на сходимость числовые ряды. Правильность вычисления пределов проверить в пакете MathCAD.

$$2.1 \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n \cdot (n+1)}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+9} \right)^{n^2}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n\sqrt{n}}.$$

$$2.2 \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n \cdot n}{(n+1)!}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+2} \right)^n; \text{ в) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^8}}.$$

$$2.3 \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n!(n+7)}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \left(\frac{1}{n^2+5} \right); \text{ в) } \sum_{n=2}^{\infty} n \frac{\ln n}{n^2+3}.$$

$$2.4 \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{3^{n-1} \cdot (n+1)}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{5n+3} \right)^{n^2}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{\pi n}{3}}{3^n+2}.$$

$$2.5 \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(n+1)}{5^n}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \left(\frac{n}{n^2+3} \right); \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\pi n}{6}}{2^n+3}.$$

$$2.6 \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \cdot (2n)!}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^{n^3}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$2.7 \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n-1}}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} 7^n \operatorname{arctg}^n \frac{\pi}{7n}; \text{ в) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n^5+n^4}}.$$

$$2.8 \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^n}{n!}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-1}{n^2+3} \right)^n \cdot n^2; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-2}{n^4+5n}.$$

$$2.9 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{7^n \cdot n^2}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{4n+1} \right)^{2n}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2 \cdot (n+2)^3}.$$

$$2.10 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)!}{n^3 \cdot 5^n}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^n; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^2(8n^4+3)}}.$$

$$2.11 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)!}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{2n-1} \right)^n; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

$$2.12 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3n)!}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n^2}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{4n^2}.$$

$$2.13 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7 \cdot n!}{n^n}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n+7} \right)^{2n}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \sin n}{6n^2-1}.$$

$$2.14 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{5^n \cdot n^2}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n-1} \right)^n; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin \frac{2+(-1)^n}{n^3}.$$

$$2.15 \text{ a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{6^n \cdot (n^3-1)}{n!}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n-1)^n}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2 + \ln n}.$$

$$2.16 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{90}}{3^n}; \text{ б) } \sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin(\pi n/4)}{n^2}.$$

$$2.17 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}; \text{ б) } \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3n-4}{3n+2} \right)^{\frac{n^2}{3}}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{6n^5 + \cos^2 n}.$$

$$2.18 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{4^n \cdot n!}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}; \text{ в) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{\sqrt{n^5}}.$$

$$2.19 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} n! \sin \frac{\pi}{3^n}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{4n-1} \right)^{n^2}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4 n}{n^2+1}.$$

$$2.20 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n \cdot (n+5)}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+5} \right)^{n^2}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+5n}{2n^3-n^2}.$$

$$2.21 \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot \sqrt{n}}{n!}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+5} \right)^{n^2}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}^2 n}{4\sqrt[4]{n^7}}.$$

$$2.22 \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{(2n)!\sqrt{n}}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{5n+2} \right)^{n^2}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{90n^2-4}.$$

$$2.23 \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (2n+1)!}{2^n}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{5n-4} \right)^{n^2}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^3+2n-2}.$$

$$2.24 \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n \cdot \sqrt{n}}{(n+1)!}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \cdot \frac{1}{2^{n^2}}; \text{ в) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arcsin \frac{n-1}{2n}}{\sqrt{n^2+n}}.$$

$$2.25 \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{2^n n!}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{8n^2+3} \right)^n; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi n/4)}{5^n+1}.$$

$$2.26 \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} (1+n) \operatorname{tg} \frac{\pi}{3^n}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2n} \cdot \frac{1}{4^n}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+2)n}.$$

$$2.27 \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 \sqrt{n}}{(2n)!}; \text{ б) } \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{3n+7} \right)^{n^2}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{n}{2n^2+3}}{\sqrt{n+1}}.$$

$$2.28 \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n^2+1)}{(n+1)!}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} \cdot \frac{1}{3^n}; \text{ в) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{2n^3+3n+1}.$$

$$2.29 \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)! 3^n}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^n \cdot \frac{n}{5^n}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt[3]{n}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{\pi}{4\sqrt[3]{n}}.$$

$$2.30 \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n!}{(2n)!}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-1}{7n^2+3} \right)^n \cdot n^n; \text{ в) } \sum_{n=2}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{n-1}.$$

Задание 3. Исследовать на сходимость знакочередующийся числовой ряд. Выяснить, сходится ряд условно или абсолютно. Для случая б) найти сумму ряда с указанной точностью α .

$$3.1 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2(n+1)}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n^2(n+1)}, \alpha = 0,01.$$

$$3.2 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2n+1}{n(n+1)}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!}, \alpha = 0,01.$$

$$3.3 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln^2(n+1)}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(2n)^3}, \alpha = 0,01.$$

$$3.4 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + 4n}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n!(2n+1)}, \alpha = 0,01.$$

$$3.5 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+3) \ln^4(n+3)}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, \alpha = 0,01.$$

$$3.6 \text{ a) } \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{2^n}, \alpha = 0,1.$$

$$3.7 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \cdot n}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{5^n}, \alpha = 0,1.$$

$$3.8 \text{ a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 \sqrt[4]{\ln n}}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n+1)}{4^n}, \alpha = 0,1.$$

$$3.9 \text{ a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n^3 \ln n}}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^n}, \alpha = 0,01.$$

$$3.10 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{5n-2}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)! 2^n}, \alpha = 0,01.$$

$$3.11 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n+1}{n^2 + n}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2(n+3)}, \alpha = 0,01.$$

$$3.12 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (5n+3)}{n(n+1)(n+2)}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{(n+1)^n}, \alpha = 0,01.$$

$$3.13 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \sqrt{\ln(2n)}}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n+1)}{6^n}, \alpha = 0,01.$$

$$3.14 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n \ln^3(3n)}; \text{ б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{3^n (n+1)}, \alpha = 0,01.$$

$$3.15 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n \cdot \ln^2(4n)}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4^n (2n+1)}, \alpha = 0,01.$$

$$3.16 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4 \sqrt[3]{2n+3}}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n (n+1)!}, \alpha = 0,01.$$

$$3.17 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt[8]{n^2+2n}}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(4n)^4}, \alpha = 0,01.$$

$$3.18 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot \ln^3(5n)}; \text{ б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n \cdot (2n+1)!}, \alpha = 0,01.$$

$$3.19 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{\sqrt{n^5}}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n (n+1)!}, \alpha = 0,01.$$

$$3.20 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+2) \ln^2(n+2)}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(-1)^n}{(n+1)^2 n^2}, \alpha = 0,01.$$

$$3.21 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n \cdot (-1)^n}{4n^2+5}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{2^n \cdot (n+3)}, \alpha = 0,01.$$

$$3.22 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot \cos \frac{\pi}{n}}{n^2}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+3n}, \alpha = 0,01.$$

$$3.23 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sin(1/n)}{\sqrt[3]{n+11}}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4+2n^3}, \alpha = 0,01.$$

$$3.24 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n^2+5)^2}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+1)^{n+1}}, \alpha = 0,01.$$

$$3.25 \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n+1)}{(n^2+2n)^3}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!(2n-1)}, \alpha = 0,01.$$

$$3.26 \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{1+n}{1+n^2} \right)^2 ; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{(n+1)!}, \quad \alpha = 0,01.$$

$$3.27 \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n-1)}{(n^2 - n + 6)^3}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (3n-1)}{n(n^2 + 1)}, \quad \alpha = 0,01.$$

$$3.28 \text{ а) } \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{(n^2 - 3) \ln n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n+2)}{7^{n+1}}, \quad \alpha = 0,01.$$

$$3.29 \text{ а) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n^2 - n)}{n^4 - n^2 + 1}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(4n^2 - 1)^2}, \quad \alpha = 0,01.$$

$$3.30 \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2n+3}{(n^2 + 6n)^4}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi/2 + \pi n)}{n^3}, \quad \alpha = 0,01.$$

