

Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный технический университет



ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Методические указания и варианты контрольных заданий по теме модуля в дисциплине «Высшая математика» для студентов технических и экономических специальностей



Севастополь
2009

УДК 517(075.8)

Дифференцирование функций одной переменной. Методические указания и варианты контрольных заданий по теме модуля в дисциплине «Высшая математика» для студентов технических и экономических специальностей / Сост.: З.Д. Захарова, С.Ф. Ледяев, Т.М. Мазлумян – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2009.-47 с.

Целью методических указаний является оказание помощи студентам технических и экономических специальностей в выполнении модульной работы по дифференциальному исчислению функций одной переменной и приложениям производной.

Разработан комплекс заданий для работы студентов по теме модуля, сгруппированных по вариантам. Каждый вариант содержит задания на развитие техники дифференцирования по принципу нарастания сложности заданий. Также каждый вариант содержит задания на приложения производной. Всего предложено 26 вариантов заданий.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры высшей математики, протокол №11 от 1 июля 2009 года.

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: Моисеенко Л.Н., ст. преподаватель кафедры высшей математики

СОДЕРЖАНИЕ

1.	Дифференцирование функций одной переменной	3
2.	Пример выполнения заданий по теме дифференцирования	16
3.	Задания для самостоятельной работы по теме дифференцирования функций	22

Дифференцирование функций одной переменной

1. Задачи, приводящие к понятию производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале (a, b) . Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a, b)$. Для любого $x \in (a, b)$ разность $x - x_0$ называется приращением аргумента x в точке x_0 и обозначается Δx (дельта икс): $\Delta x = x - x_0$. Отсюда $x = x_0 + \Delta x$. Разность соответствующих значений функции $f(x) - f(x_0)$ называется приращением функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается Δy (или $\Delta f(x_0)$): $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ или $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ (см. рисунок 1). Приращения Δx и Δy могут быть как положительными, так и отрицательными числами.

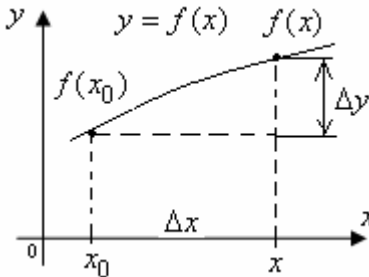


Рисунок 1 – Приращения аргумента и функции

1.1 Скорость прямолинейного движения

Пусть известен закон движения материальной точки M вдоль некоторой прямой (например, оси Ox). Если за x принять абсциссу движущейся точки, а за t - время, то закон движения имеет вид $x = f(t)$. Необходимо найти скорость движущейся точки для любого момента времени.

Пусть в некоторый момент времени t_0 движущаяся точка занимает положение M (рисунок 2), $OM = x$. В момент времени $t = t_0 + \Delta t$ точка займет положение M_1 , причем $OM_1 = x + \Delta x$. Согласно уравнению дви-

жения $x + \Delta x = f(t_0 + \Delta t)$. Перемещение точки за время Δt равно $\Delta x = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$. Если точка движется в одном направлении, то Δx численно пути, пройденному точкой за время Δt . Отношение $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ выражает среднюю скорость движения точки за Δt , т.е. $V_{\text{сред}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$.

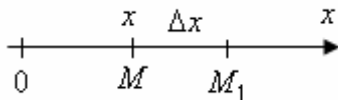


Рис. 2 – К определению скорости движения

Предел средней скорости при $\Delta t \rightarrow 0$ называется скоростью движения в данный момент времени t_0 или мгновенной скоростью движения. Таким образом, задача о скорости движения материальной точки сводится к отысканию предела:

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} V_{\text{сред}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

1.2 Задача о касательной

Пусть некоторая непрерывная кривая задана уравнением $y = f(x)$. Необходимо записать уравнение касательной к этой кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$. Касательной к заданной непрерывной кривой в точке M_0 называется предельное положение секущей M_0M_1 , когда точка M_1 неограниченно приближается к точке M_0 вдоль кривой (рисунок 3).

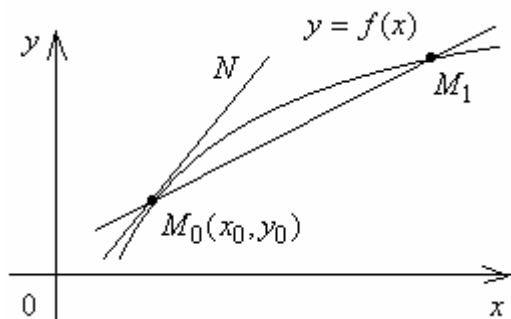


Рис. 3 – Секущая и касательная

При этом предполагается, что такое предельное положение секущей существует. В противном случае касательной к кривой в данной точке не существует. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном на-

правлении имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$, где $x_0, y_0 = f(x_0)$ - координаты точки, через которую проходит касательная, они известны. Неизвестен угловой коэффициент k , который численно равен тангенсу угла наклона прямой относительно положительного направления оси Ox . Дополним рисунок 3 и перейдем к рисунку 4.

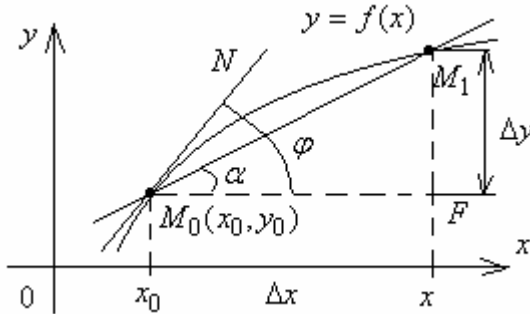


Рис. 4 – К определению углового коэффициента касательной

Если точка M_1 имеет координаты $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, то из прямоугольного треугольника M_0FM_1 определяем угловой коэффициент для секущей M_0M_1 : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если точка M_1 неограниченно приближается к точке M_0 вдоль кривой $y = f(x)$, то $\Delta x \rightarrow 0$. При этом угол наклона секущей $\alpha \rightarrow \varphi$, где φ - угол наклона касательной MN (считаем, что касательная не перпендикулярна к оси Ox , т.е. $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$). Следовательно, $\operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \alpha$, и задача определения уравнения касательной сводится к определению предела

$$k = \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Замечание. Из теории пределов известно, что для существования предела некоторого выражения в точке должны существовать односторонние пределы в этой точке, равные между собой. Если кривая $y = f(x)$ в точке M_0 имеет излом, то при приближении к этой точке слева и справа получим различные угловые коэффициенты касательной, а это значит, что предел

$k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ не существует и не существует касательная в точке. Например, для непрерывной линии $y = |x|$ в точке $x = 0$ касательная не существует (см. рисунок 5).

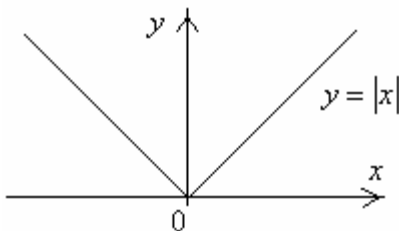


Рис. 5 – График функции $y = |x|$.

2. Понятие производной

В рассмотренных выше задачах возникла необходимость вычислить один и тот же предел – предел отношения приращения некоторой непрерывной функции к приращению независимой переменной при стремлении последнего к нулю.

Определение. Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx , когда приращение аргумента стремится к нулю, если этот предел существует. Производную обозначают y' , y'_x , $f'(x)$. Итак,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{или} \quad (1)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (2)$$

Определение. Операция нахождения производной функции называется дифференцированием функции.

Определение. Функция, для которой производная (предел (1, 2)) существует в некоторой точке, называется дифференцируемой в этой точке.

Определение. Функция, дифференцируемая в каждой точке некоторого интервала (a, b) , называется дифференцируемой в этом интервале.

Из рассмотренных задач можно установить геометрический и механический смысл производной.

Геометрический смысл производной: угловой коэффициент касательной к графику функции равен значению её производной в точке касания.

Механический смысл производной: скорость прямолинейного движения в момент времени t равна значению производной от пути по времени в данный момент времени.

Для нахождения производной следует осуществить такую последовательность действий:

- а) независимой переменной x зададим приращение Δx ;
- б) найдем приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;
- в) составим отношение приращения функции к приращению аргумента;
- г) найдем предел (2).

Пример 1. Задана функция $y = x^2$. Определить её производную.

Решение:

- а) $x + \Delta x$;
- б) $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$;
- в) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$;
- г) $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$.

Ответ: $(x^2)' = 2x$.

3. Основные правила дифференцирования

Из определения производной вытекают правила дифференцирования (свойства производной):

1. Производная постоянной величины равна нулю $C' = 0$.
2. Производная алгебраической суммы дифференцируемых функций равна алгебраической сумме производных этих функций

$$(U(x) + V(x))' = U'(x) + V'(x).$$

3. Производная произведения двух дифференцируемых функций

$$(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'.$$

4. Постоянный множитель выносится за знак производной

$$(C \cdot f(x))' = C \cdot (f(x))'.$$

5. Производная дроби двух функций $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}.$

6. *Производная сложной функции.* Пусть $y = f(z)$, $z = g(x)$. Множество всех x , при которых значения z входят в область определения функции $f(z)$, является областью определения сложной функции

$$y = f(g(x)).$$

При этом $g(x)$ называется внутренней функцией, функция f называется внешней функцией. Переменная z - промежуточный аргумент; x - окончательный аргумент.

