

Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный технический университет



**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ:
СОБЫТИЯ И ИХ ВЕРОЯТНОСТИ**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
И
ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ
ВСЕХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Севастополь
2010

УДК 519

Теория вероятностей: События и их вероятности. Методические указания и индивидуальные задания для самостоятельной работы студентов всех специальностей/ Сост. М.И. Деркач, Н.А. Деркач, Т.Ю. Кротова. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2010. – 60 с.

Целью методических указаний является оказание помощи студентам всех специальностей в выполнении самостоятельной работы по теории вероятностей.

Указания содержат необходимые теоретические сведения, примеры решения задач, а также варианты индивидуальных заданий для самостоятельной работы студентов.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры «Высшая математика» 1 июля 2009 г., протокол № 11.

Допущено учебно-методическим центром и научно-методическим советом СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: Ледяев С.Ф., доцент кафедры высшей математики.

СОДЕРЖАНИЕ

Основные понятия и теоремы

§ 1. Понятие случайного события. Виды случайных событий....	4
§ 2. Классическое определение вероятности	6
§ 3. Элементы комбинаторики.....	6
§ 4. Геометрические вероятности.....	7
§ 5. Операции над случайными событиями.....	8
§ 6. Аксиомы теории вероятностей.....	9
§ 7. Условная вероятность.....	10
§ 8. Вероятность произведения случайных событий.....	12
§ 9. Зависимые и независимые случайные события.....	12
§ 10. Вероятность суммы совместных событий.....	13
§ 11. Формула полной вероятности.....	14
§ 12. Формулы Байеса.....	15
§ 13. Последовательность испытаний. Формула Бернулли.....	15
§ 14. Предельные теоремы Лапласа, Пуассона и Бернулли.....	16

Примеры решения задач

§ 1. Классическое определение вероятности.....	19
§ 2. Геометрические вероятности.....	22
§ 3. Условная вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей.....	26
§ 4. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.....	30
§ 5. Формула Бернулли.....	31
§ 6. Предельные теоремы Лапласа, Пуассона и Бернулли.....	32

Приложение 1. Варианты индивидуальных заданий для самостоятельной работы.....	36
--	----

Приложение 2. Таблица значений функции $\varphi(x)$	56
---	----

Приложение 3. Таблица значений функции $\Phi(x)$	57
--	----

Библиографический список.....	59
-------------------------------	----

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ

1. Понятие случайного события. Виды случайных событий

Случайным событием называется событие, которое может наступить или не наступить при реализации некоторой системы условий S .

Достоверным называется событие, которое всегда наступает при реализации некоторой системы условий S .

Невозможным называется событие, которое заведомо не наступает при реализации некоторой системы условий S .

Достоверное и невозможное события в теории вероятностей рассматривают как частные (предельные) случаи случайных событий.

Случайные события будем обозначать заглавными буквами русского и латинского алфавитов: A, B, C и т.д. Для обозначения достоверного и невозможного события используются также символы Ω и $\emptyset$ соответственно.

В дальнейшем вместо того, чтобы говорить, что реализована система условий S , будем говорить, что проведено *испытание (опыт, эксперимент)*.

В теории вероятностей рассматриваются не все случайные события и явления, а лишь *однородные массовые* события и явления, то есть такие события и явления, которые могут неоднократно наблюдаться при реализации одной и той же системы условий S . Это значит, что соответствующий эксперимент должен обладать свойством *многократной воспроизводимости*.

Теория вероятностей изучает закономерности, присущие однородным массовым случайным событиям и явлениям.

Пример. Испытание – однократное подбрасывание игральной кости. Случайные события: $A = \{\text{выпадение чётного числа очков на верхней грани игральной кости}\}$; $B = \{\text{выпадение семи очков на верхней грани игральной кости}\}$; $C = \{\text{число очков на верхней грани игральной кости меньше семи}\}$. Отметим, что событие B является невозможным, а событие C – достоверным.

Два случайных события называются *несовместными (несовместимыми)*, если наступление одного из этих событий исключает наступление другого в одном и том же испытании. В противном случае два случайных события называются *совместными (совместимыми)*.

Пример. Пусть из колоды карт наудачу извлекается одна карта. Рассмотрим следующие случайные события:

$$A = \{\text{извлечен туз}\}, B = \{\text{извлечена шестерка}\}, \\ C = \{\text{извлечена карта бубновой масти}\}.$$

События A и B несовместны, а события A и C , а также B и C , являются совместными.

Несколько событий образуют *полную группу* событий, если в результате испытания наступает хотя бы одно из этих событий.

Пример. Из ящика, содержащего черные и белые шары, наудачу извлекаются два шара. Рассмотрим следующие случайные события:

$$A = \{\text{извлечены два белых шара}\}, \\ B = \{\text{извлечены два черных шара}\}, \\ C = \{\text{извлечены один белый шар и один черный}\}, \\ D = \{\text{извлечен хотя бы один белый шар}\}, \\ E = \{\text{извлечен хотя бы один черный шар}\}.$$

События A, B, C образуют полную группу несовместных событий, а события D, E образуют полную группу совместных событий.

Случайные события называются *равновозможными*, если нет никаких оснований считать, что наступление одного из них более возможно, чем другого.

Пример. Выпадение «герба» и «решки» – равновозможные события при однократном подбрасывании монеты.

Простейшим примером случайного события является *элементарное событие*, или *элементарный исход*. Элементарным исходом называется каждый из возможных результатов испытания: $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$

Элементарные исходы несовместны, а их множество образует полную группу, которая называется *пространством элементарных исходов* Ω .

Пример. Однократно подбрасывается игральная кость. Пространство элементарных исходов состоит из шести элементарных исходов: $\omega_i = \{\text{на верхней грани выпало } i \text{ очков}\}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Таким образом, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

Элементарные исходы, в которых событие наступает, называются *благоприятствующими* этому событию.

Пример. Случайному событию $Ч = \{\text{выпало чётное число очков при однократном подбрасывании игральной кости}\}$ благоприятствуют три элементарных исхода: $\omega_2, \omega_4, \omega_6$ (см. предыдущий пример).

2. Классическое определение вероятности

Пусть пространство элементарных исходов Ω состоит из конечного числа n элементарных исходов и пусть все элементарные исходы равновозможны.

Тогда вероятностью $P(A)$ случайного события A называется число, которое вычисляется по формуле:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число исходов, благоприятствующих событию A , n – общее число элементарных исходов.

Свойства классического определения вероятности

1. Для любого случайного события A справедливо неравенство

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

2. Вероятность невозможного события равна 0, т. е. $P(\emptyset) = 0$.

3. Вероятность достоверного события равна 1, т. е. $P(\Omega) = 1$.

3. Элементы комбинаторики

Перестановкой из n элементов называется всякое расположение n данных различных элементов в определённом порядке. Число всех возможных перестановок из n элементов

$$P_n = n!,$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, $0! = 1$.

Размещением из n элементов по m ($m \leq n$) называется всякое упорядоченное расположение m различных элементов из данных n различных элементов. Число всех возможных размещений из n элементов по m

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)\dots(n-m+1).$$

Сочетанием из n элементов по m ($m \leq n$) называется всякий набор m различных элементов из данных n различных элементов. Число всех возможных сочетаний из n элементов по m

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Размещением с повторениями из n элементов по m называется всякое упорядоченное расположение m элементов (среди которых могут быть и одинаковые) из данных n различных элементов. Число всех возможных размещений с повторениями из n элементов по m элементам

$$\tilde{A}_n^m = n^m.$$

Правило суммы: если объект A_1 можно выбрать n_1 способами, объект A_2 — n_2 способами, ..., объект A_k — n_k способами, причём выборы всех указанных объектов несовместны, то выбрать или A_1 , или A_2 , ..., или A_k можно $(n_1 + n_2 + \dots + n_k)$ способами.

Правило произведения: если объект A_1 можно выбрать n_1 способами, объект A_2 (после того, как объект A_1 уже выбран) можно выбрать n_2 способами, ..., объект A_k (после того, как все предыдущие объекты уже выбраны) можно выбрать n_k способами, то выбрать упорядоченный объект $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ можно $n_1 n_2 \dots n_k$ способами.

4. Геометрические вероятности

Классическую схему нельзя применить в случае бесконечного числа элементарных исходов. В некоторых задачах этот недостаток позволяет преодолеть геометрическое определение вероятности.

Пусть отрезок CD является частью отрезка AB . На отрезок AB наудачу ставится точка M . Эта точка может как попасть, так и не попасть на отрезок CD . Рассмотрим событие $F = \{\text{точка попала на отрезок } CD\}$. Естественно предположить, что вероятность события F

пропорциональна длине отрезка CD и не зависит от расположения CD на AB . Тогда

$$P(F) = \frac{\text{длина } CD}{\text{длина } AB}.$$

Это геометрическое определение вероятности в одномерном случае.

В двумерном случае вероятность события $A = \{\text{точка, наудачу выбранная в области } G\}$, попала в область g , которая является частью G вычисляется по формуле

$$P(A) = \frac{\text{площадь } g}{\text{площадь } G}.$$

При этом предполагается, что вероятность попадания точки в область g пропорциональна площади g и не зависит ни от её формы, ни от расположения относительно G .

Аналогично определяются геометрические вероятности в трёхмерном случае: $P(A) = \frac{\text{объём } g}{\text{объём } G}.$

5. Операции над случайными событиями

Сложение случайных событий

Суммой $A + B$ двух случайных событий A и B называется событие, которое состоит в наступлении или события A , или события B , или в совместном наступлении A и B .

Роль нуля при сложении случайных событий выполняет невозможное событие $\emptyset$: $A + \emptyset = \emptyset + A = A$, где A – произвольное случайное событие.

Суммой нескольких случайных событий $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ называется случайное событие, которое состоит в наступлении хотя бы одного из событий A_i .

Умножение случайных событий

Произведением $A \cdot B$ двух случайных событий A и B называется событие, которое состоит в совместном наступлении A и B . В частности, если A и B несовместные события, то $A \cdot B = \emptyset$. Роль едини-

цы при умножении случайных событий выполняет достоверное событие Ω : $A\Omega = \Omega A = A$, где A – произвольное случайное событие.

Произведением нескольких случайных событий $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n$ называется событие, которое состоит в совместном наступлении всех этих событий.

Переход к противоположному событию

Противоположным событию A называется событие $\bar{A}$, которое состоит в ненаступлении события A . Очевидно, что противоположным событию $\bar{A}$ является событие A . События A и $\bar{A}$ несовместны и образуют полную группу.

Многие свойства операций над случайными событиями аналогичны соответствующим свойствам операций над действительными числами. Например, и для событий, и для чисел справедливы переместительный и сочетательный законы сложения и умножения:

$$A + B = B + A, AB = BA;$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C, A(BC) = (AB)C.$$

Однако имеются и отличия. Например, если A – число, то

$$A + A = 2A, A \cdot A = A^2.$$

Если же A – случайное событие, то $A + A = A, A \cdot A = A$.

6. Аксиомы теории вероятностей

1. Каждому случайному событию A ставится в соответствие неотрицательное число $P(A)$, которое называется вероятностью события A : $P(A) \geq 0$.

2. Вероятность достоверного события равна 1: $P(\Omega) = 1$.

3. Если события $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ попарно несовместны, то вероятность суммы этих событий равна сумме их вероятностей:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots$$

Следствия из аксиом теории вероятностей

1. Сумма вероятностей двух противоположных событий равна 1:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

2. Вероятность невозможного события равна 0:

$$P(\emptyset) = 0.$$

3. Вероятность любого случайного события заключена в пределах от 0 до 1:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

4. Сумма вероятностей попарно несовместных событий, образующих полную группу, равна 1.

7. Условная вероятность

Определение 1. Условной вероятностью события B при условии, что событие A произошло, называется величина, которая обозначается символом $P(B/A)$ и вычисляется по формуле

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \text{ где } P(A) \neq 0.$$

Выясним смысл определения условной вероятности, данного выше, в случае классической схемы.

Пусть n – общее число равновозможных элементарных исходов; m_A – число элементарных исходов, благоприятствующих событию A ; m_{AB} – число элементарных исходов, благоприятствующих событию B , которые также благоприятствуют событию A , то есть число элементарных исходов, благоприятствующих событию AB . Согласно классическому определению вероятности

$$P(AB) = \frac{m_{AB}}{n}, \quad P(A) = \frac{m_A}{n}.$$

$$\text{С учетом этих формул получаем } P(B/A) = \frac{m_{AB}}{m_A}.$$

Полученное соотношение означает, что в классическом случае условную вероятность $P(B/A)$ можно вычислять по формуле классического определения вероятности, если в качестве элементарных исходов рассматривать только элементарные исходы, благоприятствующие событию A .