Задание 4. Найти интервал сходимости степенного ряда. На отрезке, лежащем внутри интервала сходимости, построить графики частичных сумм ряда $S_1(x)$ и $S_{10}(x)$.

$$4.1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x-5)^n}{(n+4) \ln(n+4)}.$$

$$4.2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n.$$

$$4.3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n \cdot (-1)^n}{(2n-3)(3n-2)}.$$

$$4.4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{3n+8}.$$

$$4.5 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{4^n \cdot n} (x+1)^n.$$

$$4.6 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot (x-2)^n}{n+2}.$$

$$4.7 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n^n} 2^n.$$

$$4.8 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt[3]{n^3 - 7}}.$$

$$4.9 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{(2n-3)^2}.$$

$$4.10 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (x-1)^n}{2^n (2n+1)}.$$

$$4.11 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{2n-1}}{(2n-1) \cdot (2n-1)!}.$$

$$4.12 \quad \sum_{n=1}^{\infty} n 3^{n-1} \cdot x^{n-1}.$$

$$4.13 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1} \cdot \sqrt{n^2+1}}.$$

$$4.15 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+(-1)^n}{n(n-1)} \cdot (x-1)^n.$$

$$4.17 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+3)^n}{2^n}.$$

$$4.19 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n) \cdot 4^n}.$$

$$4.21 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-2)^n}{n^n}.$$

$$4.23 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} \cdot (x+2)^{2n-1}}{(4n-3)^2}.$$

$$4.25 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(x+2)^n \cdot n^2}{n!}.$$

$$4.27 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (x+3)^{2n}}{n+5}.$$

$$4.29 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)^3 \cdot (x+3)^{2n}}{2n-1}.$$

$$4.14 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt{8n^4+1}}.$$

$$4.16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x+1)^n}{2^n \cdot n}.$$

$$4.18 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot (x-3)^n}{n!(2n-1)}.$$

$$4.20 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 9n}.$$

$$4.22 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{10^{n-1} \cdot (n+3)}.$$

$$4.24 \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot (x-6)^{2n-2}.$$

$$4.26 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{4n-3}}{4n-3}.$$

$$4.28 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (5x)^n}{n!(2n+5)}.$$

$$4.30 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n}.$$

Задание 5. Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 . Определить интервал сходимости полученного ряда. Проверить правильность вычисления коэффициентов ряда их непосредственным вычислением в MathCAD.

$$5.1 \quad f(x) = \frac{1}{x^2 - 12x + 40}, \quad x_0 = 6. \quad 5.2 \quad f(x) = \frac{1}{5+x}, \quad x_0 = 2.$$

$$5.3 \quad f(x) = \ln(1-x-6x^2), \quad x_0 = 0. \quad 5.4 \quad f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x_0 = 0.$$

$$5.5 \quad f(x) = \ln(2-5x), \quad x_0 = -3. \quad 5.6 \quad f(x) = \frac{1}{3-2x+x^2}, \quad x_0 = 1.$$

$$5.7 \quad f(x) = \ln(1-x-20x^2), \quad x_0 = 0 \quad 5.8 \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{25-4x}}, \quad x_0 = 0.$$

$$5.9 \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+25}}, \quad x_0 = 3. \quad 5.10 \quad f(x) = \frac{1}{2-x-x^2}, \quad x_0 = 0.$$

$$5.11 \quad f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}, \quad x_0 = 0. \quad 5.12 \quad f(x) = \frac{1}{6+x-x^2}, \quad x_0 = 0.$$

$$5.13 \quad f(x) = x \cdot \ln(10+x), \quad x_0 = 0.$$

$$5.14 \quad f(x) = x^3 \cdot \sqrt{4-3x}, \quad x_0 = 0.$$

$$5.15 \quad f(x) = \sqrt{16-2x}, \quad x_0 = 0. \quad 5.16 \quad f(x) = \frac{x}{x^2-6x+13}, \quad x_0 = 3.$$

$$5.17 \quad f(x) = \ln(x^2+3x+2), \quad x_0 = 0.$$

$$5.18 \quad f(x) = \frac{1}{8+2x-x^2}, \quad x_0 = 0. \quad 5.19 \quad f(x) = \frac{3x+1}{x^2-3x+2}, \quad x_0 = 0.$$

$$5.20 \quad f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x_0 = 0. \quad 5.21 \quad f(x) = \frac{x+1}{2-x-x^2}, \quad x_0 = 0.$$

$$5.22 \quad f(x) = \frac{5x+7}{2x^2-x-15}, \quad x_0 = 0.$$

$$5.23 \quad f(x) = \frac{x}{4+x^2}, \quad x_0 = 0. \quad 5.24 \quad f(x) = \sqrt[3]{27-x}, \quad x_0 = 0.$$

$$5.25 \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{27+x}}, \quad x_0 = 0.$$

$$5.26 \quad f(x) = \frac{3x-5}{x^2-4x+3}, \quad x_0 = 0.$$

$$5.27 \quad f(x) = \frac{x}{9+x^2}, \quad x_0 = 0. \quad 5.28 \quad , \quad x_0 = 2.$$

$$5.29 \quad f(x) = \frac{1}{2-3x+x^2}, \quad x_0 = 0. \quad 5.30 \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{27-x}}, \quad x_0 = 0.$$

Задание 6. Приложения рядов Тейлора.

В вариантах 6.1 – 6.10 найти разложение в степенной ряд решения дифференциального уравнения.

6.1 $y' - y^2 = e^{2x}$, $y(0) = 0$ до x^4

6.2 $y' - y^2 = x(x+1)$, $y(0) = 2$ до x^4

6.3 $y'' - (1+x^2)y = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 2$ до x^5 .

6.4 $y'' = x \cdot \sin(y')$, $y(1) = 0$, $y'(1) = \pi/2$ до $(x-1)^6$.

6.5 $y' - y^2 = e^x$, $y(0) = 0$ до x^5 .

6.6 $y' - x^2y = x^3$, $y(0) = 0$ до x^4 .

6.7 $y'' = y' - e^x$, $y(0) = y'(0) = 0$ до x^5

6.8 $y'' + xy' = y$, $y(0) = 2$; $y'(0) = 0$ до x^5

6.9 $y'' - e^x y = 0$, $y(0) = y'(0) = 1$ до x^6

6.10 $2y'' + 5y' = e^x$, $y(0) = 3$; $y'(0) = -1$ до x^5 .

В вариантах 6.11 – 6.20 вычислить определенный интеграл с точностью 0,001, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и проинтегрировав её почленно.

6.11 $\int_0^{0,5} \frac{\arctg x}{x} dx$. 6.12 $\int_0^1 \cos(x^2) dx$. 6.13 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x/5)}{x} dx$.

6.14 $\int_0^1 x^3 \arctg x dx$. 6.15 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$. 6.16 $\int_0^1 \frac{1}{x} \ln(1+x^2) dx$.

6.17 $\int_0^1 e^{-x^2} dx$. 6.18 $\int_0^{0,5} \cos(x^3) dx$.

6.19 $\int_0^1 \sin(x^3) dx$. 6.20 $\int_0^{0,5} \frac{\sin(x^2)}{x} dx$.

В вариантах 6.21 – 6.30 вычислить значение функции с точностью 0,001, пользуясь их разложением в ряд Тейлора.