Если функция $g(x)$ имеет производную в точке x , а функция f имеет производную в точке $z = g(x)$, то сложная функция y имеет производную, равную произведению производной от внешней функции по промежуточному аргументу на производную от внутренней функции по окончательному аргументу:

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Внутренних функций и промежуточных аргументов может быть несколько.

7. *Производная обратной функции.* Непрерывная дифференцируемая функция $y = f(x)$ в интервале монотонности имеет обратную себе функцию $x = \varphi(y)$. Бесконечно малому приращению Δx соответствует бесконечно малое приращение Δy и наоборот: $\Delta x \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta y \rightarrow 0$.

$$\text{Тогда } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta x / \Delta y}, \text{ или } f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

Пример 2. Функция $y = \arcsin x$ имеет себе обратную функцию

$$x = \sin y. \text{ При этом } D(y) = [-1; 1], E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

$x' = (\sin y)' = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$. По правилу 7 дифференцирования обратных функций $f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$ имеем:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

4. Таблица производных и примеры дифференцирования

Таблица 1 – Производные основных элементарных функций

- | | |
|--|--|
| 1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad n \neq 0.$ | |
| 2. $(e^x)' = e^x.$ | 3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a.$ |
| 4. $(\ln x)' = \frac{1}{x}.$ | 5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$ |
| 6. $(\sin x)' = \cos x$ | 7. $(\cos x)' = -\sin x$ |
| 8. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$ | 9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ |
| 10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$ | 11. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$ |
| 12. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$ | 13. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$ |

Пункт 1-й таблицы производных имеет несколько важных частных случаев:

$$(x^2)' = 2x, \quad (x^3)' = 3x^2, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}, \quad \left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{-2}{x^3}.$$

Помимо таблицы 1 производных основных элементарных функций необходимо иметь понятие о производных гиперболических функций. К гиперболическим функциям относятся: гиперболический синус $\operatorname{sh}(x)$; гиперболический косинус $\operatorname{ch}(x)$; гиперболический тангенс $\operatorname{th}(x)$; гиперболический котангенс $\operatorname{cth}(x)$.

Гиперболические функции определяются следующим образом:

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}; \quad \operatorname{cth}(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)}.$$

Производные гиперболических функций:

$$\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x); \quad \operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x);$$

$$\operatorname{th}(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}; \quad \operatorname{cth}(x) = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2(x)}.$$

Пример 3. Применение правил дифференцирования.

а) Найти производную функции $y = 7x^5 + 9 \cos x - 5^x + 7 \operatorname{ctgx} - 8$.

Заданная функция - алгебраическая сумма функций, умноженных на постоянные величины. Для определения производной используются правила дифференцирования №1, 2, 4 и таблица производных основных функций.

$$\begin{aligned} y' &= (7x^5 + 9 \cos x - 5^x + 7 \operatorname{ctgx} - 8)' = 7 \cdot (x^5)' + 9(\cos x)' - (5^x)' + \\ &+ 7(\operatorname{ctgx})' - 8' = 35x^4 - 9 \sin x - 5^x \cdot \ln 5 - \frac{7}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

б) Найти производную функции $y = e^x \cdot \operatorname{tg} x$. Функция y - произведение двух функций, для определения производной используется правило дифференцирования №3 о производной произведения функций.

$$y' = (e^x)' \cdot \operatorname{tg} x + e^x \cdot (\operatorname{tg} x)' = e^x \cdot \operatorname{tg} x + e^x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

в) Найти производную функции $y = \frac{x^3 + 4x^2 - 5x + 7}{\sin x}$. Функция y -

частное двух функций. Для определения производной используется правило №5 о производной дроби функций.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^3 + 4x^2 - 5x + 7)' \cdot \sin x - (x^3 + 4x^2 - 5x + 7) \cdot (\sin x)'}{(\sin x)^2} = \\ &= \frac{(3x^2 + 8x - 5) \cdot \sin x - (x^3 + 4x^2 - 5x + 7) \cdot \cos x}{(\sin x)^2}. \end{aligned}$$

г) Найти производную функции $y = \sqrt{\arcsin(3x^2 - 7x + 1)}$. Задана сложная функция. Внешней функцией является корень квадратный (частный случай степенной функции), внутренняя функция - арксинус, которая является внешней для внутренней функции - квадратного трёхчлена.

$$\begin{aligned} y' &= (\sqrt{\arcsin(3x^2 - 7x + 1)})' \cdot (\arcsin(3x^2 - 7x + 1))' \cdot (3x^2 - 7x + 1)' = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\arcsin(3x^2 - 7x + 1)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (3x^2 - 7x + 1)^2}} \cdot (6x - 7). \end{aligned}$$

5. Дифференцирование неявно заданных функций.

Функция независимой переменной x называется неявной, если она определяется из неразрешенного уравнения, связывающего аргумент и функцию y : $F(x, y) = 0$. Часто разрешить это уравнение невозможно или нецелесообразно. При этом можно определить производную функции, дифференцируя обе части равенства по x , помня, что y есть функция от x .

Пример 4. Определить производную функции, заданной неявно

$$x^2 y - xy^3 + \sin(2x - 3y) = 1.$$

Решение

$$(x^2 y)' - (xy^3)' + (\sin(2x - 3y))' = 1',$$

$$2xy + x^2 y' - y^3 - 3xy^2 y' + \cos(2x - 3y)(2 - 3y') = 0,$$

$$y'(x^2 - 3xy^2 - 3\cos(2x - 3y)) = y^3 - 2xy - 2\cos(2x - 3y),$$

$$y' = \frac{y^3 - 2xy - 2\cos(2x - 3y)}{x^2 - 3xy^2 - 3\cos(2x - 3y)}.$$

Как видим, производная выражается явно относительно аргумента x и функции y .

6. Логарифмическое дифференцирование

Для дифференцирования функции $y = u(x)^{v(x)}$ нельзя непосредственно применить ни одно из правил дифференцирования или пункт таблицы производных, так как и основание, и показатель степени – функции независимой переменной. Функция называется показательной – степенной или сложной показательной.

Дифференцирование возможно, если вначале определить производную натурального логарифма функции. Определяем натуральный логарифм показательной – степенной функции: $\ln y = v(x) \cdot \ln(u(x))$. Теперь дифференцируем выражение, как неявно заданную функцию:

$$(\ln y)' = (v(x) \cdot \ln(u(x)))', \quad \frac{1}{y} \cdot y' = v' \ln(u) + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u',$$

$$y' = y(v' \ln(u) + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u'), \quad y' = u(x)^{v(x)} \cdot (v' \ln(u) + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u').$$

Пример 5. $y = (\operatorname{tg} x)^{e^x}$.

Решение. Логарифмируем левую и правую части по основанию e :

$$\ln y = \ln(\operatorname{tg} x) e^x, \quad \ln y = e^x \cdot \ln(\operatorname{tg} x).$$

Теперь дифференцируем равенство, учитывая, что $\ln y$ - сложная функция, так как $y = y(x)$.

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (e^x)' \ln(\operatorname{tg} x) + e^x (\ln(\operatorname{tg} x))', \quad \frac{y'}{y} = e^x \ln(\operatorname{tg} x) + e^x \cdot \frac{(\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg} x},$$

$$y' = y \left(e^x \ln(\operatorname{tg} x) + e^x \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right),$$

$$y' = (\operatorname{tg} x)^{e^x} \cdot e^x \left(\ln(\operatorname{tg} x) + \frac{2}{\sin 2x} \right).$$

7. Дифференцирование параметрически заданных функций

Пусть функция $y = f(x)$ задана следующим образом:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \phi(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Такое задание функции называется параметрическим, здесь переменная t называется параметром.

Пусть функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную $t = \Phi(x)$ (то есть является строгой монотонной на интервале (α, β)). Тогда y является функцией от x : $y = \phi(\Phi(x))$. Таким образом, уравнения $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$ определяют y как функцию от x .

Пусть $\varphi(t)$, $\phi(t)$ - дифференцируемые функции параметра t , причем $\varphi'(t) \neq 0$. Как всякие дифференцируемые функции они непрерывные. В силу этого при $\Delta t \rightarrow 0$ $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$.

$$y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y / \Delta t}{\Delta x / \Delta t} = \frac{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta y / \Delta t}{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta x / \Delta t} = \frac{y'_t}{x'_t}. \text{ Таким образом,}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\phi'(t)}{\varphi'(t)}. \quad (3)$$

Пример 6. Определить производную для функции $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$

Решение. Используя формулу (3), найдём y'_x для функции, заданной параметрически. Дифференцируем по t переменные x и y :

$$x'_t = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad y'_t = 2 \cos t \cdot (-\sin t) = -\sin 2t;$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\sin 2t \cdot \cos^2 t.$$

8. Производные высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируемая на интервале (a, b) . Её производная также будет функцией от x , в чем мы убедились на рассмотренных ранее примерах. Вполне возможно, что эта функция будет также дифференцируемой на указанном интервале.