Обобщая полученный результат на случай произвольного пространства элементарных исходов, условную вероятность $P(B/A)$ можно определить также следующим образом.

Определение 2. Условной вероятностью $P(B/A)$ события B при условии, что событие A произошло, называют вероятность события B , вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Замечания

- а). Определения 1 и 2 условной вероятности эквивалентны.
- б). Значение определения 2 состоит не только в том, что оно вскрывает смысл условной вероятности, но и в том, что оно дает иной способ вычисления этой величины, независимый от формулы определения 1.
- в). В общем случае $P(B/A) \neq P(B)$.
- г). Условная вероятность удовлетворяет всем аксиомам теории вероятностей:

$$1). P(B/A) \geq 0;$$

$$2). P(A/A) = 1;$$

$$3). \text{ Если } B_1 \cap B_2 = \emptyset, \text{ то}$$

$$P(B_1 + B_2 / A) = P(B_1 / A) + P(B_2 / A).$$

Пример. Из ящика, содержащего 6 белых и 3 черных шара, наудачу последовательно извлекаются два шара. Найти вероятность того, что вторым извлечен белый шар, если известно, что первым был извлечен черный шар.

Решение.

Опишем события: $A = \{\text{первым извлечён чёрный шар}\}$, $B = \{\text{вторым извлечен белый шар}\}$. Необходимо найти условную вероятность $P(B/A)$.

Первый способ (согласно определению 1).

Пространство элементарных исходов представляет собой совокупность упорядоченных пар шаров, следовательно $n = A_9^2$. Число исходов, благоприятствующих наступлению события AB , $m_{AB} = 3 \cdot 6$. Следовательно, $P(AB) = \frac{m_{AB}}{n} = \frac{3 \cdot 6}{A_9^2} = \frac{18}{9 \cdot 8} = \frac{1}{4}$. Вместе с

$$\text{тем } P(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Поэтому } P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1/4}{1/3} = \frac{3}{4}.$$

Второй способ (согласно определению 2).

Так как событие A наступило, то в ящике осталось 8 шаров, среди которых 6 белых. Поэтому $P(B/A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

8. Вероятность произведения случайных событий

Из определения 1 условной вероятности следует, что

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A).$$

Таким образом, вероятность совместного наступления событий A и B равна произведению вероятности одного из этих событий и условной вероятности другого события при условии, что первое событие уже наступило.

Последняя формула обобщается непосредственно на случай произведения произвольного числа событий $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n/A_1 A_2 \dots A_{n-1}).$$

9. Зависимые и независимые случайные события

Событие B называется *независимым* от события A , если наступление события A не меняет вероятности события B , т.е. если условная вероятность $P(B/A)$ равна вероятности события B : $P(B/A) = P(B)$. В противном случае, то есть когда $P(B/A) \neq P(B)$, событие B называется *зависимым* от события A .

Некоторые свойства независимости событий

1). Если событие B не зависит от события A , то и событие A не зависит от события B . В этом случае события A и B называются просто независимыми событиями.

2). *Правило умножения вероятностей двух независимых событий.*

Если A и B – независимые события, то

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B),$$

т. е. вероятность совместного наступления двух независимых событий равна произведению их вероятностей.

3). *Признак независимости двух событий.*

Если для некоторых случайных событий A и B справедливо соотношение

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B),$$

то эти события являются независимыми.

4). Если A и B – независимые события, то независимыми также являются следующие события: A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и B , $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

События $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются *независимыми в совокупности*, если:

а) они попарно независимы, то есть независимыми являются любые два события из данных;

б) независимыми являются каждое из данных событий и любое произведение остальных.

Пример. События A_1, A_2, A_3 являются независимыми, если независимы события: A_1 и A_2 , A_1 и A_3 , A_2 и A_3 , A_1 и A_2A_3 , A_2 и A_1A_3 , A_3 и A_1A_2 .

Замечание. Из попарной независимости не следует независимость в совокупности.

Вероятность совместного наступления нескольких независимых случайных событий, т.е. вероятность их произведения, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1A_2\dots A_n) = P(A_1)P(A_2)\dots P(A_n).$$

10. Вероятность суммы совместных событий

Вероятность наступления суммы двух совместных событий, т.е. вероятность наступления хотя бы одного из двух совместных событий A и B , равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Замечания

1). Эта формула справедлива как для совместных, так и для несовместных случайных событий, поскольку в случае несовместных событий

$$P(AB) = 0 \text{ и } P(A+B) = P(A) + P(B).$$

2). Если события независимы, то $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ и, следовательно, $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$.

3). Рассмотрим классический случай. Пусть n – общее число равновозможных элементарных исходов, $m_A, m_B, m_{AB}, m_{A+B}$ – число элементарных исходов, благоприятствующих событиям A , B , $A \cap B$ и $A + B$ соответственно. Тогда согласно формуле включений и исключений $m_{A+B} = m_A + m_B - m_{AB}$. Разделим обе части этого равенства на n : $\frac{m_{A+B}}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} - \frac{m_{AB}}{n}$. Отсюда в соответствии с классическим определением вероятности $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

4). Полученную формулу можно обобщить на случай нескольких совместных случайных событий. В частности, в случае трех случайных событий получим:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

11. Формула полной вероятности

Пусть событие A может наступить лишь совместно с одним из попарно несовместных событий $H_1, H_2, \dots, H_n$. Тогда $P(A) = P(H_1) \cdot P(A / H_1) + P(H_2) \cdot P(A / H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A / H_n)$. Эта формула называется *формулой полной вероятности*.

Замечания

1). События $H_1, H_2, \dots, H_n$ называются гипотезами по отношению к событию A , так как заранее неизвестно, с каким из этих событий совместно наступит событие A , но известно, что с каким-то одним из них оно обязательно наступит.

2). Условия применимости формулы полной вероятности часто формулируются так: от событий $H_1, H_2, \dots, H_n$ требуют, чтобы они представляли полную группу попарно несовместных событий, вместе с тем отказываются от требования, чтобы событие A обязательно наступало с каждым из указанных событий.

3). При решении задач с использованием формулы полной вероятности эксперимент представляется происходящим как бы в два этапа. Гипотезы $H_1, H_2, \dots, H_n$ исчерпывают все возможные исходы первого этапа; событие A – один из возможных исходов второго этапа.

12. Формулы Бейеса

Пусть событие A может наступить лишь с одним из попарно несовместных событий $H_1, H_2, \dots, H_n$ и пусть известно, что в результате испытания событие A наступило. Мы не можем достоверно сказать, с каким именно из событий $H_1, H_2, \dots, H_n$ наступило событие A , однако можно поставить вопрос о вероятности наступления одной из этих гипотез при условии, что событие A наступило. В общем случае наступление события A меняет вероятность гипотезы, то есть $P(H_k / A) \neq P(H_k)$.

Вероятности гипотез вычисляются по *формулам Бейеса*, которые имеют вид:

$$P(H_k / A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A / H_k)}{P(A)} = \frac{P(H_k) \cdot P(A / H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A / H_i)},$$

где $k = 1, 2, \dots, n$.

13. Последовательность испытаний. Схема Бернулли

В теории и на практике представляет интерес эксперимент, состоящий в последовательном проведении испытаний, в каждом из которых интересуются лишь наступлением или ненаступлением некоторого события A .

Примеры

- 1). Трехкратное подбрасывание игральной кости, при этом событие $A = \{\text{выпадение «6»}\}$.
- 2). Пятикратное извлечение игральной карты из полной колоды, событие $A = \{\text{извлечен туз}\}$.

Испытания называются *независимыми* от события A , если вероятность события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний.

Примеры

1). Подбрасывания монеты – независимые испытания относительно выпадения герба.

2). Извлечение карты из колоды карт без последующего возвращения карты обратно в колоду – зависимые испытания относительно события $A = \{\text{извлечен туз}\}$.

Последовательность исходов испытаний представляет собой случайное событие, которое может быть записано в виде последовательности символов A и $\bar{A}$, и называется сложным событием по отношению к событиям A и $\bar{A}$, а события A и $\bar{A}$ – называются простыми по отношению к указанному сложному событию.

Пример. Запись $A\bar{A}A\bar{A}A$ означает сложное событие, состоящее в том, что в 1-м и 3-м испытаниях серии событие A наступило, а во 2-м, 4-м, 5-м – не наступило. Такое сложное событие можно рассматривать и как произведение событий, если считать, что значение символа определяется его местом в указанной последовательности символов. В частности, данное сложное событие можно рассматривать как произведение $A_1\bar{A}_2A_3\bar{A}_4\bar{A}_5$, где событие $A_i = \{\text{наступление события } A \text{ в } i\text{-ом испытании}\}$.

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность события A одна и та же и равна p , событие A наступит ровно k раз, может быть вычислена по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (q = 1 - p).$$

Число k , при котором вероятность $P_n(k)$ принимает наибольшее значение, называется *наивероятнейшим* числом наступлений события A . Наивероятнейшее число k_0 наступлений события A в независимых испытаниях удовлетворяет условию:

$$np - q \leq k_0 \leq np + p.$$

14. Предельные теоремы Лапласа, Пуассона и Бернулли

Локальная теорема Лапласа

Если вероятность p события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие

A появится в n независимых испытаниях ровно k раз, при достаточно больших n может быть приближённо вычислена по формуле

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

$$\text{где } q = 1 - p, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Погрешность формулы тем меньше, чем больше величина npq . Практически этой формулой можно пользоваться, если $npq > 10$. Функции $\varphi(x)$ чётная, а её значения приведены в таблице 1 приложения 2.

Интегральная теорема Лапласа

Если вероятность p события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A появится в n независимых испытаниях не менее k_1 раз и не более k_2 раз, при достаточно больших n может быть приближённо вычислена по формуле

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$\text{где } q = 1 - p, \quad x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt.$$

Функция $\Phi(x)$ является нечётной и называется функцией Лапласа. Её значения приведены в таблице 2 приложения 2.

Погрешность данной приближённой формулы тем меньше, чем больше величина npq . Практически этой формулой можно пользоваться, если $npq > 10$.

Теорема Пуассона

Если вероятность p события A в каждом испытании постоянна, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появится в n независимых испытаниях ровно k раз, при достаточно малых p и достаточно больших n может быть приближённо вычислена по формуле

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \text{ где } \lambda = np.$$

Теорема Бернулли

Если вероятность p события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность того, что отклонение относительной частоты $\frac{m}{n}$ события A от постоянной вероятности p по абсолютной величине не превысит заданного числа $\varepsilon > 0$, при достаточно больших n может быть приближённо вычислена по формуле

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Погрешность данной приближённой формулы тем меньше, чем больше величина npq . Практически этой формулой можно пользоваться, если $npq > 10$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Классическое определение вероятности

1). Какова вероятность того, что при случайном расположении в ряд кубиков, на которых написаны буквы А, А, Р, М, получится слово РАМА?

Решение. Испытание представляет собой упорядоченное расположение (расположение в ряд) четырёх различных кубиков. Поэтому в качестве элементарного исхода испытания возьмём перестановку из четырёх различных элементов (кубиков). Тогда все элементарные исходы равновозможны, а их общее число $n = P_4 = 4!$.

Согласно правилу произведения число элементарных исходов, благоприятствующих событию $A = \{\text{получится слово РАМА}\}$, может быть вычислено по формуле $m = 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$, т.е. $m = 2$. В силу классического определения вероятности имеем $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{4!} = \frac{1}{12}$.

Ответ: $1/12$.

2). Из восьми карточек с буквами П, Р, И, П, Р, А, В, А (по одной букве на каждой карточке) наугад выбираются четыре и выкладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово ПАРА.

Решение. Испытание представляет собой упорядоченное расположение (расположение в ряд) четырёх карточек из данных восьми. В качестве элементарного исхода испытания возьмём размещение из восьми различных элементов (карточек) по четырём. Все элементарные исходы равновозможны, а их общее число $n = A_8^4$.

Согласно правилу произведения число элементарных исходов, благоприятствующих событию $A = \{\text{получится слово ПАРА}\}$, может быть вычислено по формуле $m = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1$, т.е. $m = 8$. В силу классического определения вероятности имеем

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{8}{A_8^4} = \frac{8 \cdot 4!}{8!} = \frac{1}{210}.$$

Ответ: $1/210$.