6.21 $\sqrt[4]{10}$. 6.22 $\ln 1,2$. 6.23 $\ln 0,9$. 6.24 $\sqrt[6]{65}$.

$$\begin{array}{lll}
 6.25 \ln 5. & 6.26 \sqrt[5]{250}. & 6.27 \sqrt[3]{520}. \\
 6.28 \sin 10^\circ. & 6.29 \cos 10^\circ. & 6.30 \sqrt[4]{12}.
 \end{array}$$

Задание 7. Задана периодическая с периодом T функция $f(x)$. Используя математический пакет MathCAD, разложить функцию в ряд Фурье на указанном интервале. Построить график функции и графики частичных сумм ряда Фурье при $n = 5$ и $n = 15$. Найти и построить графически спектр амплитуд функции до $n = 20$. Все расчеты выполнить по прилагаемой программе.

$$7.1 \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1; 0); \\ 2 - x, & 0 \leq x < 1. \end{cases} \quad T = 2.$$

$$7.2 \quad f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-1; 0); \\ x, & 0 \leq x < 1. \end{cases} \quad T = 2.$$

$$7.3 \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-1; 0); \\ 1, & 0 \leq x < 1. \end{cases} \quad T = 2.$$

$$7.4 \quad f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (-1; 0); \\ 2, & 0 \leq x < 1. \end{cases} \quad T = 2$$

$$7.5 \quad f(x) = \begin{cases} -2x, & x \in (-1; 0); \\ 1, & 0 \leq x < 1. \end{cases} \quad T = 2.$$

$$7.6 \quad f(x) = \begin{cases} 2, & x \in (-1; 0); \\ x, & 0 \leq x < 1. \end{cases} \quad T = 2.$$

$$7.7 \quad f(x) = \begin{cases} 2, & x \in (-1; 0); \\ x - 1, & 0 \leq x < 1. \end{cases} \quad T = 2.$$

$$7.8 \quad f(x) = \begin{cases} -2, & x \in (-1; 0); \\ 2 - x, & 0 \leq x < 1. \end{cases} \quad T = 2.$$

$$7.9 \quad f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \in (-1; 0); \\ x + 1, & 0 \leq x < 1. \end{cases} \quad T = 2.$$

$$7.10 \quad f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (-1; 0); \\ 2x-1, & 0 \leq x < 1. \end{cases} \quad T = 2.$$

$$7.11 \quad f(x) = \begin{cases} 2, & x \in (-2; 1); \\ 2-x, & 1 \leq x < 2. \end{cases} \quad T = 4.$$

$$7.12 \quad f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-2; -1); \\ -x, & -1 \leq x < 2. \end{cases} \quad T = 4.$$

$$7.13 \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-2; -1); \\ 1, & -1 \leq x < 2. \end{cases} \quad T = 4.$$

$$7.14 \quad f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (-2; 1); \\ 1, & 1 \leq x < 2. \end{cases} \quad T = 4.$$

$$7.15 \quad f(x) = \begin{cases} -2x, & x \in (-1; 1); \\ 1, & 1 \leq x < 2. \end{cases} \quad T = 4.$$

$$7.16 \quad f(x) = \begin{cases} 3, & x \in (-2; -1); \\ x, & -1 \leq x < 2. \end{cases} \quad T = 4.$$

$$7.17 \quad f(x) = \begin{cases} 2, & x \in (-2; -1); \\ x-1, & -1 \leq x < 2. \end{cases} \quad T = 4.$$

$$7.18 \quad f(x) = \begin{cases} -2, & x \in (-2; -1); \\ 2-x, & -1 \leq x < 2. \end{cases} \quad T = 4.$$

$$7.19 \quad f(x) = \begin{cases} -2, & x \in (-2; -1) \cup (1; 2); \\ 2-x, & -1 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad T = 4.$$

$$7.20 \quad f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-2; -1) \cup (1; 2); \\ x+1, & -1 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad T = 4.$$

$$7.21 \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-2; -1) \cup (1; 2); \\ x+1, & -1 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad T = 4.$$

$$7.22 \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-2; -1) \cup (1; 2); \\ 2, & -1 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad T = 4.$$

$$7.23 \quad f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (-2; -1) \cup (1; 2); \\ -2, & -1 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad T = 4.$$

$$7.24 \quad f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (-2; -1) \cup (1; 2); \\ -2, & -1 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad T = 4.$$

$$7.25 \quad f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in (-2; -1) \cup (1; 2); \\ -2, & -1 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad T = 4.$$

$$7.26 \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-2; -1) \cup (1; 2); \\ x-2, & -1 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad T = 4.$$

$$7.27 \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-2; -1) \cup (1; 2); \\ 2x, & -1 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad T = 4.$$

$$7.28 \quad f(x) = \begin{cases} x-1, & x \in (-1; 0); \\ 2x+1, & 0 \leq x < 1. \end{cases} \quad T = 4.$$

$$7.29 \quad f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-2; -1) \cup (1; 2); \\ 1, & -1 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad T = 4.$$

$$7.30 \quad f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (-2; 1); \\ -1, & 1 \leq x < 2. \end{cases} \quad T = 4.$$

Указания к выполнению заданий и примеры решения

Задание 1. Найти сумму числового ряда:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(3n-2)(3n+1)}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{7^n}.$$

Теория к выполнению задания.

Пусть $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n, \dots$ бесконечная числовая последовательность.

Числовым рядом называется выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots \quad (1)$$

Индекс, стоящий у каждого члена ряда, указывает его порядковый номер в ряде. Выражение для U_n , зависящее от номера n и являющееся функцией номера, называется *общим членом ряда*.

Сумма n первых членов ряда называется его n -ой *частичной суммой*, что обозначается

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n. \quad (2)$$

Если существует конечный предел частичной суммы при $n \rightarrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \quad (3)$$

то его называют *суммой ряда*, а ряд (1) называется *сходящимся*. Если предел (3) частичной суммы не существует или бесконечен, ряд называется *расходящимся*.

Одно из свойств сходящихся числовых рядов:

Теорема. Если сходятся ряды $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots$ и $V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n + \dots$, то будет сходиться и ряд, полученный от почленного сложения и вычитания членов этих рядов, т.е. будет сходиться ряд

$$(U_1 \pm V_1) + (U_2 \pm V_2) + \dots + (U_n \pm V_n) + \dots$$

Решение

а) Определим формулу n -ой частичной суммы. Для этого общий член ряда разложим на сумму простейших дробей.

Разложение на простейшие дроби удобно выполнять в пакете MathCAD. Набираем выражение, не забывая вводить знак умножения (*), затем выделяем переменную n и щелкаем по строке **Convert to Partial Fraction** в пункте **Variable** меню **Symbolics**. Получим:

$$\frac{5}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{5}{3(3n-2)} - \frac{5}{3(3n+1)}$$

Теперь записываем n -ую частичную сумму ряда:

$$S_n = \left(\frac{5}{3} - \frac{5}{12} \right) + \left(\frac{5}{12} - \frac{5}{21} \right) + \left(\frac{5}{21} - \frac{5}{30} \right) + \dots + \left(\frac{5}{3(3n-2)} - \frac{5}{3(3n+1)} \right).$$

Раскроем скобки и сократим подобные слагаемые. Получим:

$$S_n = \frac{5}{3} - \frac{5}{3(3n+1)}. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{3} - \frac{5}{3(3n+1)} \right) = \frac{5}{3}. \quad S = \frac{5}{3}.$$

б) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{7^n}$ представим суммой двух рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{7^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n.$$

Каждый из двух полученных рядов является суммой бесконечной геометрической прогрессии со знаменателями $\frac{1}{7}$ и $\frac{3}{7}$. Выполняется условие $|q| < 1$. По формуле для суммы бесконечной геометрической прогрессии $b_1 + b_1q + b_1q^2 + \dots + b_1q^n + \dots = \frac{b_1}{1-q}$, получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} = \frac{1/7}{1-1/7} = \frac{1}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n = \frac{3/7}{1-3/7} = \frac{3}{4}.$$

Сумма ряда $S = \frac{1}{6} + \frac{3}{4} = \frac{11}{12}$.