Определение. Второй производной называют производную от производной и обозначают y'' : $y'' = (y')'$.

Вторую производную также можно дифференцировать: $y''' = (y'')'$. В общем случае, производная n -го порядка определяется как производная от производной $(n-1)$ -го порядка:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.$$

Для нахождения производной n -го порядка функцию необходимо продифференцировать n раз.

При повторном дифференцировании обычных функций вида $y = f(x)$ справедливы все правила дифференцирования и таблица производных.

Пример 7. Дана функция $y = 10x^7$. Найти производную четвертого порядка $y^{(IV)}$.

Решение. $y' = 70x^6$; $y'' = 420x^5$; $y''' = 2100x^4$; $y^{(IV)} = 8400x^3$.

Производная второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически, вычисляется по формуле

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{y''_t \cdot x'_t - x''_t \cdot y'_t}{(x'_t)^3}. \quad (4)$$

Пример 8. Определить вторую производную функции из примера 6.

Для определения второй производной первую производную y'_x дифференцируем по t :

$$\begin{aligned} (y'_x)'_t &= (-\sin 2t \cdot \cos^2 t)' = -(\sin 2t)' \cdot \cos^2 t - \sin 2t \cdot (\cos^2 t)' = \\ &= -2 \cos 2t \cdot \cos^2 t - \sin 2t \cdot 2 \cos t \cdot (-\sin t) = \sin^2 2t - 2 \cos 2t \cdot \cos^2 t. \end{aligned}$$

Разделим полученное выражение на x'_t и найдём y''_{xx} :

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = (\sin^2 2t - 2 \cos 2t \cdot \cos^2 t) \cdot \cos^2 t.$$

9. Дифференциал функции и его свойства

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. По определению производной

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'.$$

Откуда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$, где α - бесконечно малая при $\Delta x \rightarrow 0$, т.е. $\alpha \rightarrow 0$. Умножим равенство на Δx : $\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

В правой части последнего равенства слагаемое $y' \cdot \Delta x$ - бесконечно малая величина низшего порядка малости по сравнению со слагаемым $\alpha \cdot \Delta x$, оно является главной частью приращения функции Δy и называется *дифференциалом функции*, что обозначается так:

$$dy = y' \cdot dx. \quad (5)$$

Свойства дифференциала

1. Дифференциал аргумента равен его приращению $dx = \Delta x$.
2. Дифференциал функции эквивалентен приращению функции при $\Delta x \rightarrow 0$, т.е. $\Delta y \sim dy$.
3. Дифференциал функции вычисляется по формуле (5), где $dx = \Delta x$.

4. Свойство инвариантности формы дифференциала заключается в том, что дифференциал сложной функции имеет тот же вид, какой он имел бы в том случае, если бы промежуточный аргумент и был независимой переменной:

$$\text{если } y = f(z), \quad z = g(x), \quad \text{то } dy = f'(z)dz.$$

Так как задача нахождения дифференциала равносильна нахождению производной, то правила дифференцирования функций сохраняют свою силу и для дифференциала, а именно:

$$\begin{aligned} \text{а) } d(C) &= 0; & \text{б) } d(U + V) &= dU + dV; \\ \text{в) } d(U \cdot V) &= dU \cdot V + U \cdot dV; & \text{г) } d\left(\frac{U}{V}\right) &= \frac{VdU - UdV}{V^2}. \end{aligned}$$

Дифференциал функции находит применение в приближённых вычислениях, основанных на формуле

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0). \quad (6)$$

Формула следует из эквивалентности $\Delta y \sim dy$.

Если известно значение функции при $x = x_0$, то, используя (6), можно найти значение функции при $x = x_0 + \Delta x$.

С учетом формулы (5) производная функции может быть обозначена как отношение дифференциалов:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Пример 9. Найти дифференциал функции $y = x^3 \cdot \text{sh}(x)$.

Решение: $y' = 3x^2 \text{sh}(x) + x^3 \text{ch}(x)$, $dy = (3x^2 \text{sh}(x) + x^3 \text{ch}(x))dx$.

Пример 10. Вычислить приближенно $y = x^{16}$ при $x = 0,99$.

Решение. Воспользуемся формулой $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0)$, где

$f(x) = x^{16}$. Примем $x_0 = 1$, $\Delta x = x - x_0 = 0,99 - 1 = -0,01$. Тогда

$$f(x_0) = 1^{16} = 1, \quad df(x) = (x^{16})' \Delta x = 16x^{15} \Delta x,$$

$$df(x_0) = -16 \cdot 1^{15} \cdot 0,01 = -0,16. \quad (1 - 0,01)^{16} \approx 1 - 0,16 = 0,84.$$

Пример выполнения заданий по теме дифференцирования

Задание 1. Пользуясь только определением производной найти

$$f'(x), \text{ если } f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Решение. Придадим фиксированному значению x приращение Δx , ему со-

ответствует приращение функции $\Delta y = \frac{1}{\sqrt[3]{x + \Delta x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Следуя определению производной, найдем предел:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{x + \Delta x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x + \Delta x}}{\Delta x \cdot \sqrt[3]{x(x + \Delta x)}} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x + \Delta x}) \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x(x + \Delta x)} + \sqrt[3]{(x + \Delta x)^2} \right)}{\Delta x \cdot \sqrt[3]{x(x + \Delta x)} \cdot \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x(x + \Delta x)} + \sqrt[3]{(x + \Delta x)^2} \right)} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x - (x + \Delta x)}{\Delta x \cdot \sqrt[3]{x(x + \Delta x)} \cdot \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x(x + \Delta x)} + \sqrt[3]{(x + \Delta x)^2} \right)} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt[3]{x(x + \Delta x)} \cdot \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x(x + \Delta x)} + \sqrt[3]{(x + \Delta x)^2} \right)} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}. \end{aligned}$$

Ответ: $f'(x) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}.$

Задание 2. Написать уравнение касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0 : $y = x^3 - 3x + 2$, $x_0 = 2$.

Решение. Уравнения касательной и нормали к графику функции в точке с абсциссой x_0 имеют вид: касательная $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$, нормаль

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0). \text{ Здесь } y_0 = y(x_0).$$

Найдем ординату заданной точки: $y_0 = 2^3 - 3 \cdot 2 + 2 = 4$. Найдем производную функции в заданной точке: $y' = 3x^2 - 3$, $y'(2) = 9$. Подставим в уравнение касательной найденные значения: $y - 4 = 9(x - 2)$, или $9x - y - 14 = 0$. Подставим в уравнение нормали найденные значения: $y - 4 = -\frac{1}{9}(x - 2)$, или $x + 9y - 38 = 0$.

Ответ: касательная $9x - y - 14 = 0$, нормаль $x + 9y - 38 = 0$.

Задание 3. Найти производную y' , если заданы следующие функции:

$$y = 6x^3 + \operatorname{sh} x - 5^x + 3 \operatorname{arctg} x - 8; \quad y = x^3 \cdot \sin x; \quad y = \frac{e^x}{\cos x};$$

$$y = \sqrt{\arccos(x^5 - 3x + 2)}; \quad y = \ln^4(1 - 2 \cos 3x); \quad y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{5x - 1}{x + 3}};$$

$$y = (x^3 - 2)\sqrt{1 + e^x} - \lg \frac{\sqrt{e^x + 1}}{\sqrt{e^x - 1}}; \quad y = (\sin x)^{x^3}.$$

Решение. Первая из заданных функция – линейная комбинация элементарных функций: $y = 6x^3 + \operatorname{sh} x - 5^x + 3 \operatorname{arctg} x - 8$.

$$\begin{aligned} y' &= (6x^3 + \operatorname{sh} x - 5^x + 3 \operatorname{arctg} x - 8)' = 6 \cdot (x^3)' + (\operatorname{sh} x)' - (5^x)' + \\ &+ 3(\operatorname{arctg} x)' - 8' = 18x^2 + \operatorname{ch} x - 5^x \cdot \ln 5 - \frac{3}{1 + x^2}. \end{aligned}$$

Следующая функция - произведение двух функций: $y = x^3 \cdot \sin x$.

$$y' = (x^3)' \cdot \sin x + x^3 \cdot (\sin x)' = 3x^2 \cdot \sin x + x^3 \cdot \cos x.$$

Следующая функция - частное двух функций: $y = \frac{e^x}{\cos x}$.

$$y' = \frac{(e^x)' \cdot \cos x - e^x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{e^x \cos x + e^x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{e^x (\cos x + \sin x)}{\cos^2 x}$$

Сложная функция $y = \sqrt{\arccos(x^5 - 3x + 2)}$. Внешней функцией является корень квадратный (частный случай степенной функции), внутренняя функция – арккосинус, которая является внешней для внутренней функции – многочлена пятой степени.

$$y = \left(\sqrt{\arccos(x^5 - 3x + 2)} \right)' \cdot \left(\arccos(x^5 - 3x + 2) \right)' \cdot \left(x^5 - 3x + 2 \right)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\arccos(x^5 - 3x + 2)}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 - (x^5 - 3x + 2)^2}} \cdot (5x^4 - 3).$$

Для определения производной трёх последующих функций нужно в различной комбинации применять правила дифференцирования.