3). Для дежурства на вечере путём жеребьёвки выбирается пять человек. Вечер проводит комиссия, в составе которой 9 юношей и 3 девушки. Какова вероятность того, что в состав дежурных войдёт ровно 2 девушки?

Решение. Испытание состоит в неупорядоченном выборе 5 человек (дежурных) из 12 человек (членов комиссии). В качестве элементарного исхода возьмём сочетание из 12 элементов (членов комиссии) по 5. Все элементарные исходы равновозможны, а их общее число $n = C_{12}^5$.

Двух девушек из трёх можно выбрать C_3^2 способами, а трёх юношей из девяти можно выбрать C_9^3 способами. Поэтому согласно правилу произведения число исходов, благоприятствующих событию $A = \{\text{в состав дежурных войдёт ровно 2 девушки}\}$, может быть вычислено по формуле $m = C_3^2 \cdot C_9^3$.

В силу классического определения вероятности

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_3^2 \cdot C_9^3}{C_{12}^5} = \frac{3 \cdot 9! \cdot 5! \cdot 7!}{3! \cdot 6! \cdot 12!} = \frac{7}{22}.$$

Ответ: $7/22$.

4). Шестеро детей (три мальчика и три девочки) случайным образом садятся на шестиместную скамейку. Какова вероятность того, что мальчики и девочки будут чередоваться?

Решение. Испытание состоит в том, что шестеро детей наудачу рассаживаются на шестиместной скамейке. Пространство элементарных исходов можно строить по-разному.

Первый способ

В качестве элементарного исхода выбираем упорядоченное расположение шести детей, т.е. перестановку из шести элементов. Все элементарные исходы равновозможны, а их общее число $n = P_6 = 6!$

Мальчики и девочки будут чередоваться, если мальчики займут все чётные места, а девочки — все нечётные места, или наоборот. Мальчики могут расположиться на чётных (нечётных) местах P_3 способами и девочки могут расположиться на нечётных (чётных) местах P_3 способами. Используя правила суммы и произведения, несложно подсчитать число элементарных исходов, благоприятствующих событию $A = \{\text{мальчики и девочки будут чередоваться}\}$: $m = 2P_3 \cdot P_3$. Согласно классическому определению вероятности

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2P_3 \cdot P_3}{P_6} = \frac{2 \cdot 3! \cdot 3!}{6!} = \frac{1}{10}.$$

Второй способ

В качестве элементарного исхода возьмём набор (неупорядоченный) трёх мест, выбранных мальчиками, т.е. сочетание из шести элементов (мест) по три. Все элементарные исходы равновозможны, а их общее число $n = C_6^3$.

Случайному событию $A = \{\text{мальчики и девочки будут чередоваться}\}$ благоприятствуют только два элементарных исхода (набор чётных мест или набор нечётных мест).

Согласно классическому определению вероятности

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{C_6^3} = \frac{2 \cdot 3! \cdot 3!}{6!} = \frac{1}{10}.$$

Ответ: $1/10$.

5). Из 11 букв слова ВЕРОЯТНОСТЬ наудачу выбраны 2 буквы (не обязательно разные). Какова вероятность того, что выбранные буквы либо обе гласные, либо обе согласные?

Решение. В качестве элементарного исхода выбираем неупорядоченный набор двух букв (не обязательно разных), т.е. сочетание из 11 элементов по 2. Все элементарные исходы равновозможны, а их общее число $n = C_{11}^2$.

Две гласные буквы из четырёх (Е, О, Я, О) можно выбрать C_4^2 способами, а две согласные буквы из оставшихся 7 (В, Р, Т, Н, С, Т, Ь) — C_7^2 способами. Согласно правилу суммы число элементарных исходов, благоприятствующих событию $A = \{\text{выбранные буквы либо обе гласные, либо обе согласные}\}$, равно $m = C_4^2 + C_7^2$.

Согласно классическому определению вероятности

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_4^2 + C_7^2}{C_{11}^2} = \frac{(6 + 21) \cdot 2! \cdot 9!}{11!} = \frac{27}{55}.$$

Ответ: $27/55$.

6). Из колоды 36 игральных карт наудачу выбраны 6 карт. Какова вероятность того, что среди этих шести карт окажется хотя бы один «туз»?

Решение. В качестве элементарного исхода выбираем набор шести карт из 36 игральных карт, т.е. сочетание из 36 элементов по 6. Все элементарные исходы равновозможны, а их общее число $n = C_{36}^6$.

Так как в колоде 4 «туза», то число указанных наборов, не содержащих «туза», равно C_{32}^6 , а, следовательно, число элементарных исходов, благоприятствующих событию $A = \{\text{среди шести наудачу выбранных карт окажется хотя бы один «туз»}\}$, можно вычислить по формуле $m = C_{36}^6 - C_{32}^6$.

Согласно классическому определению вероятности

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{36}^6 - C_{32}^6}{C_{36}^6} = 1 - \frac{32! \cdot 6! \cdot 30!}{6! \cdot 26! \cdot 36!} = \frac{100}{187}.$$

Ответ: $100/187$.

2. Геометрические вероятности

1). Внутри круга наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри прямоугольника со сторонами 3 и 4, вписанного в этот круг (рисунок 1).

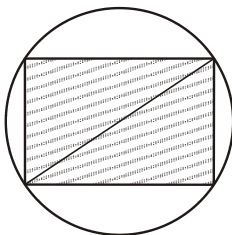


Рисунок 1

Решение. Поскольку диагональ прямоугольника является диаметром круга, то для определения радиуса R круга можно воспользоваться теоремой Пифагора: $(2R)^2 = \sqrt{3^2 + 4^2}$, откуда $R = \frac{5}{2}$.

Пусть $A = \{\text{точка, наудачу брошенная внутри круга, попала внутрь прямоугольника}\}$. Согласно геометрическому определению вероятностей имеем

$$P(A) = \frac{S_{np}}{S_{кр}},$$

где S_{np} — площадь прямоугольника со сторонами 3 и 4; $S_{кр}$ — площадь круга радиусом $5/2$:

$$S_{np} = 3 \cdot 4 = 12, S_{кр} = \pi \left(\frac{5}{2} \right)^2 = \frac{25\pi}{4}.$$

$$\text{Поэтому } P(A) = \frac{12 \cdot 4}{25\pi} = \frac{48}{25\pi}.$$

Ответ: $48/25\pi$.

2). В круге радиуса r наудачу выбрана точка M . Найти вероятность того, что расстояние от точки M до центра круга будет не меньше чем r_1 и не больше чем r_2 ($0 < r_1 < r_2 < r$).

Решение. Пространство элементарных исходов Ω представляет собой круг радиуса r , площадь которого $S_{\Omega} = \pi r^2$.

Событию $A = \{\text{точка, наудачу выбранная в круге, находится от центра круга на расстоянии не большем чем } r_1 \text{ и не меньшем чем } r_2\}$ благоприятствуют те элементарные исходы, которые образуют кольцо, расположенное внутри круга и имеющее внутренний радиус r_1 и внешний – r_2 (рисунок 2). Площадь этого кольца $S_A = \pi(r_2^2 - r_1^2)$.

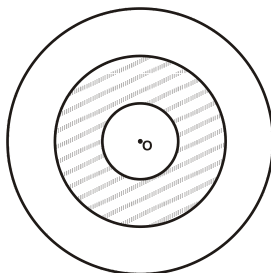


Рисунок 2

Согласно геометрическому определению вероятности

$$P(A) = \frac{S_A}{S_{\Omega}} = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r^2}.$$

Ответ: $\frac{r_2^2 - r_1^2}{r^2}$.

3). Парк Победы вымощен прямоугольными плитками со сторонами 9 см и 18 см. Из кармана отдыхающего выпал пятак, диаметр которого равен 2,5 см. Какова вероятность, что пятак не пересечёт ни одной из сторон прямоугольных плиток?

Решение. Положение пятак относительно плитки полностью определяется положением центра пятака относительно этой плитки. В результате падения центр пятака может оказаться в любой точке прямоугольника Ω со сторонами 9 см и 18 см. Площадь этого прямоугольника $S_{\Omega} = 9 \cdot 18 = 162 \text{ (см}^2\text{)}$.

Событие $A = \{\text{пятак не пересечёт ни одной из сторон прямоугольных плиток}\}$ наступает тогда и только тогда, когда центр упавшего пятака располагается от ближайшей стороны прямоугольной плитки на расстоянии, не меньшем радиуса пятака, т.е. находится внутри прямоугольника, центр которого совпадает с центром прямоугольной плитки, а стороны параллельны сторонам плитки и меньше соответствующих сторон плитки на величину равную, диаметру пятака (рисунок 3).

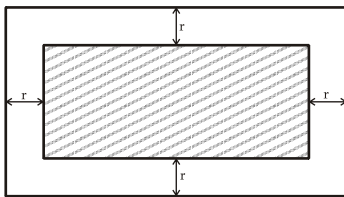


Рисунок 3

Площадь такого прямоугольника

$$S_A = (9 - 2,5)(18 - 2,5) = 100,75 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Согласно геометрическому определению вероятности

$$P(A) = \frac{S_A}{S_{\Omega}} = \frac{100,75}{162} \approx 0,62.$$

Ответ: 0,62.

4). Наудачу взяты два неотрицательных числа x и y , удовлетворяющие условию $x + y \leq 2$. Найти вероятность того, что сумма квадратов $x^2 + y^2$ не больше, чем 1.

Решение. Пространство элементарных исходов

$\Omega = \{(x, y) | x + y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$ представляет собой на плоскости

Oxy равнобедренный прямоугольный треугольник (рисунок 4), кате-

ты которого равны 2, а, следовательно, площадь $S_{\Omega} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$.

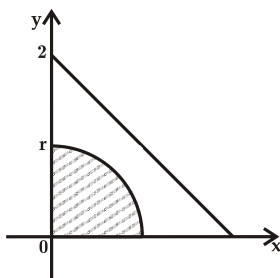


Рисунок 4

Случайное событие $A = \{(x, y) \in \Omega \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ изображается на плоскости Oxy в виде четверти круга с центром в начале координат и радиусом, равным 1, расположенной в первом квадранте. Площадь этой четверти круга $S_A = \pi / 4$.

Согласно геометрическому определению вероятности

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{\pi / 4}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

Ответ: $\pi / 8$.

5). Внутри прямоугольника со сторонами 4 и 8 наудачу выбрана точка M . Найти вероятность того, что расстояние от точки M до ближайшей длинной стороны не меньше, чем расстояние от точки M до ближайшей короткой стороны.

Решение. Пусть x , y – расстояния от точки M до ближайшей длинной и ближайшей короткой сторон соответственно ($0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 4$). Пространство элементарных исходов $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4\}$ на плоскости Oxy представляет собой прямоугольник со сторонами 2 и 4 (рисунок 5). Площадь этого прямоугольника $S_\Omega = 2 \cdot 4 = 8$.

Событию $A = \{\text{расстояние от точки } M \text{ до ближайшей длинной стороны не меньше, чем расстояние от точки } M \text{ до ближайшей короткой стороны}\}$ благоприятствуют те элементарные исходы, которые удовлетворяют условию $x \geq y$, т.е. $A = \{(x, y) \in \Omega \mid x \geq y\}$. На плоскости Oxy множество точек A образует прямоугольный равно-

бедренный треугольник, катеты которого равны 2. Площадь этого треугольника $S_A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$.

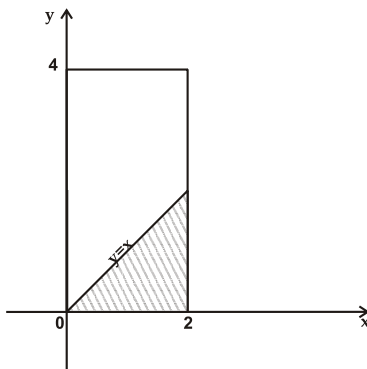


Рисунок 5

Согласно геометрическому определению вероятности

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $1/4$.

3. Условная вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей

1). Вероятность того, что при измерении некоторой величины будет допущена относительная ошибка, превышающая 5%, равна 0,2, а вероятность того, что эта ошибка превысит 10%, равна 0,08. В результате измерения относительная ошибка превысила 5%. Какова вероятность того, что эта ошибка превысила 10%?