Примечание – проверку правильности решения выполним в пакете MathCAD. Для этого на панели инструментов находим оператор суммирования и щелчком выводим его на рабочее поле. Затем набираем общий член ряда, ставим пределы суммирования. Выведем с панели инструментов стрелку, получим результат:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(3 \cdot n - 2) \cdot (3 \cdot n + 1)} \rightarrow \frac{5}{3} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + 3^n)}{7^n} \rightarrow \frac{11}{12}$$

Отмечаем, что результаты ручного и машинного счета совпадают.

Задание 2. Исследовать на сходимость числовые ряды. Правильность вычисления пределов проверить в пакете MathCAD.

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{(2n+1)!}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 3} \right)^{n^2}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin^2 \frac{1}{n+1}}{\sqrt{n+3}}.$$

Решение

Даны числовые ряды с положительными членами.

а) Если общий член ряда содержит факториал, то для исследования на сходимость удобнее всего использовать признак Даламбера.

Признак Даламбера

Пусть для ряда с положительными членами

$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots$ существует предел отношения

$$n+1\text{-го члена к } n\text{-му, т.е. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = q.$$

Если $q < 1$, то ряд сходится; если $q > 1$, то расходится. В случае $q = 1$ признак не даёт ответа о сходимости ряда.

В нашем случае $U_n = \frac{3^n \cdot n!}{(2n+1)!}$. Тогда

$$U_{n+1} = \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{(2(n+1)+1)!} = \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{(2n+3)!} = \frac{3 \cdot 3^n \cdot n! \cdot (n+1)}{(2n+1)! \cdot (2n+2)(2n+3)}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 3^n \cdot n! \cdot (n+1)}{(2n+1)! \cdot (2n+2)(2n+3)} \cdot \frac{(2n+1)!}{3^n \cdot n!} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(n+1)}{(2n+2)(2n+3)} = 0 < 1. \text{ Ряд сходится.}$$

б) Рекомендуем использовать радикальный признак Коши.

Радикальный признак Коши

Пусть для ряда с положительными членами существует предел

$$\text{корня } n\text{-ой степени из } n\text{-го члена ряда, т.е. } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n} = q.$$

Если $q < 1$, то ряд сходится; если $q > 1$, то расходится. В случае $q = 1$ признак не даёт ответа о сходимости ряда.

Используем радикальный признак:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 3} \right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 3} \right)^n = (1^\infty). \text{ Неопределенность}$$

раскроем с помощью второго замечательного предела.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 3} \right)^n &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{-4}{n^2 + 3} \right)^{\frac{n^2 + 3}{-4}} \right)^{\frac{-4n}{n^2 + 3}} = \\ &= \frac{1}{2} e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4n}{n^2 + 3}} = \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2} \cdot 1 < 1. \text{ Ряд сходится.} \end{aligned}$$

в) Рекомендуем использовать признаки сравнения.

Признак сравнения

Пусть для рядов с положительными членами

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots \quad (4)$$

$$\text{и } V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n + \dots, \quad (5)$$

начиная с некоторого номера, справедливо неравенство $U_k \leq V_k$.

Тогда, если ряд с большими членами (5) сходится, то ряд (4) с меньшими членами также сходится.

Если ряд (4) с меньшими членами расходится, то ряд (5) с большими членами также расходится.

Предельный признак сравнения

Если существует конечный и отличный от нуля предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{V_n} = l \neq 0, \text{ то оба ряда } \sum_{n=1}^{\infty} U_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} V_n \text{ сходятся или}$$

расходятся одновременно.

Если общий член исследуемого ряда содержит многочлен по степеням n , то его можно сравнивать с обобщённым гармоническим

рядом. Обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}}$ сходится при $\lambda > 1$ и расходится при $\lambda \leq 1$.

Итак, общий член ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin^2 \frac{1}{n+1}}{\sqrt{n+3}}$ содержит степени n .

Применим предельный признак сравнения.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin^2 \frac{1}{n+1}}{\sqrt{n+3}} : \frac{1}{n^{\lambda}} = \quad (\text{так как } \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

то по эквивалентности бесконечно малых величин $\arcsin \alpha$ эквивалентен α ($\alpha \rightarrow 0$); заменим в пределе арксинус

$$\text{эквивалентной величиной)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \cdot n^{\lambda}}{(n+3)^{1/2}} = (\text{сумма бесконечно$$

большой величины n и постоянной есть бесконечно большая величина, поэтому в пределе отбросим постоянные, получим)

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot n^{\lambda}}{(n)^{1/2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\lambda-2-\frac{1}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\lambda-2,5}. \text{ Существует конечный}$$

предел, не равный нулю, если $\lambda - 2,5 = 0$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\lambda-2,5} = 1$, если $\lambda = 2,5$. При этом обобщенный гармонический ряд сходится, следовательно, сходится заданный ряд.

Примечание – проверку правильности вычисления предела выполним в пакете MathCAD. Для этого на панели инструментов находим оператор предела, набираем выражение. Выведем с панели инструментов стрелку, получим результат:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(n+1)}{(2 \cdot n + 2) \cdot (2 \cdot n + 3)} \rightarrow 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 3} \right)^n \rightarrow 1$$

Задание 3. Исследовать на сходимость знакочередующийся числовой ряд. Выяснить, сходится ряд условно или абсолютно. Для случая б) найти сумму ряда с указанной точностью α .

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln^2(n+2)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi/2 + \pi n)}{n^3}$, $\alpha = 0,01$.

Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница

Ряд, у которого любые два соседних члена ряда имеют разные знаки, называется *знакочередующимся*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} U_n = U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \dots$$

При этом $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ положительны (или все отрицательны).

Теорема Лейбница. Знакочередующийся ряд сходится, если выполнены два условия:

- 1) члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине;
- 2) общий член ряда стремится к нулю, когда $n \rightarrow \infty$.

При замене суммы сходящегося ряда суммой его первых членов ошибка не превышает абсолютного значения первого из отброшенных

членов, т.е. $|R_n| \leq U_{n+1}$, где $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} U_k$ - остаток ряда

после n - го члена.

Ряд, содержащий бесконечное множество положительных и бесконечное множество отрицательных членов, называется *знакопеременным*.

Для знакочередующихся рядов, как и для любого знакопеременного ряда, справедлив достаточный признак сходимости.

Достаточный признак сходимости. Знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots \quad (6)$$

сходится, если сходится ряд (7), составленный из абсолютных величин членов знакопеременного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = |b_1| + |b_2| + |b_3| + \dots + |b_n| + \dots \quad (7)$$

Если сходится ряд (7), то ряд (6) называется *абсолютно сходящимся*. Если ряд (6) сходится, а ряд (7), составленный из модулей его членов, расходится, то ряд (6) называется *условно сходящимся*.

Решение

а) Проверяем выполнение условий теоремы Лейбница для знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln^2(n+2)}$.

В силу того, что логарифмическая функция монотонно возрастающая, $\ln(n+1) > \ln(n)$, $(n+1) \ln^2(n+3) > n \ln^2(n+2)$, члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине.