$$y = \ln^4(1 - 2\cos 3x). \quad y' = 4\ln^3(1 - 2\cos 3x) \cdot \frac{1}{1 - 2\cos 3x} \cdot 6\sin 3x.$$

$$y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{5x-1}{x+3}}. \quad y' = \frac{1}{1 + \frac{5x-1}{x+3}} \cdot \frac{5(x+3) - (5x-1)}{(x+3)^2} =$$

$$= \frac{8}{(x+3)(3x+1)}.$$

$$y = (x^3 - 2)\sqrt{1 + e^x} - \lg \frac{\sqrt{e^x + 1}}{\sqrt{e^x - 1}}. \quad y' = 3x^2\sqrt{1 + e^x} + \frac{x^3 - 2}{2\sqrt{1 + e^x}} \cdot e^x -$$

$$- \frac{\sqrt{e^x - 1}}{\sqrt{e^x + 1}} \cdot \lg e \cdot \frac{(e^x \cdot \sqrt{e^x - 1} / 2\sqrt{e^x + 1}) - (e^x \cdot \sqrt{e^x + 1} / 2\sqrt{e^x - 1})}{e^x - 1} =$$

$$= 3x^2\sqrt{1 + e^x} + \frac{x^3 - 2}{2\sqrt{1 + e^x}} \cdot e^x + \frac{e^x \cdot \lg e}{(e^x - 1)(e^x + 1)}.$$

Задана сложно - показательная функция $y = (\sin x)^{x^3}$. Для нахождения её производной применяется предварительное логарифмирование функции. Логарифмируем левую и правую части по основанию e :

$$\ln y = \ln(\sin x)^{x^3}, \quad \ln y = x^3 \cdot \ln(\sin x).$$

Теперь дифференцируем, учитывая, что $\ln y$ - сложная функция, т.к. $y = y(x)$.

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (x^3)' \cdot \ln(\sin x) + x^3 \cdot (\ln(\sin x))',$$

$$\frac{y'}{y} = 3x^2 \ln(\sin x) + x^3 \cdot \frac{(\sin x)'}{\sin x}, \quad y' = y(3x^2 \ln(\sin x) + x^3 \operatorname{ctgx}),$$

$$y' = (\sin x)^{x^3} \cdot (3x^2 \ln(\sin x) + x^3 \operatorname{ctgx})$$

Задание 4. Найти производную и дифференциал dy :

$$y = \frac{(5x+7)\sqrt{x-1}}{3x^2}.$$

Решение. Применим метод логарифмического дифференцирования:

$$\ln y = \ln(5x+7) + \frac{1}{2} \ln(x-1) - \ln 3 - 2 \ln x;$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{5}{5x+7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x};$$

$$y' = \frac{(5x+7)\sqrt{x-1}}{3x^2} \cdot \left(\frac{5}{5x+7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x} \right), \text{ или}$$

$$y' = \frac{5\sqrt{x-1}}{3x^2} + \frac{5x+7}{6x^2\sqrt{x-1}} - \frac{2(5x+7)\sqrt{x-1}}{3x^3}.$$

Дифференциал функции вычисляется по формуле $dy = y'dx$, поэтому

$$dy = \left(\frac{5\sqrt{x-1}}{3x^2} + \frac{5x+7}{6x^2\sqrt{x-1}} - \frac{2(5x+7)\sqrt{x-1}}{3x^3} \right) dx.$$

Задание 5. Найти производную y'_x и производную второго порядка

$$y''_{xx} \text{ от функции, заданной параметрически: } \begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \ln \cos 2t. \end{cases}$$

Решение. Дифференцируем по t переменные x и y :

$$x'_t = 2 \cos 2t, \quad y'_t = \frac{1}{\cos 2t} \cdot (-\sin 2t) \cdot 2 = -2 \operatorname{tg} 2t;$$

$$y'_x = \frac{-2 \operatorname{tg} 2t}{2 \cos 2t} = -\frac{\operatorname{tg} 2t}{\cos 2t}.$$

Для определения второй производной первую производную y'_x дифференцируем по t :

$$(y'_x)'_t = \left(-\frac{\operatorname{tg} 2t}{\cos 2t} \right)' = -\frac{(2/\cos^2 2t) \cdot \cos 2t - \operatorname{tg} 2t \cdot (-\sin 2t) \cdot 2}{(\cos 2t)^2},$$

$$(y'_x)'_t = -\frac{2 + 2\sin^2 2t}{\cos^3 2t}. \text{ Разделим полученное выражение на } x'_t \text{ и най-}$$

$$\text{дём } y''_{xx}: \quad y''_{xx} = -\frac{2 + 2\sin^2 2t}{\cos^3 2t} \cdot \frac{1}{2 \cos 2t} = -\frac{1 + \sin^2 2t}{\cos^4 2t}.$$

Задание 6. Найти производную n -го порядка от заданной функции. Указания к решению. В вариантах предложены задания, которые можно свести к следующим типам:

а) $y = \frac{a}{bx + c}$, где a, b, c - заданные числа. Представим функцию в виде

$$y = a(bx + c)^{-1} \text{ и дифференцируем функцию несколько раз.}$$

$$y' = -a(bx + c)^{-2}, \quad y'' = 1 \cdot 2 \cdot a(bx + c)^{-3}, \quad y''' = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a(bx + c)^{-4}.$$

Анализируя выражения нескольких первых производных, определяем закономерности и выводим формулу n -й производной:

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot a \cdot (bx + c)^{-(n+1)}.$$

К рассмотренному типу можно отнести задания вида $y = \lg(bx + c)$ и

$y = \frac{ax + b}{cx + d}$. В случае логарифмической функции $y' = \frac{b}{bx + c}$, дальнейшие действия рассмотрены выше.

В случае дробной функции $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ нужно вначале выделить целую часть и дробный остаток путем деления «уголком».

$$-\frac{ax + b}{ax + \frac{ad}{c}} \left| \frac{cx + d}{c} \right.$$

$$\frac{b - \frac{ad}{c}}{c}$$

Таким образом, $y = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cx + d}$,

дальнейшие действия рассмотрены выше.

б) $y = a^{bx+c}$, где a, b, c - заданные числа. Дифференцируем функцию несколько раз.

$$y' = b \cdot a^{bx+c} \cdot \ln a, \quad y'' = b^2 \cdot a^{bx+c} \cdot \ln^2 a, \quad y''' = b^3 \cdot a^{bx+c} \cdot \ln^3 a, \dots$$

Анализируя выражения нескольких первых производных, определяем закономерности и выводим формулу n -й производной:

$$y^{(n)} = b^n \cdot a^{bx+c} \cdot \ln^n a.$$

в) При дифференцировании несколько раз функций, содержащих синус и косинус, удобно использовать формулы приведения, например:

$$y = \sin x, \quad y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad y'' = -\sin x = \sin(x + \pi),$$

$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right), \quad y^{IV} = \sin x = \sin(x + 2\pi).$$

При дальнейшем дифференцировании значения производных повторяются, поэтому

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n \cdot \pi}{2}\right). \quad \text{Аналогично, } (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n \cdot \pi}{2}\right).$$

Задание 7. Вычислить приближенно $y = \sqrt[4]{x}$ при $x = 16,32$.

Решение. Воспользуемся формулой $y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + dy(x_0)$.

$$y'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}, \quad dy = y'(x)\Delta x. \quad \text{Положим } x = 16, \quad \Delta x = 0,32. \quad \text{Применим}$$

$$\text{формулу } \sqrt[4]{16 + 0,32} \approx \sqrt[4]{16} + \frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} \cdot 0,32 = 2 + \frac{0,32}{4 \cdot 8} = 2,01.$$

Задание 8. Найти производную y'_x от функции, заданной неявно:

$$\ln(x^2 + y^2) = x - y.$$

Решение. Дифференцируем соотношение по переменной x , с учетом того, что $y = y(x)$.

$$\frac{2x + 2yy'}{x^2 + y^2} = 1 - y', \quad \text{выделяем производную } y' = \frac{x^2 + y^2 - 2x}{x^2 + y^2 + 2y}.$$

Задания для самостоятельной работы по теме дифференцирования функций

Вариант 1

Задание 1. Пользуясь только определением производной найти

$$f'(x), \text{ если } f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Задание 2. Написать уравнение касательной и нормали к данной

$$\text{кривой в точке с абсциссой } x_0: y = \frac{3x-4}{2x+3}, \quad x_0 = 2.$$

Задание 3. Найти производную y' , если заданы следующие функции:

$$y = 2x^2 - 3 \sin x + 2^x - \operatorname{tg} x + 12; \quad y = e^x \cdot \arcsin x; \quad y = \frac{x+1}{\ln x};$$

$$y = \sqrt{\cos(x^3 + 4x)}; \quad y = \sqrt{x} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}); \quad y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x);$$

$$y = x - \ln(2 + e^x + 2\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}); \quad y = (\operatorname{arctg} x)^{\frac{1}{2} \ln \operatorname{arctg} x}.$$

Задание 4. Найти производную и дифференциал dy :

$$y = \frac{2(3x^3 + 4x^2 - x - 2)}{15\sqrt{1+x}}.$$

Задание 5. Найти производную y'_x и производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \cos 2t; \\ y = 2 \sec^2 t. \end{cases}$$

Задание 6. Найти производную n -го порядка: $y = x \cdot e^{ax}$.