Решение. Пусть $A = \{\text{относительная ошибка превысила } 10\%\}$, $B = \{\text{относительная ошибка превысила } 5\%\}$. Необходимо найти условную вероятность $P(A/B)$. Согласно определению условной вероятности

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Очевидно, что $AB = A$, т.к. если

ошибка измерения превысила 10%, то она превысила и 5%, т.е. насту-

пление события A влечёт за собой наступление события B . Поэтому

$$P(A/B) = \frac{P(A)}{P(B)}. \text{ По условию } P(A)=0,08, P(B)=0,2. \text{ Отсюда}$$

$$P(A/B) = \frac{0,08}{0,2} = 0,4.$$

Ответ: 0,4.

2). Только один из 10 ключей подходит к данному замку. Какова вероятность того, что замок будет открыт с четвёртой попытки, т.е. для открывания замка придётся испытать 4 ключа?

Решение. Пусть $A_i = \{i\text{-ый ключ подошёл к замку}\}$, $B = \{\text{для открывания замка придётся испытать 4 ключа}\}$. Тогда $B = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 A_4$.

Поскольку события-множители являются зависимыми, то $P(B) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2/\bar{A}_1)P(\bar{A}_3/\bar{A}_1\bar{A}_2)P(A_4/\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)$. Из условия

задачи следует, что $P(\bar{A}_1) = \frac{9}{10}$, $P(\bar{A}_2/\bar{A}_1) = \frac{8}{9}$, $P(\bar{A}_3/\bar{A}_1\bar{A}_2) = \frac{7}{8}$,

$$P(A_4/\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3) = \frac{1}{7}. \text{ Поэтому } P(B) = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{10}.$$

Ответ: 1/10.

3). Три стрелка ведут стрельбу по одной и той же цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,4, для второго – 0,8, для третьего – 0,9. Найти вероятность поражения цели а) только двумя стрелками; б) хотя бы одним стрелком.

Решение. Пусть $A_i = \{\text{в цель попал } i\text{-ый стрелок}\}$, $B = \{\text{цель поражена только двумя стрелками}\}$, $C = \{\text{цель поражена хотя бы одним стрелком}\}$. По условию $P(A_1)=0,4$, $P(A_2)=0,8$, $P(A_3)=0,9$. Поэтому $P(\bar{A}_1)=0,6$, $P(\bar{A}_2)=0,2$, $P(\bar{A}_3)=0,1$.

а). Используя операции сложения и умножения, выразим событие B через события A_i и $\bar{A}_i$: $B = A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3$.

Поскольку все события-слагаемые являются попарно несовместными, то $P(B) = P(A_1 A_2 \bar{A}_3) + P(A_1 \bar{A}_2 A_3) + P(\bar{A}_1 A_2 A_3)$.

Так как события-множители являются независимыми, то

$$P(A_1 A_2 \bar{A}_3) = P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) = 0,4 \cdot 0,8 \cdot 0,1 = 0,032,$$

$$P(A_1 \bar{A}_2 A_3) = P(A_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) = 0,4 \cdot 0,2 \cdot 0,9 = 0,072,$$

$$P(\bar{A}_1 A_2 A_3) = P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3) = 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,432.$$

Окончательно получаем

$$P(B) = 0,032 + 0,072 + 0,432 = 0,536.$$

б). Найдём вероятность события $\bar{C}$, которое выражается через события A_i и $\bar{A}_i$ проще, чем событие C :

$$\bar{C} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3.$$

Так как события A_i , $i = 1, 2, 3$ независимы в совокупности, то

$$P(\bar{C}) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = 0,6 \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 0,012.$$

Следовательно, $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - 0,012 = 0,988$.

Ответ: а) 0,536; б) 0,988.

4). Двое по очереди подбрасывают монету до первого появления «герба». Найти вероятность того, что второй сделает столько же подбрасываний, сколько и первый.

Решение. Пусть $A_i = \{\text{выпадение «герба» при } i\text{-ом подбрасывании}\}$, $B = \{\text{второй сделает столько же подбрасываний, сколько и первый}\}$. Тогда $B = \bar{A}_1 A_2 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 A_4 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 \bar{A}_5 A_6 + \dots$

Поскольку все события-слагаемые несовместны, а все события-множители независимы, то, используя аксиому вероятности суммы несовместных событий и теорему произведения независимых событий, получаем: $P(B) = P(\bar{A}_1)P(A_2) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(A_4) +$

$$+ P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(\bar{A}_4)P(\bar{A}_5)P(A_6) + \dots$$

Из условия следует, что $P(A_i) = 1/2$, а поэтому и $P(\bar{A}_i) = 1/2$, $i = 1, 2, 3, \dots$ Таким образом,

$$P(B) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \dots = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: 1/3.

5). На пяти карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5. Двое по очереди наудачу извлекают карточки до первого появления карточки с чётной цифрой (после извлечения карточка обратно в колоду не возвращается). Какова вероятность того, что первый сделает больше извлечений, чем второй?

Решение. $A_i = \{\text{карточка с чётной цифрой появилась при } i\text{-ом извлечении}\}$, $B = \{\text{первый сделает больше извлечений, чем второй}\}$. Тогда $B = A_1 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$. Поскольку события A_1 и $\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$ несовместны, то $P(B) = P(A_1) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3)$. Так как события $\bar{A}_1, \bar{A}_2, A_3$ – независимы, то

$$P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2 / \bar{A}_1) P(A_3 / \bar{A}_1 \bar{A}_2).$$

Из условия задачи следует, что

$$P(A_1) = 2/5, P(\bar{A}_1) = 3/5, P(\bar{A}_2 / \bar{A}_1) = 2/4, P(A_3 / \bar{A}_1 \bar{A}_2) = 2/3.$$

$$\text{Поэтому окончательно имеем } P(B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{5}.$$

Ответ: 3/5.

6). Сколько раз надо подбросить монету, чтобы с вероятностью 0,96875 «герб» выпал хотя бы один раз?

Решение. Пусть $A = \{\text{при } n \text{ подбрасываниях монеты «герб» выпал хотя бы один раз}\}$. Тогда $\bar{A} = \{\text{при } n \text{ подбрасываниях монеты «герб» не выпал ни разу, т.е. } n \text{ раз подряд выпадала «решка»}\}$.

Так как вероятность выпадения «решки» при одном подбрасывании равна $\frac{1}{2}$, то в силу независимости выпадений «решки» при n -

кратном подбрасывании монеты имеем $P(\bar{A}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, а, следова-

тельно, $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

По условию $P(A) = 0,96875$. Поэтому для определения n получаем уравнение $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0,96875$. Отсюда $n = 5$.

Ответ: 5.

4. Формула полной вероятности. Формулы Бейеса

1). В первой студенческой группе обучаются 24 студента, во второй – 36 студентов и в третьей – 40 студентов. По теории вероятностей получили отличные отметки 6 студентов первой группы, 6 студентов второй группы и 4 студента третьей группы. Какова вероятность того, что наугад выбранный студент получил по теории вероятностей отличную оценку?

Решение. Пусть $A = \{\text{наугад выбранный студент получил по теории вероятностей отличную оценку}\}$, $H_i = \{\text{наугад выбранный студент обучается в } i\text{-ой группе}\}$, $i = 1, 2, 3$.

Из условия следует, что

$$P(H_1) = \frac{24}{100}, P(H_2) = \frac{36}{100}, P(H_3) = \frac{40}{100}.$$

Кроме того, $P(A/H_1) = \frac{6}{24}$, $P(A/H_2) = \frac{6}{36}$, $P(A/H_3) = \frac{4}{40}$.

Так как события H_i , $i = 1, 2, 3$, попарно несовместны и образуют полную группу, то согласно формуле полной вероятности имеем

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3).$$

С учётом числовых значений всех вероятностей, входящих в правую часть этой формулы, окончательно получаем

$$P(A) = \frac{24}{100} \cdot \frac{6}{24} + \frac{36}{100} \cdot \frac{6}{36} + \frac{40}{100} \cdot \frac{4}{40} = 0,16.$$

Ответ: 0,16.

2). Имеются две одинаковые урны. В первой урне 7 белых и 3 чёрных шара, а во второй – 6 белых и 4 чёрных шара. Наудачу выбирается урна и из неё наугад вынимается один шар. Вынутый шар оказался белым. Какова вероятность того, что шар вынут из первой урны?

Решение. Пусть $A = \{\text{наугад вынутый шар из наудачу выбранной урны оказался белым}\}$, $H_i = \{\text{выбрана } i\text{-ая урна}\}$, $i = 1, 2$. Необходимо найти условную вероятность $P(H_1/A)$. Так как события H_1 и H_2 несовместны и образуют полную группу, то согласно формулам Бейеса имеем

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_1)P(A / H_1)}{P(H_1)P(A / H_1) + P(H_2)P(A / H_2)}.$$

Из условия задачи следует, что

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}, \quad P(A / H_1) = \frac{7}{10}, \quad P(A / H_2) = \frac{6}{10}.$$

$$\text{Поэтому } P(H_1 / A) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10}} = \frac{7}{13}.$$

Ответ: 7/13.

5. Последовательность независимых испытаний. Формула Бернулли

1). Вратарь киевского «Динамо» отражает в среднем 3 пенальти из 10. Какова вероятность того, что он отразит не меньше двух пенальти из пяти?

Решение. Пусть $A = \{\text{вратарь отразит пенальти}\}$, $B = \{\text{вратарь отразит не меньше двух пенальти из пяти}\}$. Вычислим вероятность события $\bar{B} = \{\text{вратарь отразит меньше двух пенальти из пяти}\}$:

$$P(\bar{B}) = P_5(0) + P_5(1),$$

где $P_5(0)$ – вероятность того, что вратарь не отразит ни одного пенальти из пяти, $P_5(1)$ – вероятность того, что вратарь отразит ровно один пенальти из пяти.

Согласно формуле Бернулли

$$P_5(0) = C_5^0 p^0 q^5 = q^5, \quad P_5(1) = C_5^1 p^1 q^4 = 5pq^4.$$

Из условия задачи следует, что $p = P(A) = 0,3$, а, следовательно, $q = 1 - p = 0,7$.

Поэтому $P(\bar{B}) = (0,7)^5 + 5 \cdot 0,3 \cdot (0,7)^4 \approx 0,53$. Отсюда

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) \approx 1 - 0,53 = 0,47.$$

Ответ: 0,47.

2). Чему равна вероятность наступления события в каждом из 39 независимых испытаний, если наивероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 25?

Решение. Пусть k_0 – наивероятнейшее число наступлений данного события в 39 независимых испытаниях. Тогда имеет место следующее двойное неравенство

$$np - q \leq k_0 \leq np + p$$

или, так как $q = 1 - p$, то $np + p - 1 \leq k_0 \leq np + p$, где по условию $n = 39$, $k_0 = 25$. Таким образом, для нахождения вероятности p по-

лучаем систему неравенств
$$\begin{cases} 40p - 1 \leq 25, \\ 25 \leq 40p. \end{cases}$$

Отсюда $\frac{25}{40} \leq p \leq \frac{26}{40}$ или $0,625 \leq p \leq 0,65$, т.е. $p \in [0,625; 0,65]$.

Ответ: $p \in [0,625; 0,65]$.

6. Предельные теоремы теории вероятностей

1). Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,5. Какова вероятность того, что при 250 выстрелах цель будет поражена: а) 145 раз; 2) не менее 100 и не более 150 раз?

Решение. а). По условию $n = 250$, $k = 145$, $p = 0,5$ ($q = 1 - p = 0,5$). Поскольку величина $npq = 250 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 62,5$ значительно больше 1, то для нахождения искомой вероятности можно воспользоваться локальной теоремой Лапласа:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \text{ где } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Используя числовые данные задачи, находим:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{250 \cdot 0,5 \cdot 0,5} \approx 7,90, \quad x = \frac{145 - 250 \cdot 0,5}{7,9} \approx 2,53.$$

По таблице приложения 2 определяем $\varphi(2,53) \approx 0,02$.

Поэтому окончательно имеем $P_{250}(145) \approx \frac{0,02}{7,9} = 0,003$.

б). Для приближённого вычисления искомой вероятности $P_{250}(100, 150)$ воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $q = 1 - p$, $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Используя числовые данные задачи, находим:

$$x_1 = \frac{100 - 0,5 \cdot 250}{7,9} = -3,16, \quad x_2 = \frac{150 - 0,5 \cdot 250}{7,9} = 3,16.$$

По таблице приложения 3 определяем: $\Phi(3,16) \approx 0,499$.

Окончательно получаем

$$P_{250}(100, 150) = \Phi(3,16) - \Phi(-3,16) = 2\Phi(3,16) = 0,998.$$

Ответ: а) 0,003; б) 0,998.

2). Вероятность наступления события A в каждом из независимых испытаний постоянна и равна 0,002. Найти вероятность того, что в 1000 испытаниях событие не наступит ни разу.