Также, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n \ln^2(n+2)} \right) = 0$. Следовательно, ряд сходится.

Выясним, сходится ряд условно или абсолютно. Для этого составим ряд из абсолютных величин членов знакочередующегося

ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(n+2)}$.

Вначале выясним с помощью интегрального признака, сходится ли вспомогательный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \ln^2(n+2)}$. Составляем и вычисляем несобственный интеграл.

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+2) \ln^2(x+2)} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{d(\ln(x+2))}{\ln^2(x+2)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\ln(x+2)} \right) \Big|_1^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\ln(b+2)} + \frac{1}{\ln 3} \right) = \frac{1}{\ln 3}. \end{aligned}$$

Интеграл существует, ряд сходится.

Используем предельный признак сходимости. Сравним ряд из абсолютных величин членов знакочередующегося ряда со вспомогательным рядом.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \ln^2(n+2)} : \frac{1}{(n+2) \ln^2(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n} = 1.$$

Существует конечный предел отношения общих членов двух рядов, не равный нулю. Так как один из них (вспомогательный) сходится, то

сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(n+2)}$. Ряд **сходится абсолютно**.

б) Знакопередающийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi/2 + \pi n)}{n^3} = -1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{27} + \dots$

сходится абсолютно, так как $\left| \frac{\sin(\pi/2 + \pi n)}{n^3} \right| = \frac{1}{n^3}$. Ряд $\frac{1}{n^3}$

сходится как обобщенный гармонический при $\lambda > 1$, следовательно, существует сумма ряда. Найдем сумму ряда с указанной точностью $\alpha = 0,01$. Найдем номер члена, для которого выполняется условие

$$\frac{1}{n^3} < 0,01. \quad n^3 > 100, \quad n > \sqrt[3]{100}, \quad n > 4,64.$$

Ближайшее значение $n = 5$, то есть абсолютная величина пятого члена ряда меньше, чем $\alpha = 0,01$.

В этом можно убедиться непосредственно, написав несколько первых членов ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi/2 + \pi n)}{n^3} = -1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{27} + \frac{1}{64} - \frac{1}{125} + \dots$$

Поэтому суммируем первых четыре члена ряда:

$$S \approx S_4 = -1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{27} + \frac{1}{64} = -0,986.$$

Исследуем в MathCAD, как изменяется величина частичной суммы с ростом числа членов от единицы до пятнадцати.

$$m := 1..15 \quad S(m) := \sum_{n=1}^m \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi\right)}{n^3}$$

Выведем результаты вычислений:

$S(m) =$

-1
-0.875
-0.912037
-0.896412
-0.904412
-0.899782
-0.902698
-0.900745
-0.902116
-0.901116
-0.901868
-0.901289
-0.901744
-0.90138
-0.901676

Нетрудно вычислить в MathCAD величину частичной суммы ряда для достаточно большого количества членов. Вызываем знак суммы, записываем под ней общий член ряда, пределы суммирования. Ставим знак равенства:

$$\sum_{n=1}^{100} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi\right)}{n^3} = -0.901542$$

$$\sum_{n=1}^{500} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi\right)}{n^3} = -0.901543$$

Как можно заметить, сумма 500 членов ряда отличается от суммы 100 членов ряда в шестом знаке после запятой.

Задание 4. Найти интервал сходимости степенного ряда

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{4n-3}}{16^n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^n}{n+5}$. На отрезке, лежащем внутри

интервала сходимости, построить графики частичных сумм ряда $S_1(x)$ и $S_{10}(x)$.

Теория к заданию

Теорема Абеля. Если степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \dots + C_n(x-a)^n + \dots,$$

сходится при некотором значении $x = x_0$, то он сходится и при том *абсолютно*, при всех значениях x , для которых $|x-a| < |x_0-a|$.

Если степенной ряд расходится при $x = x_0$, то он расходится при всех значениях x , для которых $|x-a| > |x_0-a|$.

Из теоремы Абеля следует, что области сходимости и расходимости степенного ряда расположены симметрично относительно точки $x = a$, которая называется центром разложения.

Расстояние от центра разложения до граничной точки между областью сходимости и областью расходимости называется радиусом сходимости.

В общем случае степени $(x-a)$ не обязательно пробегает все значения от 1 до бесконечности. Например, степенной ряд может иметь только четные степени. В общем случае степень $(x-a)$ выражается линейной функцией номера члена ряда: $kn+b$, где k, b - целые числа.

Определим радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^{kn+b}$.

Для этого зададим переменной x произвольное значение x_0 . Составим ряд из абсолютных величин членов полученного числового ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |C_n(x_0-a)^{kn+b}|.$$

Сходимость числового ряда с положительными членами исследуем при помощи признака Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_{n+1}(x_0-a)^{kn+b+k}|}{|C_n(x_0-a)^{kn+b}|} = |(x_0-a)^k| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} = q.$$

Если $q < 1$, числовой ряд сходится; если $q > 1$, числовой ряд расходится. Следовательно, если $q = 1$, то значение $|x_0|$ лежит на границе между областью сходимости и расходимости, т.е. $|x_0| = R$.

Таким образом, $|(R-a)^k| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} = 1$. Окончательно, радиус сходимости степенного ряда определяется из выражения:

$$|(R-a)^k| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_n|}{|C_{n+1}|}. \quad (8)$$

В частном случае, когда $k = 1$, b - любое целое число, радиус сходимости определяется по формуле:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_n|}{|C_{n+1}|} + a. \quad (9)$$

Интервал сходимости степенного ряда $(a - R; a + R)$. Отдельно нужно проверить, сходится ли ряд на границах интервала.

Решение

а) Задан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{4n-3}}{16^n}$, для которого $a = -1$, $k = 4$, $b = -3$.

Кроме того, $|C_n| = \frac{1}{16^n}$, $|C_{n+1}| = \frac{1}{16^{n+1}}$.

Используем формулу (8): $|(R+1)^4| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16^n \cdot 16}{16^n}$, $|(R+1)^4| = 16$,

$(R+1) = 2$, $R = 1$. Радиус сходимости равен 1, интервал сходимости $(a - R; a + R) = (-2; 0)$. Определяем сходимость ряда на границах интервала.

Пусть $x = 0$. Тогда числовой знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16^n}$ сходится, так как по радикальному признаку сходимости

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{16^n}} = \frac{1}{16} < 1.$$

Пусть $x = -2$. Тогда числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{4n-3}}{16^n}$ - знакопеременный. По достаточному признаку сходимости он сходится абсолютно, так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16^n}$, составленный из его абсолютных величин, сходится.

Интервал сходимости степенного ряда: $[-2; 0]$.

б) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^n}{n+5}$, для которого $a = 0$, $k = 1$, $b = 0$. Радиус сходимости определяем по формуле (9):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_n|}{|C_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+5} : \frac{1}{n+6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+6}{n+5} = 1. \text{ Интервал}$$

сходимости $(-1; 1)$.

Пусть $x = -1$. Получим числовой знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{n+5}. \text{ Ряд сходится на основании теоремы Лейбница.}$$

Пусть $x = 1$. Знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+5}$ сходится.

Таким образом, интервал сходимости степенного ряда $[-1; 1]$.