Задание 7. Вычислить приближенно: $y = \sqrt[3]{x}$ при $x = 7,76$

Задание 8. Найти производную y'_x от функции, заданной неявно: $e^{-y} - e^x + xy = 0$.

Вариант 2

Задание 1. Пользуясь только определением производной найти $f'(x)$, если $f(x) = 5^x$.

Задание 2. Написать уравнение касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0 : $y = x^2 \cdot e^{-x}$, $x_0 = 1$.

Задание 3. Найти производную y' , если заданы следующие функции:

$$y = 3x^2 - 4\sin x + 4^x - \operatorname{ctg} x + 15; \quad y = e^x \cdot \arccos x; \quad y = \frac{x+6}{\log_2 x};$$

$$y = \sqrt{\operatorname{arccotg}(x^4 + 3x^2)}; \quad y = \arcsin \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{5x}}; \quad y = \ln(x + \sqrt{3 + x^2});$$

$$y = e^{2x}(2 - \sin 2x - \cos 2x); \quad y = (\sin \sqrt{x})^{\ln \sin \sqrt{x}}.$$

Задание 4. Найти производную и дифференциал dy :

$$y = \frac{(2x^2 - 1)\sqrt{1 + x^2}}{3x^2}.$$

Задание 5. Найти производную y'_x и производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \sqrt{1 - t^2}; \\ y = \frac{1}{t}. \end{cases}.$$

Задание 6. Найти производную n -го порядка:

$$y = \sin 2x - \cos(x + 1)$$

Задание 7. Вычислить приближенно $y = \sqrt[3]{x^3 + 7x}$ при $x = 1,012$.

Задание 8. Найти производную y'_x от функции, заданной неявно: $e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0$.

Вариант 3

Задание 1. Пользуясь только определением производной найти $f'(x)$, если $f(x) = \sqrt{x}$.

Задание 2. Написать уравнение касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0 : $y = 2 + \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Задание 3. Найти производную y' , если заданы следующие функции:

$$y = 5x^2 - \sin x + 5^x - \operatorname{ctg} x + 6; \quad y = e^x \cdot \operatorname{arctg} x; \quad y = \frac{2x+3}{\log_3 x};$$

$$y = \sqrt{\arccos(x^3 + 4x)}; \quad y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x - 3}{2};$$

$$y = 2\sqrt{x} - 4 \cdot \ln(2 + \sqrt{x}); \quad y = \arcsin \frac{x^2 + x - 3}{x + 2}; \quad y = (\sin x)^{5e^x}.$$

Задание 4. Найти производную и дифференциал dy :

$$y = \frac{x^4 - 8x^2}{2(x^2 - 4)}.$$

Задание 5. Найти производную y'_x и производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = e^t \cos t; \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$$

Задание 6. Найти производную n -го порядка: $y = \sqrt[5]{e^{7x-1}}$.

Задание 7. Вычислить приближенно $y = \frac{x + \sqrt{5-x^2}}{2}$ при $x = 0,98$.

Задание 8. Найти производную y'_x от функции, заданной неявно: $y - x + \operatorname{arctg} y = 0$.

Вариант 4

Задание 1. Пользуясь только определением производной найти $f'(x)$, если $f(x) = \sin 3x$.

Задание 2. Написать уравнение касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0 : $y = 2 \cdot e^{3-x^2}$, $x_0 = 1$.

Задание 3. Найти производную y' , если заданы следующие функции:

$$y = 5x^2 - 2\cos x + 7^x - \ln x + 2; \quad y = e^x \cdot \sin x; \quad y = \frac{x+1}{\operatorname{tg} x};$$

$$y = \sqrt{\operatorname{arctg}(2x^3 + 3x^2)}; \quad y = \frac{1}{\ln 4} \ln \frac{1+2^x}{1-2^x};$$

$$y = \ln \frac{x^2}{\sqrt{1-ax^2}}; \quad y = \operatorname{arccotg} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}; \quad y = (\arcsin x)^{e^x}.$$

Задание 4. Найти производную и дифференциал dy :

$$y = \frac{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}{12x^{12}}.$$

Задание 5. Найти производную y'_x и производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \operatorname{sh}^2 t; \\ y = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}. \end{cases}$$

Задание 6. Найти производную n -го порядка: $y = \frac{4x+7}{2x+3}$.

Задание 7. Вычислить приближенно $y = \sqrt[3]{x}$ при $x = 27,54$.

Задание 8. Найти производную y'_x от функции, заданной неявно: $y + \sin(x+y) + e^x = 0$.

Вариант 5

Задание 1. Пользуясь только определением производной найти $f'(x)$, если $f(x) = \cos 5x$.

Задание 2. Написать уравнение касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0 : $y = 5x^3 - 15x + 1$, $x_0 = 1$.

Задание 3. Найти производную y' , если заданы следующие функции:

$$y = 2x^3 - 3\operatorname{tg} x + 5^x - \cos x + 10; \quad y = e^x \cdot x^2; \quad y = \frac{3x+1}{\sin x};$$

$$y = \sqrt{\arccos(x^3 + 4x)}; \quad y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+a});$$

$$y = 2\sqrt{e^x + 1} + \ln \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1}; \quad y = \arcsin \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^4 + 16}}; \quad y = (\ln x)^{3^x}.$$

Задание 4. Найти производную и дифференциал dy :

$$y = \frac{2x^2 - x - 1}{3\sqrt{2 + 4x}}.$$

Задание 5. Найти производную y'_x и производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = t + \sin t; \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$$

Задание 6. Найти производную n -го порядка: $y = \lg(5x + 2)$.

Задание 7. Вычислить приближенно $y = \arcsin x$ при $x = 0,08$.

Задание 8. Найти производную y'_x от функции, заданной неявно: $x \sin y - \cos 2xy = 0$.

Вариант 6

Задание 1. Пользуясь только определением производной найти $f'(x)$, если $f(x) = x^3$.

Задание 2. Написать уравнение касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0 : $y = 3 \cdot e^{x^2}$, $x_0 = 1$.

Задание 3. Найти производную y' , если заданы следующие функции:

$$y = x^4 - 5 \sin x + 8^x - \operatorname{ctg} x + 13; \quad y = e^x \cdot \log_5 x; \quad y = \frac{x^2 + 1}{\cos x};$$

$$y = \sqrt{\operatorname{tg}(x^3 + x)}; \quad y = \frac{2}{3} \sqrt{(\operatorname{arctg} e^x)^3}; \quad y = \ln \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2};$$

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{arcc} \operatorname{tg} \frac{3x - 1}{\sqrt{5x}}; \quad y = (x)^{\operatorname{arcsin} x}.$$

Задание 4. Найти производную и дифференциал dy :

$$y = \frac{x^2}{2\sqrt{1 - 3x^4}}.$$

Задание 5. Найти производную y'_x и производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{t}; \\ y = \frac{1}{1 + t^2}. \end{cases}$$

Задание 6. Найти производную n -го порядка: $y = a^{3x}$.

Задание 7. Вычислить приближенно $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}$ при $x = 0,97$.

Задание 8. Найти производную y'_x от функции, заданной неявно: $y \sin x - \cos(x + y) = 0$.

Вариант 7

Задание 1. Пользуясь только определением производной найти

$$f'(x), \text{ если } f(x) = \frac{1}{3x+2}.$$

Задание 2. Написать уравнение касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0 : $y = 2 + \cos 2x$, $x_0 = \pi$.

Задание 3. Найти производную y' , если заданы следующие функции:

$$y = 2x^5 - 3\sqrt{x} + 2^x - 7\operatorname{tg}x + 32; \quad y = e^x \cdot \arccos x; \quad y = \frac{\cos x}{x-3};$$

$$y = \sqrt{\ln(4x^2 + x)}; \quad y = \ln^2(x + \cos x); \quad y = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) - 2\operatorname{arctg} e^x;$$

$$y = \frac{1}{4} \ln \frac{x-1}{x+1} - \operatorname{arctg} 2x; \quad y = (\operatorname{ctg} 3x)^{4e^x}.$$

Задание 4. Найти производную и дифференциал dy :

$$y = \frac{(x^2 - 6)\sqrt{1 + x^2}}{6x^2}.$$

Задание 5. Найти производную y'_x и производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \sqrt{t}; \\ y = \frac{1}{\sqrt{1-t}}. \end{cases}$$

Задание 6. Найти производную n -го порядка: $y = \frac{x}{2(3x+2)}.$

Задание 7. Вычислить приближенно $y = \sqrt[3]{x}$ при $x = 26,46$.

Задание 8. Найти производную y'_x от функции, заданной неявно: $\sin x \cdot \ln y + \cos y \cdot \ln x = 0.$

Вариант 8

Задание 1. Пользуясь только определением производной найти $f'(x)$, если $f(x) = \lg 2x$.

Задание 2. Написать уравнение касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0 : $y = 2\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}$, $x_0 = 1$.