Решение. Так как вероятность $p = 0,002$ события A в каждом из независимых испытаний мала, а число испытаний $n = 1000$ велико, то для нахождения искомой вероятности $P_{1000}(0)$ можно воспользоваться приближённой формулой Пуассона

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \text{ где } \lambda = np.$$

Следовательно, $P_{1000}(0) \approx \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = \frac{1}{e^2}$ или

$$P_{1000}(0) \approx \frac{1}{2,7^2} \approx 0,14.$$

Ответ: 0,14.

3). Вероятность появления события в каждом из 10000 независимых испытаний равна 0,75. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,01.

Решение. Для вычисления искомой вероятности воспользуемся теоремой Бернулли о вероятности отклонения относительной частоты от постоянной вероятности:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Здесь $\frac{m}{n}$ – относительная частота, p – вероятность данного события. По условию

$$n = 10000, \quad p = 0,75 \quad (q = 1 - p = 0,25), \quad \varepsilon = 0,01.$$

Поэтому $\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} = 0,01 \cdot \sqrt{\frac{10000}{0,75 \cdot 0,25}} \approx 2,31$. По таблице приложения 3 находим: $\Phi(2,31) \approx 0,49$. Таким образом, окончательно

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0,75\right| \leq 0,01\right) \approx 2 \cdot 0,49 = 0,98.$$

Ответ: 0,98.

4). Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,36. Сколько нужно сделать испытаний, чтобы с вероятностью $P \geq 0,95$ можно было ожидать, что относительная частота появления данного события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,01.

Решение. Воспользуемся формулой для нахождения вероятности отклонения относительной частоты от постоянной вероятности

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Полагая $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 0,95$, $p = 0,36$ ($q = 1 - p = 0,64$), $\varepsilon = 0,01$, для определения n получаем неравенство

$$0,95 \leq 2\Phi\left(0,01 \sqrt{\frac{n}{0,36 \cdot 0,64}}\right) \quad \text{или} \quad \Phi\left(\frac{0,01}{0,48} \sqrt{n}\right) \geq 0,475.$$

По таблице приложения 3 находим, что если $\Phi(x) = 0,475$, то $x \approx 1,96$. По-

этому (в силу возрастания функции $\Phi(x)$) получаем $\frac{1}{48} \sqrt{n} \geq 1,96$,

отсюда $n \geq (48 \cdot 1,96)^2$ или $n \geq 8852$.

Ответ: нужно сделать не менее 8852 испытаний.

5). Вероятность появления события в каждом из 12100 независимых испытаний равна 0,75. В каком интервале с вероятностью $P = 0,98$ будет при этом лежать относительная частота данного события?

Решение. Воспользуемся формулой для нахождения вероятности отклонения относительной частоты от постоянной вероятности

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

где $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 0,98, n = 12100, p = 0,75, (q = 1 - p = 0,25)$.

Тогда для определения ε получаем уравнение

$$0,98 = 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{12100}{0,75 \cdot 0,25}}\right) \text{ или } \Phi\left(\frac{110}{0,25\sqrt{3}} \varepsilon\right) = 0,49.$$

По таблице приложения 3 находим, что если $\Phi(x) = 0,49$, то

$x \approx 2,34$. Отсюда $\frac{110}{0,25\sqrt{3}} \varepsilon = 2,34$ или $\varepsilon \approx 0,01$. Искомый интервал

имеет вид $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$, т.е. $(0,74; 0,76)$.

Ответ: $(0,74; 0,76)$.

Приложение 1

**ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ
САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ****ВАРИАНТ 1**

1. Какова вероятность того, что при случайном расположении в ряд кубиков, на которых написаны буквы А, А, А, Н, Н, С, получится слово АНАНАС?
2. Наудачу взяты два неотрицательных числа x и y , удовлетворяющие условию $x^2 + y^2 \leq 1$. Найти вероятность того, что их сумма будет не больше чем 0,5.
3. Вероятность попадания снаряда в самолёт при выстреле из орудия равна 0,4, а вероятность того, что самолёт будет сбит при выстреле из орудия равна 0,1. Найти вероятность того, что самолёт будет сбит, если в него попадёт снаряд.
4. Для посева заготовлены семена четырех сортов пшеницы: 20% всех семян – семена 1-го сорта, 30% – семена 2-го сорта, 10% – семена 3-го сорта и 40% – семена 4-го сорта. Вероятность того, что из зерна вырастет колос, содержащий не менее 40 зерен, для семян 1-го сорта равна 0,5, 2-го сорта – 0,3, 3-го сорта – 0,2, 4-го сорта – 0,1. Найти вероятность того, что: а) наудачу взятое зерно даст колос, содержащий не менее 40 зерен; б) сорванный колос с 40 зернами вырос из семян 2-го сорта.
5. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,2. Куплено 7 билетов. Найти вероятность того, что среди них будет: а) 3 выигрышных билета; б) хотя бы один выигрышный.
6. Известно, что 80% специалистов в районе имеет высшее образование. Найти вероятность того, что из 100 наудачу отобранных человек высшее образование имеют: а) не менее 70 человек; б) 90 человек.

ВАРИАНТ 2

1. Из 6 карточек с буквами З, А, Д, А, Ч, А (по одной букве на каждой карточке) наудачу выбирают 4 карточки и раскладывают их в ряд. Какова вероятность того, что получится слово ДАЧА?
2. На отрезке OA длины l числовой оси Ox наудачу поставлены две точки $B(x)$ и $C(y)$. Найти вероятность того, что длина отрезка BC окажется меньше, чем $l/2$.

3. Игральную кость подбрасывают до первого выпадения «6». Какова вероятность того, что придётся сделать четыре подбрасывания?
4. Статистические данные говорят о том, что 23% всех запросов кредитов в банке приходится на государственные органы, 18% – на другие банки, а остальные – на физические лица. Вероятности того, что взятый кредит не будет возвращен государственным органом, банком и физическим лицом соответственно равны 0,01; 0,07 и 0,2. Определить, какова вероятность того, что: 1) взятый кредит будет возвращен в банк; 2) невозвращённый кредит приходится на физическое лицо.
5. Вероятность выловить карпа в пруду при одном забрасывании удочки равна 0,4. Выловили шесть рыб. Какова вероятность того, что среди них: а) 3 карпа; б) не менее двух карпов.
6. Вероятность появления события в каждом из 3600 независимых испытаний равна 0,4. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,02.

ВАРИАНТ 3

1. Найти вероятность того, что участник лотереи «Спортлото 5 из 36» угадает ровно 3 номера?
2. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, находящимися друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу брошена монета радиуса $r < a$. Найти вероятность того, что монета не пересечёт ни одной из прямых.
3. Вероятности безотказной работы в течение промежутка времени длительностью T первого, второго и третьего станков соответственно равны 0,7; 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что в течение указанного промежутка времени безотказно проработают: а) только 2 станка; б) хотя бы один из станков.
4. В группе спортсменов 20 бегунов, 6 прыгунов и 4 метателя. Вероятность того, что будет выполнена норма мастера спорта бегуном, равна 0,9, прыгуном – 0,8 и метателем – 0,75. Найти вероятность того, что: а) наудачу выбранный спортсмен выполнит норму мастера спорта; б) наудачу выбранный спортсмен, не выполнивший норму мастера спорта, был бегуном.
5. Найти наиболее вероятное число выпадений «6» при 200 подбрасываниях игральной кости.
6. Вероятность того, что при сортировке изделий одно из них будет испорчено, равна 0,005. Найти вероятность того, что из 200 изделий окажутся испорченными: а) три изделия; б) не более двух изделий.

ВАРИАНТ 4

1. Шесть человек случайным образом садятся на шестиместную скамейку. Найти вероятность того, что два определённых лица окажутся рядом.
2. Внутри круга наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что эта точка окажется внутри вписанного в круг квадрата.
3. Два игрока по очереди извлекают карту из колоды 36-ти игровых карт (извлечённая карта возвращается обратно в колоду). Выигрывает тот, кто первым извлечёт туза. Каковы вероятности выигрыша каждого из игроков?
4. Для сдачи экзамена студентам было необходимо подготовить 30 вопросов. Из 25 студентов 10 подготовили все вопросы, 8 – по 25 вопросов, 5 – по 20 вопросов, остальные – по 15 вопросов каждый. Какова вероятность того, что : а) опрашиваемый студент ответит на заданный вопрос; б) ответивший на поставленный вопрос студент подготовил только половину вопросов.
5. Посажено 6 саженцев. Вероятность того, что саженец приживется, равна 0,7. Найти вероятность того, что: а) приживутся два саженца; б) не более трех саженцев.
6. Вероятность возникновения помехи при передаче сигнала в каждом из независимых испытаний равна 0,75. Найти вероятность того, что в 120 испытаниях помехи появятся: а) 84 раза; б) не более 75 раз.

ВАРИАНТ 5

1. Из 10 билетов лотереи выигрышными являются 3. Найти вероятность того, что из 5 случайно взятых билетов выигрышным окажется хотя бы один билет.
2. В квадрате со стороной a наудачу выбрана точка. Найти вероятность того, что расстояние от этой точки до ближайшей вершины квадрата не превышает $a/2$.
3. Два стрелка по очереди производят выстрелы по одной и той же цели до первого попадания каким-нибудь из стрелков. Какова вероятность, что первый сделает больше выстрелов, чем второй, если вероятности поражения цели первым и вторым стрелком соответственно равны 0,4 и 0,5 и каждый из стрелков может сделать не более четырёх выстрелов?
4. На заводе 24 человека обучаются на заочном факультете университета: 6 человек на машиностроительном факультете, 12 – на радиотехническом факультете и 6 – на экономическом факультете. Вероят-

ности успешно сдать все экзамены на предстоящей сессии для студентов этих факультетов соответственно равны 0,6, 0,7 и 0,8. Найти вероятность того, что: а) наудачу взятый студент успешно сдаст все экзамены; б) студент, «заваливший» сессию, обучается на радиотехническом факультете?

5. Исследуется жирность молока у 7 коров. Вероятность того, что молоко, полученное от отдельной коровы, имеет жирность не менее 4%, равна 0,6. Найти вероятность того, что жирность молока не менее 4% имеют а) три коровы; б) менее трех коров.

6. Вероятность появления события в каждом из 12100 независимых испытаний равна 0,75. В каком интервале с вероятностью $P = 0,98$ будет при этом лежать относительная частота данного события?

ВАРИАНТ 6

1. Из букв слова ТЕОРЕМА наугад выбрали две буквы (не обязательно разные). Какова вероятность того, что обе буквы будут либо гласными, либо согласными?

2. В квадрате со стороной a наудачу выбрана точка. Найти вероятность того, что расстояние от этой точки до ближайшей стороны квадрата не превышает $a/4$.

3. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при одновременном залпе из двух орудий равна 0,9. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым орудием, если для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

4. Семена для посева поступают из трех семеноводческих хозяйств. Причем первое и второе хозяйства присылают по 40% всех семян. Всхожесть семян из первого хозяйства равна 90%, из второго – 85%, из третьего – 95%. Определить вероятность того, что: а) наудачу взятое семя не взойдет; б) наудачу взятое взошедшее семя получено от второго хозяйства?

5. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность промаха при одном выстреле для первого стрелка равна 0,2, а для второго – 0,4. Найти наимвероятнейшее число залпов, при котором не будет ни одного попадания в мишень, если стрелки произведут 25 залпов.

6. Вероятность того, что деталь, изготовленная станком-автоматом, окажется бракованной, равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 200 деталей окажется: а) ровно 4 бракованных; б) более двух бракованных.

ВАРИАНТ 7

1. Какова вероятность того, что при случайном расположении в ряд кубиков, на которых написаны буквы А, А, К, С, С, получится слово КАССА?
2. Наудачу взяты два неотрицательных числа x и y , не превосходящие 2. Найти вероятность того, что их сумма будет не больше 1.
3. Вероятность безотказной работы прибора в течение 100 дней равна 0,5, а вероятность безотказной работы этого же прибора в течение 200 дней равна 0,2. Прибор проработал 100 дней. Найти вероятность того, что он проработает ещё 100 дней.
4. Запасная деталь может находиться в первой, второй или третьей партиях с вероятностями 0,2; 0,5 и 0,3 соответственно. Вероятности того, что деталь проработает положенное время без ремонта, для первой, второй и третьей партий равны соответственно 0,9, 0,8 и 0,7. Определить вероятность того, что: а) взятая наудачу деталь проработает положенное время; б) деталь, проработавшая положенное время, взята из первой партии.
5. В цехе 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент: а) включено 4 мотора; б) выключены все моторы.
6. Вероятность выхода из строя за время t одного конденсатора равна 0,2. Определить вероятность того, что за время t из 100 конденсаторов выйдут из строя: а) 26 конденсаторов; б) не менее 30 конденсаторов.