На отрезке $[-1; 1]$ строим в MathCAD графики частичных сумм ряда $S_1(x)$ и $S_{10}(x)$. Для этого определяем функции:

$$S1(x) := \sum_{n=1}^1 \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^n}{n+5} \quad S10(x) := \sum_{n=1}^{10} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^n}{n+5}$$

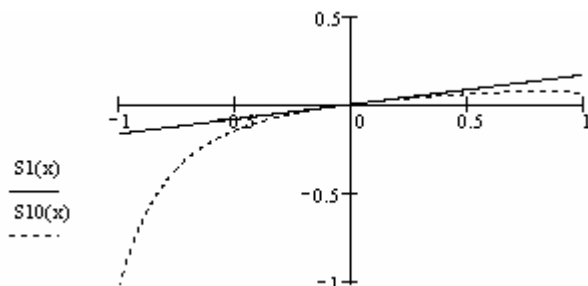


Рисунок 1 – Графики частичных сумм степенного ряда

Задание 5. Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 . Определить интервал сходимости полученного ряда. Проверить правильность вычисления коэффициентов ряда их непосредственным вычислением в MathCAD.

При выполнении задания рекомендуем использовать **один из трёх следующих методов** разложения функции в ряд Тейлора.

Метод 1. Дробь вида $\frac{b}{x-a}$ представляется рядом с помощью формулы для бесконечной сходящейся при $|q| < 1$ геометрической прогрессии:

$$\frac{b}{1-q} = b + bq + bq^2 + bq^3 + \dots + bq^n + \dots$$

Пример 1. Задана функция а) $f(x) = \frac{11}{5-9x-2x^2}$, $x_0 = 0$;

б) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4x+7}$, $x_0 = 2$.

Решение

а) Дискриминант знаменателя положительный. Найдем корни знаменателя, разложим его на множители. Затем рациональную дробь разложим на сумму простейших дробей.

$$f(x) = \frac{11}{(1-2x)(x+5)}, \quad f(x) = \frac{2}{1-2x} + \frac{1}{x+5}. \text{ Определяем ряд для}$$

каждого слагаемого.

$$\frac{2}{1-2x} = 2 + 2(2x)^2 + 2(2x)^3 + \dots + 2(2x)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} \cdot x^n, \text{ если}$$

$$|2x| < 1;$$

$$\frac{1}{x+5} = \frac{1/5}{1 - \left(-\frac{x}{5}\right)} = \frac{1}{5} - \frac{x}{5^2} + \frac{x^2}{5^3} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{5^{n+1}} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{5^{n+1}},$$

$$\text{если } \left| -\frac{x}{5} \right| < 1.$$

$$\text{Сложим полученные ряды } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{n+1} + \frac{(-1)^n}{5^{n+1}} \right) x^n.$$

Интервал сходимости полученного ряда определяем решением

$$\text{неравенств: } \begin{cases} |2x| < 1, \\ \left| -\frac{x}{5} \right| < 1, \end{cases} \quad \begin{cases} |x| < \frac{1}{2}, \\ |x| < 5, \end{cases} \text{ откуда } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

Проверим, совпадают ли полученные коэффициенты разложения с теми, что вычисляются непосредственно по формуле коэффициентов Тейлора в MathCAD.

Определяем функцию $f(x)$. Найденные коэффициенты ряда обозначим $A(n)$. Эти коэффициенты вычисляем по найденным формулам. Для вычисления коэффициентов Тейлора $C(n)$ (как функции номера) используем оператор дифференцирования и предельный переход. Зададим:

$$f(x) := \frac{11}{5 - 9 \cdot x - 2 \cdot x^2} \quad A(n) := 2^{n+1} + \frac{(-1)^n}{5^{n+1}} \quad C(n) := \frac{1}{n!} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

Задаём различные значения номеру n .

$$A(1) \rightarrow \frac{99}{25} \quad C(1) \rightarrow \frac{99}{25} \quad A(2) \rightarrow \frac{1001}{125} \quad C(2) \rightarrow \frac{1001}{125}$$

$$A(5) \rightarrow \frac{999999}{15625} \quad C(5) \rightarrow \frac{999999}{15625} \quad A(10) \rightarrow \frac{100000000001}{48828125} \quad C(10) \rightarrow \frac{100000000001}{48828125}$$

При одинаковых n значения коэффициентов совпадают, что говорит о правильности разложения функции в степенной ряд.

б) Дискриминант знаменателя дроби отрицательный. Выделяем полный квадрат в знаменателе.

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x^2-4x+7} &= \frac{(x-2)+3}{(x-2)^2+3} = (\text{преобразуем дробь в сумму дробей}) = \\ &= \frac{(x-2)/3+1}{(x-2)^2/3+1} = \frac{(x-2)}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{(x-2)^2}{3}} + \frac{1}{1+\frac{(x-2)^2}{3}}. \end{aligned}$$

Теперь для каждой

дроби, при условии $\frac{(x-2)^2}{3} < 1$ запишем ряд, используя формулу геометрической прогрессии.

$$\frac{1}{1+\frac{(x-2)^2}{3}} = 1 - \frac{(x-2)^2}{3} + \frac{(x-2)^4}{9} - \frac{(x-2)^6}{27} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^{2n}}{3^n}$$

$$\frac{(x-2)}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(x-2)^2}{3}} = \frac{x-2}{3} \left(1 - \frac{(x-2)^2}{3} + \frac{(x-2)^4}{9} - \frac{(x-2)^6}{27} + \dots \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^{2n+1}}{3^{n+1}}. \text{ Сложим полученные ряды:}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-4x+7} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{(x-2)^{2n}}{3^n} + \frac{(x-2)^{2n+1}}{3^{n+1}} \right).$$

Интервал сходимости ряда определяем решением неравенства $\frac{(x-2)^2}{3} < 1$: $(x-2)^2 < 3$, $x^2 - 4x + 1 < 0$, $x \in (2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3})$.

Метод 2. Если заданная функция содержит логарифмическую функцию, для разложения в ряд используется формула

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots,$$

где ряд сходится при $x \in (-1; 1]$. Используются также свойства логарифмической функции.

Пример 2. Задана функция $f(x) = \ln(5+9x-2x^2)$, $x_0 = 0$.

Решение

$$\ln(5+9x-2x^2) = \ln(5-x)(2x+1) = \ln(5-x) + \ln(2x+1).$$

$$\ln(5-x) = \ln 5 \left(1 - \frac{x}{5} \right) = \ln 5 + \ln \left(1 - \frac{x}{5} \right) = \ln 5 + \left(1 + \left(-\frac{x}{5} \right) \right)$$

$$\ln(5-x) = \ln 5 - \frac{x}{5} - \frac{x^2}{2 \cdot 5^2} - \frac{x^3}{3 \cdot 5^3} - \dots = \ln 5 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 5^n}.$$

Разложение верно для $-1 < \left(-\frac{x}{5} \right) \leq 1$, $-5 \leq x < 5$.

$$\ln(2x+1) = 2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n x^n}{n}.$$

Разложение верно для $-1 < 2x \leq 1$, $-\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}$.

Суммируя ряды, получим:

$$\ln(5 + 9x - 2x^2) = \ln 5 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n-1} \frac{2^n}{n} - \frac{1}{n \cdot 5^n} \right) x^n.$$

Суммарный ряд сходится к заданной функции в интервале

$$-\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2} \text{ (из двух интервалов выбираем меньший).}$$

Проверим, совпадают ли полученные коэффициенты разложения с теми, что вычисляются непосредственно по формуле коэффициентов Тейлора в MathCAD.

