

Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный технический университет

**Методические указания и контрольные задания
для подготовки к внешнему независимому
тестированию по математике**

**РАЗДЕЛ 6
СТЕРЕОМЕТРИЯ**

Севастополь
2009

УДК 51(023)

Стереометрия. Методические указания и контрольные задания для подготовки к внешнему независимому оцениванию по математике. Раздел 6. Стереометрия / Сост. Н.Г. Плаксина. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2009. – 37с.

Целью методических указаний является оказание помощи учащимся школ и лицам, окончившим школу, в подготовке к внешнему независимому оцениванию и выполнению контрольного задания по теме «Стереометрия».

Указания содержат краткие теоретические сведения, задачи с решениями, задачи для самостоятельного решения, задачи повышенной сложности и контрольную работу.

Методические указания могут быть использованы для проведения занятий на подготовительных курсах, а также при самостоятельной подготовке к внешнему независимому оцениванию.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры высшей математики 26 февраля 2009 г., протокол № 6 .

Допущено учебно-методическим центром и научно-методическим советом СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: Деркач М.И., доцент кафедры высшей математики

СОДЕРЖАНИЕ

1. Основные теоремы стереометрии	4
2. Параллелепипеды и призмы.....	5
3. Пирамиды.....	9
4. Круглые тела.....	19
5. Задачи повышенной сложности.....	28
6. Контрольная работа 6.....	34
7. Тест 6 «Стереометрия».....	34
Библиографический список.....	37

1. Основные теоремы стереометрии

1) Теоремы о параллельности прямых и плоскостей

- а) Если прямая параллельна какой – нибудь прямой, лежащей в плоскости, то она параллельна самой плоскости.
- б) Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости и пересекает эту другую плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна первой прямой.
- в) Если две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью, то получившиеся две линии пересечения параллельны.
- г) Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны соответственно двум пересекающимся прямым второй плоскости, то эти плоскости параллельны.

2) Теоремы о перпендикулярности прямых и плоскостей

- а) Для того, чтобы прямая была перпендикулярна к плоскости, необходимо и достаточно, чтобы она была перпендикулярна к двум параллельным произвольным прямым, лежащим в этой плоскости.
- б) Прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной перпендикулярно ее проекции, перпендикулярна и самой наклонной. Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.
- (б)- Теорема о трех перпендикулярах.
- в) Если две прямые перпендикулярны к одной и той же плоскости, то они параллельны.
- г) Если две плоскости перпендикулярны к одной и той же прямой, то они параллельны.
- д) Если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и к другой.
- е) Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.
- ж) Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

3) Круглые тела

- а) Если из точки, лежащей вне сферы, к этой сфере проведены две касательные, то длины их равны.
- б) Если дана сфера с центром O и плоскость касается сферы в точке A , то радиус OA перпендикулярен плоскости.

Следует обратить внимание на определения:

а) Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

б) Углом между двумя плоскостями называется меньшей из двухгранных углов, определяемых двумя пересекающимися плоскостями. Величиной двухгранного угла называется величина его линейного угла, т.е. величина угла между прямыми, перпендикулярными линии пересечения плоскостей, образующих двугранный угол.

2. Призмы и параллелепипеды

а) Призмой называется многогранник, две грани которого многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные грани – параллелограммы.

б) Прямой призмой называется призма, у которой боковые ребра перпендикулярны плоскостям оснований. В противном случае призма называется наклонной.

в) Прямая призма называется правильной, если ее основания являются правильными многоугольниками.

г) Параллелепипедом называется призма, основанием которой служит параллелограмм.

д) Прямой параллелепипед, основанием которого служит прямоугольник, называется прямоугольным параллелепипедом.

Справедливы следующие формулы:

Площадь боковой поверхности призмы равна боковому ребру, умноженному на периметр сечения призмы плоскостью, перпендикулярной боковым ребрам.

$$S_{бок} = l \cdot p.$$

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна периметру ее основания, умноженному на высоту.