ВАРИАНТ 8

1. Из 7 карточек с буквами О, Т, Р, Е, З, О, К (по одной букве на каждой карточке) наудачу выбирают 5 карточек и раскладывают их в ряд. Какова вероятность того, что получится слово ОЗЕРО?
2. На отрезке OA длины l числовой оси Ox наудачу поставлены две точки $B(x)$ и $C(y)$, причём $y > x$. Найти вероятность того, что длина отрезка BC окажется меньше, чем $l/2$.
3. Монету подбрасывают до первого выпадения «герба». Какова вероятность того, что придётся сделать пять подбрасываний?
4. Два оператора набирают на компьютере базы данных. Вероятность того, что первый оператор допустит ошибку, равна 0,05; для второго оператора эта вероятность равна 0,1. Найти вероятность того, что а) при наборе будет допущена ошибка; б) оператором, допустившим ошибку, был первый оператор.

5. Вероятность того, что покупателю потребуется обувь 41-го размера, равна 0,2. Найти вероятность того, что из 5 первых покупателей обувь этого размера понадобится: а) одному; б) хотя бы одному покупателю.

6. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Сколько нужно сделать испытаний, чтобы с вероятностью $P \geq 0,96$ можно было ожидать, что относительная частота появления данного события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,01?

ВАРИАНТ 9

1. Устройство состоит из 6 элементов, из которых 2 изношенных. При включении устройства случайным образом включаются три элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.

2. На плоскость с нанесённой сеткой квадратов со стороной a наудачу брошена монета радиуса $r < a/2$. Найти вероятность того, что монета не пересечёт ни одной из сторон квадратов.

3. Вероятность показать рекордный результат на спортивных соревнованиях для первого спортсмена равна 0,5, для второго – 0,3, для третьего – 0,1. Какова вероятность того, что рекорд будет установлен: а) только одним спортсменом; б) хотя бы одним спортсменом.

4. Преподаватель экзаменует незнакомую ему группу. Он знает, что в предыдущую сессию в этой группе было 27 успевающих студентов, из них 6 отличников, и 3 неуспевающих студента. Он считает, что отличники ответят по билету с вероятностью 0,8, остальные успевающие студенты – с вероятностью 0,6 и неуспевающие – с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что: а) вызванный студент ответит по билету; б) студент, не ответивший по билету, был отличником.

5. Два стрелка одновременно стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,8, а для второго – 0,6. Найти наименьшее число залпов, при которых оба стрелка попадут в мишень, если будет произведено 15 залпов.

6. Учебник издан тиражом 100000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит не более 3 бракованных книг.

ВАРИАНТ 10

1. Все 8 книг восьмитомного собрания сочинений Ф.М. Достоевского поставили наугад на книжную полку. Какова вероятность того, что все тома с чётными номерами окажутся стоящими левее всех томов с нечётными номерами?
2. Внутри круга наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что эта точка окажется внутри вписанного в круг равностороннего треугольника.
3. Два стрелка поочерёдно стреляют по мишени до первого попадания. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,2, а для второго – 0,3. Найти вероятность того, что первый стрелок сделает больше выстрелов, чем второй.
4. В сентябре вероятность дождливого дня равна 0,3. Команда «Статистик» выигрывает в футбол в ясный день с вероятностью 0,8, а в дождливый день – с вероятностью 0,3. Определить вероятность того, что: а) команда проиграет назначенную на сентябрь игру; б) в день матча шёл дождь, если известно, что «Статистик» выиграл.
5. Покупатель посещает 6 магазинов. Вероятность покупки в каждом из этих магазинов равна 0,6. Найти вероятность того, что покупки будут сделаны: а) в трех магазинах; б) хотя бы в одном магазине.
6. Имеются 100 станков одинаковой мощности, работающих независимо друг от друга в одинаковом режиме, при котором их привод оказывается включенным в течение 80% всего рабочего времени. Какова вероятность того, что в произвольно взятый момент времени окажутся включенными: а) 90 станков; б) от 70 до 86 станков?

ВАРИАНТ 11

1. В коробке из 25 изделий 15 изделий 1-го сорта. Наудачу извлекаются 3 изделия. Определить вероятность того, что хотя бы одно из извлечённых изделий 1-го сорта.
2. В правильном треугольнике со стороной a наудачу выбрана точка. Найти вероятность того, что расстояние от этой точки до ближайшей вершины треугольника не превышает $a/2$.
3. Двое по очереди подбрасывают монету до первого выпадения «герба». Какова вероятность того, что второй сделает столько же подбрасываний, сколько и первый, если каждый может подбросить монету не более трёх раз?
4. Магазин получает товар от трех поставщиков: 55% всего товара поступает от 1-го поставщика, 20% – от второго, 25% – от третьего. Продукция, поступающая от 1-го поставщика, содержит 5% брака, от

2-го поставщика – 6% брака, от 3-го поставщика – 8% брака. Найти вероятность того, что: а) покупатель приобретет качественный товар; б) приобретённый наудачу в данном магазине бракованный товар получен от 2-го поставщика.

5. Студент сдает пять экзаменов. Вероятность сдать удовлетворительно каждый из этих экзаменов равна 0,7. Найти вероятность того, что студент сдаст удовлетворительно: а) не менее четырех экзаменов; б) все экзамены.

6. Вероятность появления события в каждом из 4900 независимых испытаний равна 0,45. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,02.

ВАРИАНТ 12

1. Из колоды 36-ти игральных карт наудачу выбирают 2 карты. Найти вероятность того, что обе карты окажутся либо тузами, либо картами бубновой масти

2. В правильном треугольнике со стороной a наудачу выбрана точка. Найти вероятность того, что расстояние от этой точки до ближайшей стороны треугольника не превышает $a/4$.

3. Вероятность того, что стрелок попадёт в цель хотя бы один раз при трёх выстрелах, равна 0,992. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

4. В магазин трикотажных изделий поступили носки, 60% которых получено от первой фабрики, 25% – от второй, 15% – от третьей. Первая фабрика дает 3% брака, вторая – 2% брака, третья – 5% брака. Найти вероятность того, что: а) купленные наудачу носки будут не бракованными; б) приобретённые в данном магазине наудачу носки с браком поступили с третьей фабрики.

5. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,3. Найти число испытаний, при котором наивероятнейшее число появлений события в этих испытаниях равно 30.

6. Численность работников предприятия составляет 500 человек. Вероятность невыхода на работу из-за болезни равна 0,01 для каждого работника предприятия. Определить вероятность того, что в ближайший день не выйдет на работу хотя бы один из работников.

ВАРИАНТ 13

1. Какова вероятность того, что при случайном расположении в ряд кубиков, на которых написаны буквы Б, Л, О, О, О, Т, получится слово БОЛОТО?
2. Наудачу взяты два положительных числа x и y , не превосходящие 2. Найти вероятность того, что частное y/x будет не больше чем 2.
3. Вероятность ответить на вопрос экзаменатора равна 0,7, а вероятность получить отличную оценку, т.е. правильно ответить на вопрос экзаменатора, равна 0,3. Какова вероятность получить отличную оценку, ответив на вопрос экзаменатора?
4. Имеются три урны. В первой урне 6 черных и 4 белых шара, во второй 5 белых и 5 черных шаров, в третьей 7 белых и 3 черных шара. Случайно выбирается урна и из нее наудачу извлекается шар. Найти вероятность того, что: а) извлеченный шар будет черным; б) шар извлекли из второй урны, если известно, что он оказался белым.
5. В цехе работают 8 двигателей. Вероятность перегрева каждого из них за определенное время работы равна 0,3. Найти вероятность того, что за время работы перегреется: а) половина двигателей; б) не менее двух двигателей.
6. Всхожесть семян составляет 80%. Найти вероятность того, что из 1000 посеянных семян: а) взойдет 840 семян; б) взойдут от 650 до 760 семян.

ВАРИАНТ 14

1. Из 6 карточек с буквами Н, А, У, Г, А, Д (по одной букве на каждой карточке) наудачу выбирают 4 карточки и раскладывают их в ряд. Какова вероятность того, что получится слово ДУГА?
2. На отрезке OA длины l числовой оси Ox наудачу поставлены две точки $B(x)$ и $C(y)$. Найти вероятность того, что длина отрезка BC меньше расстояния от точки O до ближайшей к ней точке.
3. Из колоды 36-ти игральных карт последовательно извлекаются карты до первого появления карты бубновой масти (извлеченная карта обратно в колоду не возвращается). Какова вероятность того, что будет извлечено 6 карт?
4. В первом ящике содержится 20 деталей, из них 10 стандартных, во втором – 30 деталей, из них 25 стандартных, в третьем – 10 деталей, из них 8 стандартных. Найти вероятность того, что: а) взятая наудачу

деталь, будет стандартной; б) деталь извлекли из второго ящика, если известно что она бракованная.

5. При передаче сообщения вероятность искажения для каждого знака равна 0,1. Какова вероятность того, что сообщение из 5 знаков: а) не будет искажено; б) содержит ровно одно искажение.

6. Вероятность появления события в каждом из 400 независимых испытаний равна 0,8. В каком интервале с вероятностью $P = 0,99$ будет при этом лежать относительная частота данного события?

ВАРИАНТ 15

1. Из 15 строительных рабочих 10 – штукатуры, а 5 – маляры. Наудачу отбирается бригада из 5 рабочих. Какова вероятность того, что среди них будут 3 маляра и 2 штукатура?

2. Пол в комнате выложен плитками, имеющими форму правильных шестиугольников со стороной $2a$. Из кошелька на пол выпала монета радиуса $r < a$. Какова вероятность, что монета не пересечёт ни одной из сторон шестиугольных плиток?

3. Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,3, второй – 0,4, третий – 0,5. По условиям приема события, состоящие в том, что данный вызов будет услышан, независимы. Найти вероятность того, что: а) корреспондент вообще услышит вызов; б) корреспондент услышит только один вызов.

4. Поток автомобилей, проезжающих мимо АЗС, состоит из 60% грузовых и 40% легковых автомобилей. Известно, что вероятность заправки грузового автомобиля равна 0,1, а легкового – 0,3. Найти вероятность того, что: а) проезжающий мимо АЗС автомобиль заправится на этой станции; б) автомобиль, заправившийся на данной АЗС, был легковым.

5. Чему равна вероятность наступления события в каждом из 49 независимых испытаний, если наимвероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 30?

6. В пчелиной семье 5000 пчел. Вероятность заболевания в течение дня равна 0,001 для каждой пчелы. Найти вероятность того, что в течение дня заболит более чем одна пчела.

ВАРИАНТ 16

1. A и B , а также ещё 6 человек встали случайным образом в очередь за арбузами. Найти вероятность того, что A и B окажутся разделёнными тремя людьми.
2. Внутри круга наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что эта точка окажется внутри вписанного в круг правильного шестиугольника.
3. В урне 2 белых и 3 чёрных шара. Два игрока поочерёдно извлекают из урны по одному шару (извлечённый шар возвращается после извлечения обратно в урну). Выигрывает тот, кто первым извлечёт белый шар. Найти вероятность того, что выиграет первый игрок, т.е. игрок, начинающий извлекать шары.
4. В магазине продаются 4 видеокамеры. Вероятность того, что они выдержат гарантийный срок, соответственно равны 0,91; 0,9; 0,95; 0,94. Найти вероятность того, что: а) взятая наудачу видеокамера выдержит гарантийный срок; б) выдержавшая гарантийный срок видеокамера – вторая?
5. Спортсмен делает 6 попыток взять высоту 1,8 м. Вероятность взять высоту в каждой попытке равна 0,7. Определить вероятность того, что спортсмен возьмет высоту: а) 5 раз; б) более 2-х раз.
6. Вероятность безотказной работы станка за время испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 испытаниях станок откажет: а) 10 раз; б) не менее 15 и не более 20 раз.