Также, как в примере 1 определяем функцию $f(x)$. Найденные коэффициенты ряда обозначим $A(n)$, коэффициенты Тейлора обозначим $C(n)$ (как функции номера).

$$f(x) := \ln(5 + 9 \cdot x - 2 \cdot x^2) \quad A(n) := \left[(-1)^{n-1} \cdot \frac{2^n}{n} - \frac{1}{n \cdot 5^n} \right]$$

$$C(n) := \frac{1}{n!} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

$$A(1) \rightarrow \frac{9}{5} \quad C(1) \rightarrow \frac{9}{5} \quad A(2) \rightarrow \frac{-101}{50} \quad C(2) \rightarrow \frac{-101}{50}$$

$$A(5) \rightarrow \frac{99999}{15625} \quad C(5) \rightarrow \frac{99999}{15625} \quad C(10) \rightarrow \frac{-10000000001}{97656250} \quad A(10) \rightarrow \frac{-10000000001}{97656250}$$

При одинаковых n значения коэффициентов совпадают, что говорит о правильности разложения функции в степенной ряд.

Метод 3. Заданная функция является частным случаем биномиального ряда

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots,$$

который сходится при $x \in (-1; 1)$.

Заданные функции, содержащие квадратный или кубический корень, раскладываются в ряд по степеням x с использованием одной из следующих формул:

Если $m = \frac{1}{2}$ ряд имеет вид:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots$$

Если $m = -\frac{1}{2}$ ряд имеет вид:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 - \dots$$

Если $m = \frac{1}{3}$ ряд имеет вид:

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 6}x^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9}x^3 - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12}x^4 + \dots$$

Если $m = -\frac{1}{3}$ ряд имеет вид:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6}x^2 - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9}x^3 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12}x^4 - \dots$$

Пример 3. а) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{8-x}}$, $x_0 = 0$; б) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+13}}$,

$$x_0 = -2.$$

Решение

а) Функцию $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{8-x}}$ раскладываем в ряд при $m = -\frac{1}{3}$.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{8-x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1+(-x/8)}} = \frac{1}{2} + \frac{x}{2 \cdot 3 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 4 \cdot x^2}{2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 8^2} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot x^3}{2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 8^3} + \dots$$

Ряд сходится при условии $-1 < -\frac{x}{8} < 1$, откуда $-8 < x < 8$.

Анализируем результат с помощью непосредственного вычисления коэффициентов в пакете MathCAD.

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt[3]{8-x}} \quad C(n) := \frac{1}{n!} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

$$C(1) \rightarrow \frac{1}{48} \quad C(2) \rightarrow \frac{1}{576} \quad C(3) \rightarrow \frac{7}{41472}$$

$$\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 8} \rightarrow \frac{1}{48} \quad \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 8^2} \rightarrow \frac{1}{576} \quad \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 8^3} \rightarrow \frac{7}{41472}$$

При одинаковых n значения коэффициентов совпадают, что говорит о правильности разложения функции в степенной ряд.

б) Функцию $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 13}}$ раскладываем в биномиальный

ряд при $m = -\frac{1}{2}$ по степеням $(x+2)$. Для этого под корнем

квадратным выделяем полный квадрат суммы

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 13}} = \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2 + 9}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x+2}{3}\right)^2}},$$

$$\frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x+2}{3}\right)^2}} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x+2}{3} \right)^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{x+2}{3} \right)^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{x+2}{3} \right)^6 + \dots \right)$$

Ряд сходится при условии $-1 < \frac{x+2}{3} < 1$, откуда $-5 < x < 1$.

Коэффициенты разложения при $(x+2)^2$, $(x+2)^4$, $(x+2)^6$:

$$\frac{-1}{2 \cdot 3^3} \rightarrow \frac{-1}{54} \quad \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 3^5} \rightarrow \frac{1}{648} \quad \frac{-1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3^7} \rightarrow \frac{-5}{34992}$$

Коэффициенты разложения, вычисленные непосредственно по формуле коэффициентов Тейлора в MathCAD:

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4 \cdot x + 13}} \quad C(n) := \frac{1}{n!} \cdot \lim_{x \rightarrow -2} \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

$$C(2) \rightarrow \frac{-1}{54} \quad C(3) \rightarrow 0 \quad C(4) \rightarrow \frac{1}{648} \quad C(5) \rightarrow 0 \quad C(6) \rightarrow \frac{-5}{34992}$$

Коэффициенты разложения при нечетных степенях равны нулю, при четных степенях совпадают с найденными коэффициентами.

Задание 6. Приложения рядов Тейлора.

В вариантах 6.1 – 6.10 найти разложение в степенной ряд решения дифференциального уравнения.

В вариантах 6.11 – 6.20 вычислить определенный интеграл с точностью 0,001, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и проинтегрировав её почленно.

В вариантах 6.21 – 6.30 вычислить значение функции с точностью 0,001, пользуясь их разложением в ряд Тейлора.

Интегрирование дифференциальных уравнений

Решения некоторых дифференциальных уравнений могут быть представлены в виде степенных рядов.

Метод решения, основанный на применении ряда Тейлора, заключается в последовательном дифференцировании данного дифференциального уравнения.

Пример 4. Найти первые четыре члена разложения в ряд решения уравнения $y' = x^2 + y^2$, удовлетворяющего начальному условию $y = 1/2$ при $x = 0$.

Решение. Искомое решение запишем в виде ряда

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Дифференцируя данное уравнение, найдем выражение для двух последующих производных y'' , y''' :

$$y'' = 2x + 2yy'; \quad y''' = 2 + 2((y')^2 + yy'').$$

Вычислим теперь значения производных y' , y'' , y''' при $x = 0$, используя начальное условие:

$$y'(0) = \frac{1}{4}; \quad y''(0) = \frac{1}{4}; \quad y'''(0) = \frac{19}{8}.$$

Таким образом, решение уравнения будет иметь вид

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{19}{48}x^3 + \dots$$

Пример 5. Вычислить определённый интеграл $\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x^2} dx$ с

точностью 0,001, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и проинтегрировав его почленно.

Решение

Чтобы вычислить определённый интеграл, подынтегральную функцию представляем степенным рядом, который затем интегрируем.

$$\text{Так как } \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \text{ то } \sin x^2 = \frac{x^2}{1!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \dots$$

Разделим члены ряда для $\sin x^2$ на x^2 :

$$\frac{\sin x^2}{x^2} = 1 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^8}{5!} - \dots$$

Интегрируем почленно полученный ряд:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sin x^2}{x^2} dx &= \left(x - \frac{x^5}{5 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 5!} - \frac{x^{13}}{13 \cdot 7!} + \dots \right) \Bigg|_0^1 = \\ &= 1 - \frac{1}{30} + \frac{1}{1080} - \frac{1}{65520} + \dots = 1 - 0,0333 + 0,0009 = 0,967. \end{aligned}$$

Суммирование членов числового ряда продолжается до члена, по абсолютной величине не превышающего заданной точности. В примере вычислена сумма только двух первых членов.

Вычислим интеграл в пакете MathCAD:

$$\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx = 0.968$$

Результат совпадает с заданной точностью.

Приближенное вычисление функций

Значения тригонометрических функций можно вычислять, пользуясь их разложением в ряд Тейлора.

Пример 6. Вычислить с точностью 0,001: а) $\sin 1$; б) $\sqrt[4]{12}$.

Решение

а) Так как $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$, то $\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots$

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} + \dots = 1 - 0,1666 + 0,0083 - 0,0001 = 0,842.$$

Для достижения требуемой точности вычисления достаточно просуммировать три члена ряда, это следует из теоремы Лейбница: при замене суммы сходящегося ряда суммой его первых членов ошибка не превышает абсолютного значения первого из отброшенных членов 0,0001.