Задание 3. Найти производную y' , если заданы следующие функции:

$$y = 9x^2 - 3 \sin x + 7^x - 3 \operatorname{ctg} x + 9; \quad y = e^x \cdot \operatorname{arctg} x; \quad y = \frac{\sin x}{x^3 - 2};$$

$$y = \sqrt{\arcsin(2x^3 - 5x)}; \quad y = \ln^3(1 + \cos x); \quad y = \arccos \sqrt{\frac{x-1}{6x}};$$

$$y = \ln(e^x + 1) + \frac{18e^{2x} + 27e^x + 11}{6(e^x + 1)^3}; \quad y = (x)^{e^{\operatorname{tg} x}}.$$

Задание 4. Найти производную и дифференциал dy :

$$y = \frac{(x^2 - 8)\sqrt{x^2 - 8}}{6x^3}.$$

Задание 5. Найти производную y'_x и производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \sin t; \\ y = \sec t. \end{cases}$$

Задание 6. Найти производную n -го порядка: $y = \lg(x + 4)$.

Задание 7. Вычислить приближенно $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$ при $x = 1,97$.

Задание 8. Найти производную y'_x от функции, заданной неявно: $x^y - y^x = 0$.

Вариант 9

Задание 1. Пользуясь только определением производной найти $f'(x)$, если $f(x) = \operatorname{tg} 2x$.

Задание 2. Написать уравнение касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0 : $y = \sqrt[3]{x+1}$, $x_0 = 0$.

Задание 3. Найти производную y' , если заданы следующие функции:

$$y = \frac{1}{x} - 5 \sin x + 3^x + 2 \operatorname{tg} x - 7; \quad y = e^x \cdot x^3; \quad y = \frac{\cos x}{2x-3};$$

$$y = \sqrt{\arcsin(2x^3 - 7x)}; \quad y = \ln \frac{x^2}{1-x^2}; \quad y = \frac{(1+x) \operatorname{arctg} \sqrt{x}}{x^2};$$

$$y = \frac{2}{\ln 2} \left(\sqrt{2^x - 1} - \operatorname{arcc} \operatorname{tg} \sqrt{2^2 - 1} \right); \quad y = (\operatorname{tg} x)^{2e^x}.$$

Задание 4. Найти производную и дифференциал dy :

$$y = \frac{4 + 3x^3}{15\sqrt{1+x^4}}.$$

Задание 5. Найти производную y'_x и производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \operatorname{tg} t; \\ y = \frac{1}{\sin 2t}. \end{cases}$$

Задание 6. Найти производную n -го порядка: $y = \sqrt{x}$.

Задание 7. Вычислить приближенно $y = x^{11}$ при $x = 1,021$.

Задание 8. Найти производную y'_x от функции, заданной неявно: $x \sin y + y \sin x = 0$.

Вариант 10

Задание 1. Пользуясь только определением производной найти $f'(x)$, если $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$.

Задание 2. Написать уравнение касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0 : $y = 2\sqrt{2} \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Задание 3. Найти производную y' , если заданы следующие функции:

$$y = x^2 + 3 \cos x - 5^x + \operatorname{tg} x + 4; \quad y = e^x \cdot \operatorname{arctg} x; \quad y = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2-4};$$

$$y = \sqrt{\log_5(7x^3 - 3x)}; \quad y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right); \quad y = \frac{x^3}{3} \arccos \frac{1}{\sqrt{x}};$$

$$y = 2(x-2)\sqrt{1+e^x} - 2 \ln \frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}; \quad y = (\cos 5x)^{e^x}.$$

Задание 4. Найти производную и дифференциал dy :

$$y = \sqrt[3]{\frac{(1+x)^2}{x^{3/2}}}.$$

Задание 5. Найти производную y'_x и производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \sqrt{t-1}; \\ y = \frac{t}{\sqrt{t-1}}. \end{cases}$$

Задание 6. Найти производную n -го порядка: $y = \frac{2x+5}{3x+1}$.

Задание 7. Вычислить приближенно $y = \sqrt[3]{x}$ при $x = 1,21$.

Задание 8. Найти производную y'_x от функции, заданной неявно: $e^x + e^y - 2^{xy} = 1$.

Вариант 11

Задание 1. Пользуясь только определением производной найти $f'(x)$, если $f(x) = \log_5 x$.

Задание 2. Написать уравнение касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0 : $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$, $x_0 = 1$.

Задание 3. Найти производную y' , если заданы следующие функции:

$$y = 2x^3 - 3 \sin x + 3^x - \operatorname{tg} x + 18; \quad y = e^x \cdot \arcsin x; \quad y = \frac{x+1}{\ln x};$$

$$y = \sqrt{\operatorname{arctg}(x^3 + 4x)}; \quad y = \ln \sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}}; \quad y = \frac{1+x}{2x} \operatorname{arctg} \sqrt{x};$$

$$y = \frac{e^{2x}}{2} (2 \sin 3x - 3 \cos 2x); \quad y = (x \sin x)^{\sin(x \sin x)}.$$

Задание 4. Найти производную и дифференциал dy :

$$y = \frac{x^6 + x^3 - 2}{\sqrt{1-x^3}}.$$

Задание 5. Найти производную y'_x и производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \frac{\cos t}{1 + 2 \cos t}; \\ y = \frac{\sin t}{1 + 2 \cos t}. \end{cases}$$

Задание 6. Найти производную n -го порядка: $y = 2^{3x+5}$.

Задание 7. Вычислить приближенно $y = x^{21}$ при $x = 0,998$.

Задание 8. Найти производную y'_x от функции, заданной неявно: $\sin(y-x) + \sqrt{x+y} = 2$.

Вариант 12

Задание 1. Пользуясь только определением производной найти $f'(x)$, если $f(x) = (x+2)^2$.

Задание 2. Написать уравнение касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0 : $y = 2x + \frac{1}{x}$, $x_0 = 2$.

Задание 3. Найти производную y' , если заданы следующие функции:

$$y = 3x^2 - 4\sin x + 5^x - \operatorname{ctg} x + 15; \quad y = e^x \cdot \arccos x; \quad y = \frac{x+6}{\log_2 x};$$

$$y = \sqrt{\operatorname{arccotg}(x^4 + 3x^2)}; \quad y = \frac{e^{3x}}{3} (3\sin 2x + 2\cos 3x);$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}} \right); \quad y = (x+2) \cdot \arcsin \sqrt{\frac{x}{2}}; \quad y = (x-5)^{\operatorname{ch} x}.$$

Задание 4. Найти производную и дифференциал dy :

$$y = \frac{(x^2 - 2)\sqrt{4 + x^2}}{24x^3}.$$

Задание 5. Найти производную y'_x и производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \sqrt{t}; \\ y = \sqrt[3]{t-1}. \end{cases}$$

Задание 6. Найти производную n -го порядка:

$$y = \sin(x+1) + \cos 2x.$$

Задание 7. Вычислить приближенно $y = \sqrt[3]{x^2}$ при $x = 1,03$.

Задание 8. Найти производную y'_x от функции, заданной неявно:

$$\text{но: } \frac{x}{y} + e^{x/y} = 1.$$

Вариант 13

Задание 1. Пользуясь только определением производной найти $f'(x)$, если $f(x) = \operatorname{ctg} 4x$.

Задание 2. Написать уравнение касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0 : $y = \sqrt{x} + 5\sqrt[3]{x}$, $x_0 = 64$.

Задание 3. Найти производную y' , если заданы следующие функции:

$$y = 5x^2 - \sin x + 5^x - \operatorname{ctg} x + 6; \quad y = e^x \cdot \operatorname{arctg} x; \quad y = \frac{2x+3}{\log_3 x};$$

$$y = \sqrt{\arccos(x^3 + 4x)}; \quad y = \frac{e^{\alpha x}}{\beta} (\alpha \sin 2\beta x + \beta \cos 2\alpha x);$$

$$y = \ln \sin \frac{2x+4}{x+1}; \quad y = \frac{4+x^4}{x^3} \operatorname{arccotg} \frac{x^2}{2}; \quad y = (x^3 + 4)^{\operatorname{tg} x}.$$

Задание 4. Найти производную и дифференциал dy :

$$y = \frac{x^2 + 1}{2\sqrt{1 + 2x^3}}.$$

Задание 5. Найти производную y'_x и производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \sqrt{t^3 - 1}; \\ y = \ln t. \end{cases}$$

Задание 6. Найти производную n -го порядка: $y = \sqrt[3]{e^{2x+1}}$.

Задание 7. Вычислить приближенно $y = x^8$ при $x = 2,01$.

Задание 8. Найти производную y'_x от функции, заданной неявно: $x^y + y^2 \cdot \ln x - 4 = 0$.

Вариант 14

Задание 1. Пользуясь только определением производной найти

$$f'(x), \text{ если } f(x) = \frac{1}{x^3}.$$

Задание 2. Написать уравнение касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0 : $y = e^{1-x^2}$, $x_0 = 0$.