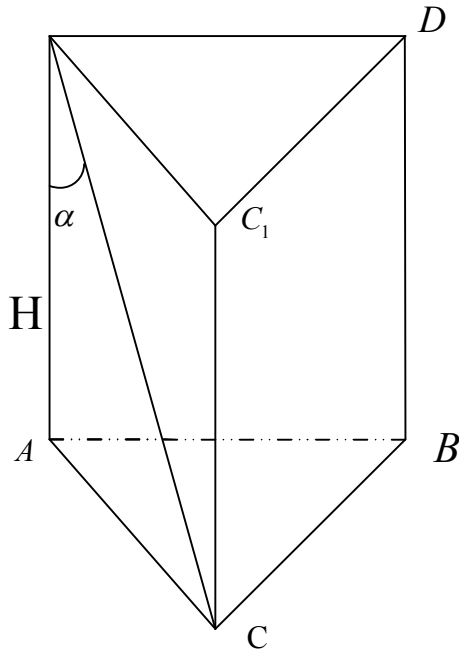
$$S_{бок} = p \cdot H.$$

Объем призмы равен площади ее основания, умноженной на высоту.

$$V = S_{осн} \cdot H.$$

Задачи с решениями

Задача 1. Высота правильной треугольной прямой призмы равна H и образует с диагональю боковой грани угол α . Найти площадь боковой поверхности и объем призмы.



Решение

Обозначим сторону основания через a :
 $AC = CB = AB = a$.

Рассмотрим прямоугольный $\triangle AA_1C$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AC}{AA_1} = \frac{a}{H}, \text{ откуда: } a = H \operatorname{tg} \alpha$$

$$S_{\text{бок}} = 3S_{AA_1C_1C} = 3aH;$$

$$S_{\text{бок}} = 3H^2 \operatorname{tg} \alpha.$$

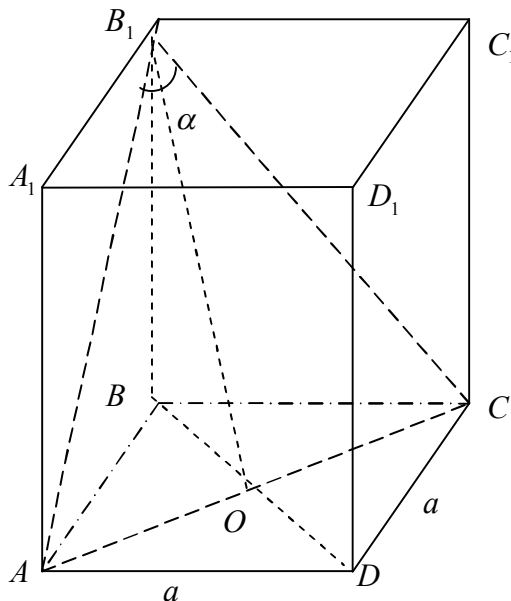
Так как в основании - равносторонний

треугольник, то $S_{\text{осн}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4};$

$$V = S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} H. \quad V = \frac{\sqrt{3} H^3 \operatorname{tg}^2 \alpha}{4}.$$

Ответ: $S_{\text{бок}} = 3H^2 \operatorname{tg} \alpha; \quad V = \frac{\sqrt{3} H^3 \operatorname{tg}^2 \alpha}{4}.$

Задача 2. В правильной четырехугольной прямой призме проведена плоскость через диагональ основания и вершину верхнего основания, которая пересекает две смежные грани по прямым, угол между которыми равен α . Сторона основания равна a . Чему равен объем призмы?



Решение

$$V = S_{\text{осн}} \cdot H; \quad S_{\text{осн}} = a^2;$$

Рассмотрим прямоугольный $\triangle AB_1O$:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{AO}{AB_1}; \quad AO = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} a \sqrt{2};$$

$$AB_1 = \frac{a \sqrt{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

Рассмотрим прямоугольный $\triangle AB_1B$: $B_1B^2 = AB_1^2 - AB^2$ по теореме Пифагора. $B_1B = H$;

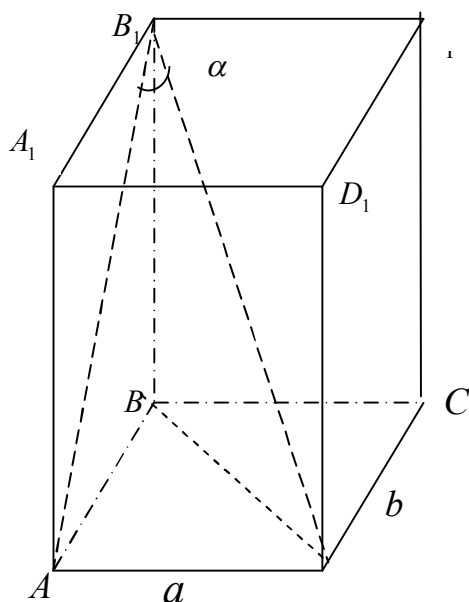
$$H = \sqrt{\frac{2a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - a^2} = \sqrt{a^2 \left(\frac{1}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} - 1 \right)} =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{2}a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Поэтому: $V = \frac{\sqrt{2}a^3\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$

Ответ: $V = \frac{\sqrt{2}a^3\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$

Задача 3. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны a и b , ($a > b$), и его диагональ образует с меньшей гранью угол α . Найти объем прямоугольного параллелепипеда.