б) Преобразуем заданное выражение:

$$\sqrt[4]{12} = \sqrt[4]{16 - 4} = \sqrt[4]{16(1 - \frac{1}{4})} = 2 \cdot \sqrt[4]{1 - \frac{1}{4}}. \text{ Пусть } f(x) = 2(1+x)^m,$$

где $m = \frac{1}{4}$, $x = -\frac{1}{4}$. Вычислим значение функции, представив её

биномиальным рядом (см. указания к задаче 5):

$$\sqrt[4]{1+x} = 1 + \frac{1}{4}x - \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 8}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 7}{4 \cdot 8 \cdot 12}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16}x^4 + \dots$$

$$2\left(1 - \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 2\left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 8} \cdot \frac{1}{4^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 7}{4 \cdot 8 \cdot 12} \cdot \frac{1}{4^3} - \frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16} \cdot \frac{1}{4^4} - \dots\right) =$$

$$= 2 - \frac{2}{16} - \frac{6}{512} - \frac{42}{24576} - \frac{462}{1572864} = 2 - 0,125 - 0,011 - 0,002 = 1,862$$

Непосредственное вычисление в MathCAD: $\sqrt[4]{12} = 1.861$

Задание 7. Используя математический пакет MathCAD, разложить функцию в ряд Фурье на указанном интервале. Построить график функции и графики частичных сумм ряда Фурье при $n = 5$ и $n = 15$. Найти и построить графически спектр амплитуд функции до $n = 20$. Все расчеты выполнить по прилагаемой программе.

Периодическая с периодом $T = 4$ функция $f(x)$ определена следующим образом: $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (-2; 1); \\ -1, & 1 \leq x < 2. \end{cases}$

Решение

1. Запишем функцию $f(x)$ одним аналитическим выражением с использованием функции Хевисайда. Функция Хевисайда определена следующим образом: $\Phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \geq 0, \\ 0, & \text{при } x < 0. \end{cases}$ Графики функции

Хевисайда для случая $\Phi(x+2)$ (опережающее относительно нуля включение), $\Phi(x)$ (нормальное включение) и $\Phi(x-2)$ (запаздывающее включение) показаны на рисунке 2.



Рисунок 2 – График функции Хевисайда

Если умножить функцию $f(x)$ на функцию Хевисайда $\Phi(x - \tau_1)$, то произойдет «включение» функции $f(x)$ при $x = \tau_1$. Для

«выключения» функции при $x = \tau_2$ нужно умножить $\Phi(x - \tau_2)$ на $-f(x)$.

В пакете MathCAD функцию записываем со знаком присваивания:

$$f(x) := \Phi(x + 2) \cdot (2 \cdot x) - \Phi(x - 1) \cdot (2 \cdot x) + \Phi(x - 1) \cdot (-1) - \Phi(x - 2) \cdot (-1)$$

График заданной функции $f(x)$ в MathCAD приведен на рисунке 3.

2. Вычисляем коэффициенты Фурье и ряд Фурье. Так как период

$T = 2L$, то в нашем случае $L = 2$. Ниже приведена программа вычисления коэффициентов и частичных сумм ряда Фурье при $n = 5$ и $n = 15$.

В каждом конкретном варианте задания нужно задать функцию $f(x)$ и значение половины интервала L . Остальные пункты программы – общие для всех.

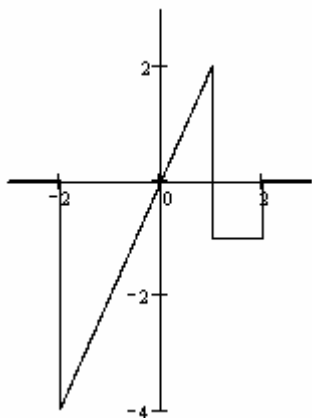


Рисунок 3 – График заданной функции

Программа к заданию 7

$$f(x) := \Phi(x + 2) \cdot (2 \cdot x) - \Phi(x - 1) \cdot (2 \cdot x) + \Phi(x - 1) \cdot (-1) - \Phi(x - 2) \cdot (-1)$$

$$L := 2$$

$$n := 1..20$$

$$a_0 := \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^L f(x) dx \quad a(n) := \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^L f(x) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) dx$$

$$b(n) := \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) dx$$

$$S5(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^5 \left(a(n) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) + b(n) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \right)$$

$$S15(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{15} \left(a(n) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) + b(n) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \right)$$

$$A(n) := \sqrt{a(n)^2 + b(n)^2}$$

Конец программы

3. Графики функции и частичных сумм ряда Фурье показаны на рисунке 4.

4. Совокупность постоянной составляющей $A_0 = \frac{a_0}{2}$ и амплитуд

$A(n) := \sqrt{a(n)^2 + b(n)^2}$ называется *амплитудно-частотным спектром периодической функции $f(x)$* . Амплитудно-частотный спектр изображается в виде отрезков (спектральных линий), длиной $A(n)$, проведенных перпендикулярно оси частот ω , на которой наносятся значения $n\omega_1$ ($n=1,2,\dots$), здесь $\omega_1 = \frac{\pi}{L}$ - частота первой гармоники. Постоянной составляющей A_0 соответствует отрезок, исходящий из начала координат.

График спектра амплитуд функции до $n=20$ (без постоянной составляющей $A_0 = \frac{a_0}{2}$) показан на рисунке 5.

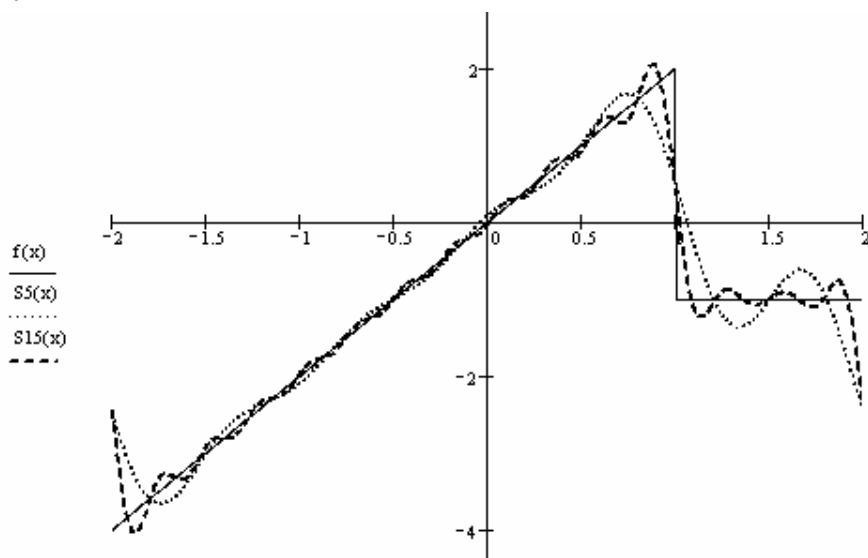


Рисунок 4 - Графики функции и частичных сумм ряда Фурье

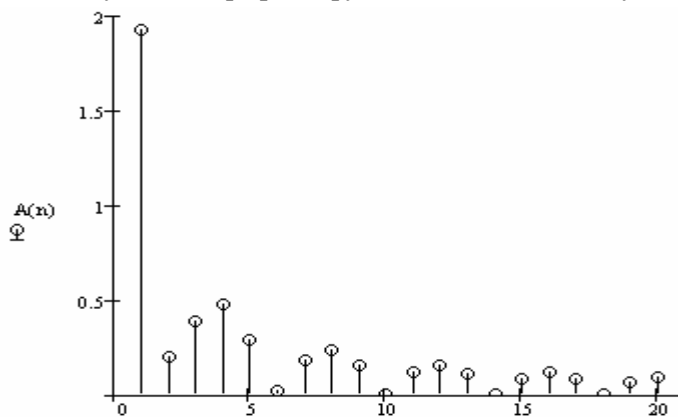


Рисунок 5 – Амплитудно-частотный спектр $f(x)$