ВАРИАНТ 17

1. К концу дня в магазине осталось 60 арбузов, из которых 50 спелых. Покупатель наудачу выбирает два арбуза. Какова вероятность, что хотя бы один из них спелый?
2. В прямоугольнике со сторонами 4 и 6 наудачу выбрана точка. Найти вероятность того, что расстояние от этой точки до ближайшей вершины прямоугольника не превышает 2.
3. В урне 2 белых и 3 чёрных шара. Два игрока поочерёдно извлекают из урны по одному шару (извлечённый шар после извлечения не возвращается обратно в урну). Выигрывает тот, кто первым извлечёт белый шар. Найти вероятность того, что выиграет первый игрок, т.е. игрок, начинающий извлекать шары.
4. Пассажир за получением билета может обратиться в одну из касс. Вероятность обращения в первую кассу составляет 0,4; вторую – 0,35; третью – 0,25. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира имеющиеся в кассе билеты будут проданы, равна для первой кассы

0,3; для второй – 0,4; для третьей – 0,6. Найти вероятность того, что:
а) пассажир, выбрав наудачу кассу, купит билет; б) купивший билет пассажир приобрёл его во второй кассе.

5. Вытачивается 6 деталей. Вероятность произвести бракованную деталь при каждой выточке равна 0,1. Найти вероятность того, что среди этих деталей: а) будет менее трех бракованных; б) будет хотя бы одна бракованная.

6. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти наименьшее число испытаний, при котором с вероятностью $P = 0,99$ можно было ожидать, что относительная частота появления данного события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,04?

ВАРИАНТ 18

1. Найти вероятность того, что две последние цифры наудачу выбранного телефонного номера являются либо обе чётными, либо обе нечётными.

2. В прямоугольнике со сторонами 4 и 6 наудачу выбрана точка. Найти вероятность того, что расстояние от этой точки до ближайшей стороны прямоугольника не превышает 1.

3. Вероятность хотя бы одного попадания в мишень стрелком при трёх выстрелах равна 0,784. Найти вероятность одного промаха при трёх выстрелах.

4. На сборку поступило 50 деталей, изготовленных на первом станке, 100 деталей – на втором и 150 деталей – на третьем. Первый станок дает 2% брака, второй – 1% брака и третий – 3% брака. Найти вероятность того, что: а) взятая наугад деталь окажется небракованной; б) небракованная деталь изготовлена на первом станке?

5. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,7. Найти число испытаний, при котором наивероятнейшее число появлений события равно 20.

6. Для любого абонента вероятность позвонить на коммутатор в течение часа равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 300 абонентов. Какова вероятность, что в течение часа позвонят не более одного абонента.

ВАРИАНТ 19

1. Какова вероятность того, что при случайном расположении в ряд кубиков, на которых написаны буквы А, А, М, М, получится слово МАМА?

2. Наудачу взяты два положительных числа x и y , не превосходящие 1. Найти вероятность того, что произведение xy будет не меньше, чем 0,1.
3. Вероятность добежать до конца марафонскую дистанцию для некоторого спортсмена равна 0,8, а вероятность выиграть марафонскую дистанцию для этого же спортсмена равна 0,05. Какова вероятность того, что спортсмен выиграл марафонскую дистанцию, если известно, что он добежал её до конца?
4. В торговую фирму поставляются холодильники тремя фирмами в соотношении 5:2:3. Холодильники, поступающие от этих фирм, не требуют ремонта в течение гарантийного срока соответственно в 96%, 92% и 94% случаев. Найти вероятность того, что: а) купленный наудачу холодильник не потребует ремонта в течение гарантийного срока; б) холодильник был получен от второй фирмы, если через неделю после покупки он сломался.
5. Производится 8 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность возгорания аппарата равна 0,8. Найти вероятность того, что возгорание произойдет: а) в двух испытаниях; б) не более, чем в одном испытании.
6. Автомобиль движется по трассе длиной 243 км. Вероятность переключения передач на каждом километре трассы равна 0,25. Найти вероятность того, что переключение передач произойдет: а) 70 раз; б) не менее 50 и не более 80 раз.

ВАРИАНТ 20

1. Из 7 карточек с буквами К, О, С, И, Н, У, С (по одной букве на каждой карточке) наудачу выбирают 5 карточек и раскладывают их в ряд. Какова вероятность того, что получится слово СИНУС?
2. На отрезке OA длины l числовой оси Ox наудачу поставлены две точки $B(x)$ и $C(y)$, причём $y > x$. Найти вероятность того, что длина отрезка BC меньше длины отрезка OB .
3. Из колоды 36 игровых карт последовательно извлекаются карты до первого появления карты бубновой масти (извлечённая карта после извлечения возвращается обратно в колоду). Какова вероятность того, что будет извлечено 6 карт?
4. Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата в 3 раза больше производительности второго. Вероятность изготовления стандартной детали первым автоматом равна 0,95, а вторым – 0,8. Найти вероятность

того, что: а) взятая наудачу деталь будет стандартной; б) взятая наудачу нестандартная деталь изготовлена вторым автоматом?

5. Проверяются на стандартность 4 детали. Вероятность того, что деталь окажется стандартной, равна 0,8. Определить вероятность того, что: а) две детали окажутся стандартными; б) не менее трех деталей окажутся стандартными.

6. Вероятность появления события в каждом из 8100 независимых испытаний равна 0,6. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,01.

ВАРИАНТ 21

1. Из 25 работников предприятия 10 имеют высшее образование. Определить вероятность того, что из случайно отобранных трех человек высшее образование имеют два человека.

2. Пол в комнате выложен плитками, имеющими форму правильных треугольников со стороной a . Из кошелька на пол выпала монета радиуса $r < a\sqrt{3}/6$. Какова вероятность того, что монета не пересечёт ни одной из сторон треугольных плиток?

3. Вероятность потери письма в почтовом отделении равна 0,03, а телеграммы – 0,01. Отправлено два письма и одна телеграмма. Какова вероятность того, что дойдет: а) только телеграмма; б) хотя бы одно из отправлений?

4. Вероятность того, что недельный оборот торговца мороженым превысит 4000 гривен, при солнечной погоде равна 0,8, при переменной облачности – 0,5, а при дождливой погоде – 0,1. Вероятность солнечной погоды в данное время года составляет 0,2, вероятность переменной облачности и вероятность дождливой погоды – по 0,4. Найти вероятность того, что на следующей неделе: а) оборот превысит 4000 гривен; б) была солнечная погода, если известно, что оборот превысил 4000 гривен.

5. Чему равна вероятность наступления события в каждом из 60 независимых испытаний, если наивероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 25?

6. Найти вероятность того, что среди 200 изделий окажется более трех бракованных, если в среднем бракованные изделия составляют 1%?

ВАРИАНТ 22

1. Четверо юношей и четыре девушки случайным образом заняли места за круглым столом. Какова вероятность того, что юноши и девушки будут чередоваться?
2. Внутри квадрата наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что эта точка окажется внутри круга, вписанного в квадрат.
3. Слово ВЕКТОР составлено из букв разрезной азбуки. Карточки, на которых написаны эти буквы, тщательно перемешаны и извлекаются поочередно по одной каждым из двух игроков (после извлечения карточка возвращается обратно в колоду). Выигрывает тот, кто первым извлечёт карточку с гласной буквой. Найти вероятность выигрыша первого игрока, т.е. игрока, начинающего извлекать карточки.
4. Два предприятия выпускают однотипные изделия. Причем второе выпускает 55% изделий обоих предприятий. Вероятность выпуска бракованного изделия первым предприятием равна 0,1, вторым – 0,15. Определить вероятность того, что: а) взятое наудачу изделие окажется бракованным; б) взятое наудачу небракованное изделие выпущено вторым предприятием.
5. Для данного участника игры вероятность набросить кольцо на колышек равна 0,3. Какова вероятность того, что при шести бросках 3 кольца окажутся на колышке, если броски считать независимыми?
6. При производстве деталей вероятность брака при штамповке равна 0,1. Какова вероятность того, что из 400 наугад взятых деталей бракованными будут: а) 50 деталей; б) менее 45 деталей?

ВАРИАНТ 23

1. В урне 3 белых, 6 черных и 5 синих шаров. Из нее вынимают наудачу 3 шара. Какова вероятность того, что хотя бы один из извлечённых шаров окажется белым?
2. В правильном шестиугольнике со стороной a наудачу выбрана точка. Найти вероятность того, что расстояние от этой точки до ближайшей вершины треугольника не превышает $a/2$.
3. Слово ВЕКТОР составлено из букв разрезной азбуки. Карточки, на которых написаны эти буквы, тщательно перемешаны и извлекаются поочередно по одной каждым из двух игроков (после извлечения карточка не возвращается обратно в колоду). Выигрывает тот, кто первым извлечёт карточку с согласной буквой. Найти вероятность выигрыша первого игрока, т.е. игрока, начинающего извлекать карточки.
4. Семена для посева на ферму поступают из трех семеноводческих хозяйств, причем первое и второе хозяйства присылают по 40% всех

семян. Всхожесть семян из первого хозяйства равна 90%, из второго – 85%, из третьего – 95%. Определить вероятность того, что: а) взятое наудачу семя не взойдет; б) взошедшее семя получено от второго хозяйства.

5. На самолёте имеются 4 одинаковых двигателя. Вероятность нормальной работы каждого двигателя в полёте равна p . Найти вероятность того, что в полёте могут возникнуть неполадки: а) в одном двигателе; б) более чем в одном двигателе.

6. Вероятность появления события в каждом из 1000 независимых испытаний равна 0,85. В каком интервале с вероятностью $P = 0,99$ будет при этом лежать относительная частота данного события?

ВАРИАНТ 24

1. Найти вероятность того, что две первые цифры наудачу выбранного трёхзначного числа являются либо обе чётными, либо обе нечётными.

2. В правильном шестиугольнике со стороной a наудачу выбрана точка. Найти вероятность того, что расстояние от этой точки до ближайшей стороны шестиугольника не превышает $a/2$.

3. Сколько раз надо подбросить игральную кость, чтобы с вероятностью $91/216$ хотя бы один раз выпала «6»?

4. В магазин поступают телевизоры четырех заводов. Вероятность того, что в течение года телевизор не будет иметь неисправность, для 1-го завода равна 0,9, для 2-го – 0,8, для 3-го – 0,8, для 4-го – 0,99. Определить вероятность того, что: а) случайно выбранный телевизор выйдет из строя в течение года; б) наудачу выбранный исправный телевизор изготовлен на первом заводе.

5. Найти наиболее вероятное число выпадений двух «6» при 1000-кратном подбрасывании двух игральных костей.

6. Аппаратура содержит 2000 одинаково надежных элементов, вероятность отказа для каждого из которых равна 0,0005. Какова вероятность отказа аппаратуры, если он наступает при отказе хотя бы одного из элементов?

ВАРИАНТ 25

1. Какова вероятность того, что при случайном расположении в ряд кубиков, на которых написаны буквы О, О, Р, Р, Т получится слово РОТОР?

2. Наудачу взяты два неотрицательных числа x и y , удовлетворяющие условию $x + y \leq 1$. Найти вероятность того, что сумма квадратов $x^2 + y^2$ не больше чем 0,25.
3. Вероятность того, что при измерении некоторой величины будет допущена относительная ошибка, превышающая 10%, равна 0,1, а вероятность того, что эта ошибка превысит 25%, равна 0,05. В результате измерения относительная ошибка превысила 10%. Какова вероятность того, что эта ошибка превысила 25%?
4. Перед посевом 95% семян обрабатываются специальным раствором. Всхожесть семян после обработки – 99%, а необработанных семян – 85%. Найти вероятность того, что: а) случайно взятое семя взойдет; б) наудачу взято семя из числа обработанных семян, если известно, что оно взошло.
5. Вероятность того, что на некотором предприятии расход электроэнергии не превысит суточной нормы, равна 0,8. Какова вероятность того, что в течение пяти рабочих дней из семи перерасхода электроэнергии не будет?
6. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Какова вероятность того, что при 250 выстрелах цель будет поражена: а) 150 раз; б) не менее 100 раз?

ВАРИАНТ 26

1. Из 7 карточек с буквами Т, Е, О, Р, Е, М, А (по одной букве на каждой карточке) наудачу выбирают 4 карточки и раскладывают их в ряд. Какова вероятность того, что получится слово МОРЕ?
2. На отрезке OA длины l числовой оси Ox наудачу поставлены две точки $B(x)$ и $C(y)$, причём $y > x$. Найти вероятность того, что длина отрезка CA меньше длины отрезка BC .
3. Только один из 9 ключей подходит к данному замку. Какова вероятность того, что замок будет открыт с пятой попытки, т.е. для открывания замка придётся испытать 5 ключей?
4. Покупатель с равной вероятностью посещает каждый из трех магазинов. Вероятность того, что покупатель купит товар в первом магазине, равна 0,4, во втором – 0,6, в третьем – 0,8. Определить вероятность того, что: а) покупатель купит товар в каком-то магазине; б) сделанная покупателем покупка произведена во втором магазине.

5. Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть не менее двух партий из четырёх или не менее трёх партий из пяти? (Ничьи в расчёт не принимаются).

6. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,36. Сколько нужно сделать испытаний, чтобы с вероятностью $P \geq 0,95$ можно было ожидать, что относительная частота появления данного события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,01?

ВАРИАНТ 27

1. Из колоды, содержащей 52 карты, вынимается наугад 3 карты. Найти вероятность того, что это «тройка», «семерка» и «туз».

2. Пол в комнате выложен плитками, имеющими форму ромбов со стороной a и острым углом, равным 60° . Из кошелька на пол выпала монета радиуса $r < a/4$. Какова вероятность, что монета не пересечёт ни одной из сторон указанных плиток?

3. Три стрелка ведут стрельбу по одной и той же цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,6, для второго – 0,7, для третьего – 0,8. Найти вероятность поражения цели: а) только одним стрелком; б) хотя бы одним стрелком.

4. В корзине находятся 15 теннисных мячей, из которых 7 желтых, а остальные зеленого цвета. Для первой игры взят мяч, который не вернули в корзину после игры. Для второй игры также наугад берется мяч. Найти вероятность того, что; а) мяч во второй игре будет желтого цвета; б) в первой игре мяч был зеленого цвета, если известно, что во второй игре был жёлтый мяч.

5. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,4. Найти число испытаний, при котором наивероятнейшее число появлений события в этих испытаниях равно 50.

6. Вероятность наступления события в каждом из независимых испытаний равна 0,02. Найти вероятность того, что в 150 испытаниях событие наступит 5 раз.

ВАРИАНТ 28

1. Шесть человек случайным образом садятся за круглый стол. Найти вероятность того, что два определённых лица окажутся сидящими рядом.

2. Внутри правильного треугольника наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что эта точка окажется внутри круга, вписанного в этот треугольник.

3. Двое по очереди подбрасывают монету до первого появления герба. Найти вероятность того, что первый сделает больше подбрасываний, чем второй.

4. Из 18 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0,6; 7 стрелков – с вероятностью 0,7; 4 стрелка – с вероятностью 0,5 и 2 стрелка – с вероятностью 0,4. Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел. Определить вероятность того, что: а) стрелок попадет в цель; б) стрелок принадлежит ко второй группе, если известно, что он промахнулся.

5. В семье пять детей. Найти вероятность того, что среди этих детей не более двух мальчиков. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.

6. Вероятность полного излечения болезни равна 0,9. Найти вероятность того, что из 180 больных, прошедших курс лечения, будут признаны здоровыми: а) 150 человек; 2) не менее 145 и не более 160 человек.

ВАРИАНТ 29

1. Найти вероятность того, что участник лотереи «Спортлото 5 из 36» угадает хотя бы один номер.

2. В прямоугольнике со сторонами 4 и 8 наудачу выбрана точка. Найти вероятность того, что расстояние от этой точки до ближайшей вершины прямоугольника не меньше 1.

3. На пяти карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5. Двое по очереди наудачу извлекают карточки до первого появления карточки с чётной цифрой (после извлечения карточки в колоду не возвращаются). Какова вероятность того, что второй сделает столько же извлечений, сколько и первый?

4. В первом ящике из 20 деталей 4 бракованных, во втором из 30 деталей 5 бракованных. Из первого ящика во второй переложили две детали. Найти вероятность того, что: а) деталь, извлеченная после этого из второго ящика, будет бракованной; б) из первого ящика во второй были переложены две бракованные детали, если известно, что деталь, вынутая из второго ящика, оказалась бракованной.

5. При высаживании непикированной рассады помидоров только 80% растений приживаются. Какова вероятность того, что из 8 кустов приживутся: а) ровно 5; б) не менее 2-ух?

6. Вероятность появления события в каждом из 10000 независимых испытаний равна 0,75. Найти вероятность того, что относительная

частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,01.

ВАРИАНТ 30

1. Из коробки, в которой находились 5 красных и 7 синих карандашей, выпало 3 карандаша. Какова вероятность того, что все выпавшие карандаши являются либо синими, либо красными?
2. В прямоугольнике со сторонами 4 и 8 наудачу выбрана точка. Найти вероятность того, что расстояние от этой точки до ближайшей стороны прямоугольника не меньше 1.
3. Сколько раз надо подбросить монету, чтобы с вероятностью $31/32$ «герб» выпал хотя бы один раз?
4. Перед посевом 90% всех семян было обработано ядохимикатами. Вероятность поражения вредителями растений из обработанных семян равна 0,08, а растений из необработанных семян – 0,4. Определить вероятность того, что: а) взятое наудачу растение окажется пораженным; б) взятое наудачу поражённое растение взошло из обработанных семян.
5. Чему равна вероятность наступления события в каждом из 39 независимых испытаний, если наивероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 25?
6. В среднем левши составляют 1%. Какова вероятность того, что среди 200 студентов найдется: а) ровно 4 левши; б) не менее 3 левшей.

Приложение 2

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
0,00	0,3989	1,00	0,2420	2,0	0,0540
0,05	0,3984	1,05	0,2299	2,1	0,0440
0,10	0,3970	1,10	0,2179	2,2	0,0355
0,15	0,3945	1,15	0,2059	2,3	0,0283
0,20	0,3910	1,20	0,1942	2,4	0,0224
0,25	0,3867	1,25	0,1826	2,5	0,0175
0,30	0,3814	1,30	0,1714	2,6	0,0136
0,35	0,3752	1,35	0,1604	2,7	0,0104
0,40	0,3683	1,40	0,1497	2,8	0,0079
0,45	0,3605	1,45	0,1394	2,9	0,0060
0,50	0,3521	1,50	0,1295	3,0	0,0044
0,55	0,3429	1,55	0,1200	3,1	0,0033
0,60	0,3332	1,60	0,1109	3,2	0,0024
0,65	0,3230	1,65	0,1023	3,3	0,0017
0,70	0,3123	1,70	0,0940	3,4	0,0012
0,75	0,3011	1,75	0,0863	3,5	0,0009
0,80	0,2897	1,80	0,0790	3,6	0,0006
0,85	0,2780	1,85	0,0721	3,7	0,0004
0,90	0,2661	1,90	0,0656	3,8	0,0003
0,95	0,2541	1,95	0,0596	3,9	0,0002

Приложение 3

Таблица значений функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$.

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,0	0,0000	0,39	0,1517	0,78	0,2823
0,01	0,0040	0,40	0,1554	0,79	0,2852
0,02	0,0080	0,41	0,1591	0,80	0,2881
0,03	0,0120	0,42	0,1628	0,81	0,2910
0,04	0,0160	0,43	0,1664	0,82	0,2939
0,05	0,0199	0,44	0,1700	0,83	0,2967
0,06	0,0239	0,45	0,1736	0,84	0,2995
0,07	0,0279	0,46	0,1772	0,85	0,3023
0,08	0,0319	0,47	0,1808	0,86	0,3051
0,09	0,0359	0,48	0,1844	0,87	0,3078
0,10	0,0398	0,49	0,1879	0,88	0,3106
0,11	0,0438	0,50	0,1915	0,89	0,3133
0,12	0,0478	0,51	0,1950	0,90	0,3159
0,13	0,0517	0,52	0,1985	0,91	0,3186
0,14	0,0557	0,53	0,2019	0,92	0,3212
0,15	0,0598	0,54	0,2054	0,93	0,3238
0,16	0,0636	0,55	0,2088	0,94	0,3264
0,17	0,0675	0,56	0,2123	0,95	0,3289
0,18	0,0714	0,57	0,2157	0,96	0,3315
0,19	0,0753	0,58	0,2190	0,97	0,3340
0,20	0,0793	0,59	0,2224	0,98	0,3365
0,21	0,0832	0,60	0,2257	0,99	0,3389
0,22	0,0871	0,61	0,2291	1,00	0,3413
0,23	0,0910	0,62	0,2324	1,01	0,3438
0,24	0,0948	0,63	0,2357	1,02	0,3461
0,25	0,0987	0,64	0,2379	1,03	0,3485
0,26	0,1026	0,65	0,2422	1,04	0,3508
0,27	0,1064	0,66	0,2454	1,05	0,3531
0,28	0,1103	0,67	0,2486	1,06	0,3554
0,29	0,1141	0,68	0,2517	1,07	0,3577
0,30	0,1179	0,69	0,2549	1,08	0,3599
0,31	0,1217	0,70	0,2580	1,09	0,3621
0,32	0,1255	0,71	0,2611	1,10	0,3643
0,33	0,1293	0,72	0,2642	1,11	0,3665
0,34	0,1331	0,73	0,2673	1,12	0,3686
0,35	0,1368	0,74	0,2703	1,13	0,3708
0,36	0,1406	0,75	0,2734	1,14	0,3729
0,37	0,1443	0,76	0,2764	1,15	0,3746
0,38	0,1480	0,77	0,2794	1,16	0,3770

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,17	0,3790	1,62	0,4474	2,14	0,4838
1,18	0,3810	1,63	0,4484	2,16	0,4846
1,19	0,3830	1,64	0,4495	2,18	0,4854
1,20	0,3849	1,65	0,4505	2,20	0,4861
1,21	0,3869	1,66	0,4515	2,22	0,4868
1,22	0,3883	1,67	0,4525	2,24	0,4875
1,23	0,3907	1,68	0,4535	2,26	0,4881
1,24	0,3925	1,69	0,4545	2,28	0,4887
1,25	0,3944	1,70	0,4554	2,30	0,4893
1,26	0,3962	1,71	0,4564	2,32	0,4896
1,27	0,3980	1,72	0,4573	2,34	0,4904
1,28	0,3997	1,73	0,4582	2,36	0,4909
1,29	0,4015	1,74	0,4591	2,38	0,4913
1,30	0,4032	1,75	0,4599	2,40	0,4918
1,31	0,4049	1,76	0,4608	2,42	0,4922
1,32	0,4066	1,77	0,4616	2,44	0,4927
1,33	0,4082	1,78	0,4625	2,46	0,4931
1,34	0,4099	1,79	0,4633	2,48	0,4934
1,35	0,4115	1,80	0,4641	2,50	0,4938
1,36	0,4131	1,81	0,4649	2,52	0,4941
1,37	0,4147	1,82	0,4656	2,54	0,4945
1,38	0,4162	1,83	0,4664	2,56	0,4948
1,39	0,4177	1,84	0,4671	2,58	0,4951
1,40	0,4192	1,85	0,4678	2,60	0,4953
1,41	0,4207	1,86	0,4686	2,62	0,4956
1,42	0,4222	1,87	0,4693	2,64	0,4959
1,43	0,4236	1,88	0,4699	2,66	0,4931
1,44	0,4251	1,89	0,4706	2,68	0,4963
1,45	0,4265	1,90	0,4713	2,70	0,4965
1,46	0,4279	1,91	0,4719	2,72	0,4967
1,47	0,4292	1,92	0,4726	2,74	0,4969
1,48	0,4306	1,93	0,4732	2,76	0,4971
1,49	0,4319	1,94	0,4738	2,80	0,4974
1,50	0,4332	1,95	0,4744	2,84	0,4977
1,51	0,4345	1,96	0,4750	2,88	0,4980
1,52	0,4357	1,97	0,4756	2,92	0,4982
1,53	0,4370	1,98	0,4761	2,96	0,4985
1,54	0,4382	1,99	0,4767	3,00	0,4986
1,55	0,4393	2,00	0,4772	3,20	0,4993
1,56	0,4406	2,02	0,4783	3,40	0,4996
1,57	0,4418	2,04	0,4793	3,60	0,4998
1,58	0,4429	2,06	0,4803	3,80	0,4999
1,59	0,4441	2,08	0,4812	4,00	0,4999
1,60	0,4452	2,10	0,4821	4,50	0,4999
1,61	0,4463	2,12	0,4830	5,00	0,4999

Библиографический список

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика/ В.Е. Гмурман. –М.: Высшая школа, 1977. –479 с.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике/ В.Е. Гмурман. –М.: Высшая школа, 1979. –400 с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. –М.: Физ. мат. гиз, 1962. –560 с.
4. Солодовников А.С. Теория вероятностей. – М.: Просвещение, 1978. –192 с.
5. Виленкин Н.Я. Задачник-практикум по теории вероятностей с элементами комбинаторики и математической статистике. –М.: Просвещение, 1979. –112 с.