Задание 3. Найти производную y' , если заданы следующие функции:

$$y = 5x^2 - 2\cos x + 7^x - \ln x + 2; \quad y = e^x \cdot \sin x; \quad y = \frac{x+1}{\operatorname{tg} x};$$

$$y = \sqrt{\operatorname{arctg}(2x^3 + 3x^2)}; \quad y = x + \frac{1}{e^x + 1} - \ln(1 + e^x);$$

$$y = \log_{16} \log_5 \operatorname{tg} x; \quad y = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \arccos \sqrt{x}; \quad y = (x+1)^{\sin x^2}.$$

Задание 4. Найти производную и дифференциал dy :

$$y = \frac{(3x+2)\sqrt{x-1}}{4x^2}.$$

Задание 5. Найти производную y'_x и производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \operatorname{sh} t; \\ y = \operatorname{th}^2 t. \end{cases}$$

Задание 6. Найти производную n -го порядка: $y = \frac{4+15x}{5x+1}$.

Задание 7. Вычислить приближенно $y = \sqrt[3]{x}$ при $x = 8,24$.

Задание 8. Найти производную y'_x от функции, заданной неявно: $x^2 \sin y + y^2 \cos x = 0$.

Вариант 15

Задание 1. Пользуясь только определением производной найти $f'(x)$, если $f(x) = \sqrt{1+2x}$.

Задание 2. Написать уравнение касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0 : $y = \frac{3x - 2x^3}{3}$, $x_0 = 1$.

Задание 3. Найти производную y' , если заданы следующие функции:

$$y = 2x^3 - 3\operatorname{tg}x + 5^x - \cos x + 10; \quad y = e^x \cdot x^2; \quad y = \frac{3x+1}{\sin x};$$

$$y = \sqrt{\arccos(x^3 + 4x)}; \quad y = x - 3 \ln\left(\left(1 + e^x\right)\sqrt{1 + e^{2x}}\right);$$

$$y = \log_4 \log_2 \operatorname{tg}x; \quad y = \frac{\arcsin 2x}{4x^2} + \frac{1}{x+1}; \quad y = (x^2 - 1)^{\operatorname{sh}x}.$$

Задание 4. Найти производную и дифференциал dy :

$$y = \frac{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}{3x^3}.$$

Задание 5. Найти производную y'_x и производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \sqrt{t-1}; \\ y = \frac{1}{\sqrt{t}}. \end{cases}$$

Задание 6. Найти производную n -го порядка: $y = \lg(3x+1)$.

Задание 7. Вычислить приближенно $y = x^7$ при $x = 1,996$.

Задание 8. Найти производную y'_x от функции, заданной неявно: $x^y + x^2y = 0$.

Вариант 16

Задание 1. Пользуясь только определением производной найти

$$f'(x), \text{ если } f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}.$$

Задание 2. Написать уравнение касательной и нормали к данной

$$\text{кривой в точке с абсциссой } x_0: y = \frac{\ln x}{x}, \quad x_0 = 1.$$

Задание 3. Найти производную y' , если заданы следующие функции:

$$y = x^4 - 5 \sin x + 8^x - \operatorname{ctgx} + 13; \quad y = e^x \cdot \log_5 x; \quad y = \frac{x^2 + 1}{\cos x};$$

$$y = \sqrt{\operatorname{tg}(x^3 + x)}; \quad y = x + \frac{8}{1 + e^{2x}}; \quad y = \frac{x}{2}(\cos \ln x + \sin \ln x);$$

$$y = 6x \cdot \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2}; \quad y = (x^4 + 5)^{\operatorname{ctgx}}.$$

Задание 4. Найти производную и дифференциал dy :

$$y = \frac{x^6 + 8x^3 - 2}{\sqrt{8 - x^3}}.$$

Задание 5. Найти производную y'_x и производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \cos^2 t; \\ y = \operatorname{tg}^2 t. \end{cases}$$

Задание 6. Найти производную n -го порядка: $y = 7^{5x}$.

Задание 7. Вычислить приближенно $y = \sqrt[3]{x}$ при $x = 7,68$.

Задание 8. Найти производную y'_x от функции, заданной неявно:

$$2^x + 2^y - 2^{x+y} = 0.$$

Вариант 17

Задание 1. Пользуясь только определением производной найти

$$f'(x), \text{ если } f(x) = \frac{1}{3x+2}.$$

Задание 2. Написать уравнение касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0 : $y = x + \sqrt{x^3}$, $x_0 = 4$.

Задание 3. Найти производную y' , если заданы следующие функции:

$$y = 2x^5 - 3\sqrt{x} + 2^x - 7\operatorname{tg}x + 32; \quad y = e^x \cdot \arccos x; \quad y = \frac{\cos x}{x-3};$$

$$y = \sqrt{\ln(4x^2 + x)}; \quad y = \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}\right) + \operatorname{arctg} e^{-x};$$

$$y = \ln \cos \frac{2x+3}{2x+1}; \quad y = x^2 \cdot \arcsin \sqrt{\frac{x}{2} - 1}; \quad y = (\sin x)^{5x}.$$

Задание 4. Найти производную и дифференциал dy :

$$y = \frac{(3x-2)\sqrt{2x+3}}{x^2}.$$

Задание 5. Найти производную y'_x и производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \sqrt{t-3}; \\ y = \ln(t-2). \end{cases}$$

Задание 6. Найти производную n -го порядка: $y = \frac{x}{4x+9}$.

Задание 7. Вычислить приближенно $y = \sqrt{4x-1}$ при $x = 2,56$.

Задание 8. Найти производную y'_x от функции, заданной неявно: $\cos(xy) - \operatorname{tg}(x+y) = 0$.

Вариант 18

Задание 1. Пользуясь только определением производной найти

$$f'(x), \text{ если } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Задание 2. Написать уравнение касательной и нормали к данной

$$\text{кривой в точке с абсциссой } x_0: y = 5 + \sin 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

Задание 3. Найти производную y' , если заданы следующие функции:

$$y = 9x^2 - 3 \sin x + 7^x - 3 \operatorname{ctg} x + 9; \quad y = e^x \cdot \operatorname{arctg} x; \quad y = \frac{\sin x}{x^3 - 2};$$

$$y = \sqrt{\arcsin(2x^3 - 5x)}; \quad y = e^{-x} \arccos e^x - \ln(1 + \sqrt{1 - e^{2x}});$$

$$y = \lg \ln \operatorname{ctg} x; \quad y = \frac{(1+x) \operatorname{arccotg} \sqrt{x}}{x}; \quad y = (x^2 + 1)^{\cos x}.$$

Задание 4. Найти производную и дифференциал dy :

$$y = (1 - x^2) \cdot \sqrt[5]{x^3 + \frac{1}{x}}.$$

Задание 5. Найти производную y'_x и производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \sin t; \\ y = \ln \cos t. \end{cases}$$

Задание 6. Найти производную n -го порядка: $y = \lg(1 + x)$.

Задание 7. Вычислить приближенно $y = \frac{1}{\sqrt{2x^2 + x + 1}}$ при

$$x = 1,016.$$

Задание 8. Найти производную y'_x от функции, заданной неявно: $e^{x-y} \cos(x+y) = 0$.

Вариант 19

Задание 1. Пользуясь только определением производной найти $f'(x)$, если $f(x) = 10^x$.

Задание 2. Написать уравнение касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0 : $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$, $x_0 = 2$.

Задание 3. Найти производную y' , если заданы следующие функции:

$$y = \frac{1}{x} - 5 \sin x + 3^x + 2 \operatorname{tg} x - 7; \quad y = e^x \cdot x^3; \quad y = \frac{\cos x}{2x - 3};$$

$$y = \sqrt{\operatorname{arctg}(2x^3 - 7x)}; \quad y = \ln(1 + e^x) - 2e^{-x} \operatorname{arccose}^x$$

$$y = \log_a \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}}; \quad y = \frac{2\sqrt{1 - x} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}}{x}; \quad y = (19)^{x^{19}} \cdot x^{19}.$$

Задание 4. Найти производную и дифференциал dy :

$$y = \frac{(2x^2 + 3)\sqrt{x^2 - 3}}{9x^3}.$$

Задание 5. Найти производную y'_x и производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = t + \sin t; \\ y = 2 + \cos t. \end{cases}$$

Задание 6. Найти производную n -го порядка: $y = \frac{4}{x}$.

Задание 7. Вычислить приближенно $y = \sqrt[3]{x}$ при $x = 8,36$.

Задание 8. Найти производную y'_x от функции, заданной неявно: $\ln(x^2 + y^2) + \cos(x - y) = 0$.

Вариант 20

Задание 1. Пользуясь только определением производной найти

$$f'(x), \text{ если } f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Задание 2. Написать уравнение касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0 : $y = 16\sqrt{x} - 9\sqrt[3]{x} - 2$, $x_0 = 1$.

Задание 3. Найти производную y' , если заданы следующие функции:

$$y = x^2 + 3 \cos x - 5^x + \operatorname{tg} x + 4; \quad y = e^x \cdot \operatorname{arctg} x; \quad y = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2 - 4};$$

$$y = \sqrt{\log_5(7x^3 - 3x)}; \quad y = \frac{1}{m} \operatorname{arcctg}(e^{mx} \cdot \sqrt{m});$$

$$y = \ln \arcsin \sqrt{1 - e^{3x}};$$

$$y = \frac{x-1}{x+2} \arccos \sqrt{x-1}; \quad y = (x)^{3^x} \cdot 2^x.$$

Задание 4. Найти производную и дифференциал dy :

$$y = \frac{x-1}{(x^2+2)\sqrt{1+2x^3}}.$$

Задание 5. Найти производную y'_x и производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = t - \sin t; \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$$

Задание 6. Найти производную n -го порядка: $y = \frac{5x+1}{2x+3}$.

Задание 7. Вычислить приближенно $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ при $x = 4,16$.

Задание 8. Найти производную y'_x от функции, заданной неявно: $\sin^2(x-y) + e^{x+y} = 0$.

Вариант 21

Задание 1. Пользуясь только определением производной найти $f'(x)$, если $f(x) = \ln(x+2)$.

Задание 2. Написать уравнение касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0 : $y = 2 + \sqrt[3]{x+1}$, $x_0 = 1$.

Задание 3. Найти производную y' , если заданы следующие функции:

$$y = 2x^4 - 3\sin x + 4^x - \operatorname{tg} x + 32; \quad y = e^x \cdot \arcsin x; \quad y = \frac{x+1}{\ln x};$$

$$y = \sqrt{\operatorname{arctg}(x^3 + 4x)}; \quad y = 3 \cdot \sqrt[3]{e^x} \left(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} \right);$$

$$y = \ln \arccos \sqrt{1 - e^{4x}}; \quad y = \operatorname{arctg} \frac{x+2}{x-1}; \quad y = (\sin \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}.$$

Задание 4. Найти производную и дифференциал dy :

$$y = \frac{(2x+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2}.$$

Задание 5. Найти производную y'_x и производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \cos t; \\ y = \ln \sin t. \end{cases}$$

Задание 6. Найти производную n -го порядка: $y = a^{2x+3}$.

Задание 7. Вычислить приближенно $y = x^7$ при $x = 2,002$.

Задание 8. Найти производную y'_x от функции, заданной неявно: $\operatorname{tg}^2(x+y) - e^y = 0$.

Вариант 22

Задание 1. Пользуясь только определением производной найти

$$f'(x), \text{ если } f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{3x}}.$$

Задание 2. Написать уравнение касательной и нормали к данной

$$\text{кривой в точке с абсциссой } x_0: y = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad x_0 = -1.$$

Задание 3. Найти производную y' , если заданы следующие функции:

$$y = 3x^2 - 4 \sin x + 6^x - \operatorname{ctg} x + 15; \quad y = e^x \cdot \arccos x; \quad y = \frac{x+6}{\log_2 x};$$

$$y = \sqrt{\operatorname{arccotg}(x^4 + 3x^2)}; \quad y = e^{\sin x} \left(x - \frac{1}{\cos x} \right);$$

$$y = \ln \left(bx + \sqrt{a^2 + b^2 x^2} \right); \quad y = \arcsin \frac{x-2}{\sqrt{2(x-1)}}; \quad y = (x)^{e^{\operatorname{ctg} x}}.$$

Задание 4. Найти производную и дифференциал dy :

$$y = 2 \sqrt{\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}}.$$

Задание 5. Найти производную y'_x и производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \cos t + t \sin t; \\ y = \sin t - t \cos t. \end{cases}$$

Задание 6. Найти производную n -го порядка:

$$y = \sin(3x + 1) + \cos 5x.$$

Задание 7. Вычислить приближенно $y = \sqrt{4x-3}$ при $x = 1,08$.

Задание 8. Найти производную y'_x от функции, заданной неявно: $\arcsin(x-y) - e^y = 0$.

Вариант 23.

Задание 1. Пользуясь только определением производной найти $f'(x)$, если $f(x) = \sin 7x$.

Задание 2. Написать уравнение касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0 : $y = 3\sqrt[3]{x^2} + 2x + 2$, $x_0 = -1$.

Задание 3. Найти производную y' , если заданы следующие функции:

$$y = 5x^2 - \sin x + 5^x - \operatorname{ctg} x + 6; \quad y = e^x \cdot \operatorname{arctg} x; \quad y = \frac{2x+3}{\log_3 x};$$

$$y = \sqrt{\arccos(x^3 + 4x)}; \quad y = e^x \left((x^2 - 1) \cos x + (x - 1)^2 \sin x \right);$$

$$y = \ln \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 1} - x\sqrt{2}}; \quad y = (x + 1) \arcsin \sqrt{1 - x^2}; \quad y = (x)^{e^{\cos x}}.$$

Задание 4. Найти производную и дифференциал dy :

$$y = \frac{1}{(x + 2)\sqrt{x^2 + 4x + 5}}.$$

Задание 5. Найти производную y'_x и производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = e^t; \\ y = \arcsin t. \end{cases}$$

Задание 6. Найти производную n -го порядка: $y = \sqrt{e^{3x+1}}$.

Задание 7. Вычислить приближенно $y = \sqrt{x^3}$ при $x = 0,98$.

Задание 8. Найти производную y'_x от функции, заданной неявно: $e^{x+y} + \operatorname{arctg}(xy) = 0$.

Вариант 24

Задание 1. Пользуясь только определением производной найти $f'(x)$, если $f(x) = \cos 3x$.

Задание 2. Написать уравнение касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0 : $y = \frac{1+3x^2}{3+x^2}$, $x_0 = 1$.

Задание 3. Найти производную y' , если заданы следующие функции:

$$y = 5x^2 - 2\cos x + 7^x - \ln x + 2; \quad y = e^x \cdot \sin x; \quad y = \frac{x+1}{\operatorname{tg} x};$$

$$y = \sqrt{\arcsin(2x^3 + 3x^2)}; \quad y = \operatorname{arctg}(e^x - e^{-x}); \quad y = \ln\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}\right);$$

$$y = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{8}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{2}; \quad y = (x)^{2^x} \cdot 5^x$$

Задание 4. Найти производную и дифференциал dy :

$$y = 3 \frac{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}{x + 1}.$$

Задание 5. Найти производную y'_x и производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \cos t; \\ y = \sin^4 \frac{t}{2}. \end{cases}$$

Задание 6. Найти производную n -го порядка: $y = \frac{11+12x}{6x+5}$.

Задание 7. Вычислить приближенно $y = x^5$ при $x = 2,997$.

Задание 8. Найти производную y'_x от функции, заданной неявно: $xy - \sin^2(x+y) = 0$.

Вариант 25

Задание 1. Пользуясь только определением производной найти $f'(x)$, если $f(x) = \lg 5x$.

Задание 2. Написать уравнение касательной и нормали к данной

кривой в точке с абсциссой x_0 : $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$, $x_0 = 4$.

Задание 3. Найти производную y' , если заданы следующие функции:

$$y = 2x^3 - 3\operatorname{tg} x + 5^x - \cos x + 10; \quad y = e^x \cdot x^2; \quad y = \frac{3x+1}{\sin x};$$

$$y = \sqrt{\arccos(x^3 + 4x)}; \quad y = \arcsin e^x - \sqrt{1 - e^{2x}};$$

$$y = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}); \quad y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}; \quad y = (x)^{e^{\sin x}}.$$

Задание 4. Найти производную и дифференциал dy :

$$y = 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{x+1}{(x-1)^2}}.$$

Задание 5. Найти производную y'_x и производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \operatorname{ch} t; \\ y = \sqrt[3]{\operatorname{sh}^2 t}. \end{cases}$$

Задание 6. Найти производную n -го порядка: $y = \lg(2x + 7)$.

Задание 7. Вычислить приближенно $y = \sqrt[5]{x^2}$ при $x = 1,03$.

Задание 8. Найти производную y'_x от функции, заданной неявно: $x - \cos^2(x + y) + e^y = 0$.

Вариант 26

Задание 1. Пользуясь только определением производной найти $f'(x)$, если $f(x) = (x - 2)^3$.

Задание 2. Написать уравнение касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0 : $y = x + \frac{2}{x}$, $x_0 = 2$.

Задание 3. Найти производную y' , если заданы следующие функции:

$$y = 3x^7 + 2 \sin x + 6^x + 5 \operatorname{tg} x + 5; \quad y = e^x \cdot \arcsin x; \quad y = \frac{x^2 + 6}{\log_2 x};$$

$$y = \sqrt{\operatorname{arctg}(x^7 + 3x^6 + 5)}; \quad y = \frac{e^{4x}}{4} (3 \sin 5x + 2 \cos 7x);$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{x + \sqrt{2}}{x - \sqrt{2}} \right); \quad y = (x^2 + 3) \cdot \arcsin \sqrt{x}; \quad y = (x + 2)^{\operatorname{ch} x}.$$

Задание 4. Найти производную и дифференциал dy :

$$y = \frac{(x^3 - 2)\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{21x^3}.$$

Задание 5. Найти производную y'_x и производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \sqrt{t + 1}; \\ y = \sqrt[3]{t - 1}. \end{cases}$$

Задание 6. Найти производную n -го порядка:

$$y = \sin(x + 3) + \cos 4x.$$

Задание 7. Вычислить приближенно $y = \sqrt[3]{x^2}$ при $x = 8,3$.

Задание 8. Найти производную y'_x от функции, заданной неявно: $x^2 y + e^{xy^3} = 1$.

Заказ № _____ от « ____ » _____ 2009 г. Тираж _____ экз.

Изд-во СевНТУ