Решение.

$$V = S_{\text{осн}} \cdot H; S_{\text{осн}} = a \cdot b.$$

Рассмотрим $\triangle AB_1D$:

$$\angle B_1AD = \frac{\pi}{2}, \text{ т.к. в}$$

прямоугольном параллелепипеде ребра перпендикулярны граням.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AD}{AB_1} = \frac{a}{AB_1};$$

$$AB_1 = a \operatorname{ctg}\alpha.$$

Рассмотрим прямоугольный

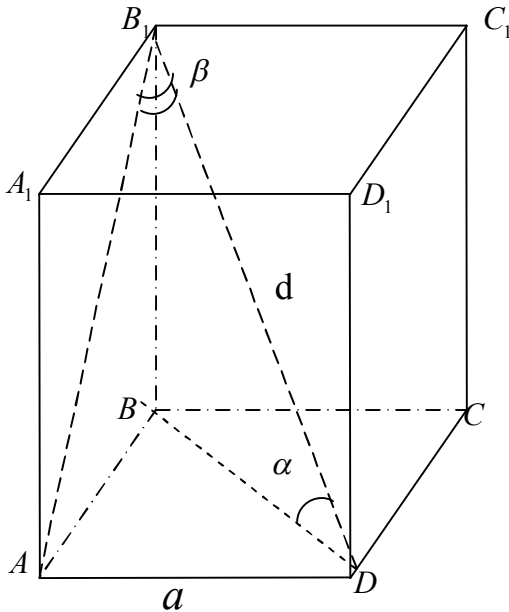
$\triangle AB_1B$: $BB_1 = \sqrt{AB_1^2 - AB^2}$ по теореме Пифагора,

$$BB_1 = H = \sqrt{a^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha - b^2}. V = a \cdot b \cdot \sqrt{a^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha - b^2}$$

Ответ: $V = a \cdot b \cdot \sqrt{a^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha - b^2}.$

Задача 4. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и образует с плоскостью основания угол α , а с плоскостью одной из боковых граней угол β . Найти объем этого параллелепипеда.

Решение



$V = S_{\text{осн}} \cdot H$. В прямоугольном

$$\triangle BB_1D: \sin \alpha = \frac{BB_1}{B_1D} = \frac{H}{d};$$

$$H = d \sin \alpha;$$

$$\cos \alpha = \frac{BD}{B_1D} = \frac{BD}{d}; BD = d \cos \alpha.$$

Рассмотрим

$$\triangle AB_1D: \angle B_1AD = \frac{\pi}{2}, \text{ т.к. в}$$

прямоугольном параллелепипеде ребра перпендикулярны граням

$\angle AB_1D = \beta$ как угол между

прямой B_1D и плоскостью (AB_1B) .

$$\sin \beta = \frac{AD}{B_1D} = \frac{AD}{d}; AD = d \sin \beta.$$

$\triangle ABD$ - прямоугольный, по теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{BD^2 - AD^2} = \sqrt{d^2 \cos^2 \alpha - d^2 \sin^2 \beta} = d \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}$$

$$S_{\text{осн}} = AB \cdot AD = d^2 \sin \beta \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta},$$

тогда $V = d^3 \sin \alpha \sin \beta \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}$.

Преобразуем

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta = (\cos \alpha + \sin \beta)(\cos \alpha - \sin \beta) =$$

$$= \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin \beta \right) \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin \beta \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha + \beta}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta}{2} 2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha + \beta}{2} = \\
&= \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \beta \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta \right) = \cos (\alpha - \beta) \cos (\alpha + \beta)
\end{aligned}$$

Окончательно: $V = d^3 \sin \alpha \sin \beta \sqrt{\cos(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta)}$

ОТВЕТ: $V = d^3 \sin \alpha \sin \beta \sqrt{\cos(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta)}$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной a . Диагональ призмы наклонена к плоскости основания под углом 60° . Найти длину этой диагонали и объем этой призмы.

ОТВЕТ: $l = 2\sqrt{2}a$, $V = \sqrt{6}a^3$

Задача 2. Основанием прямого параллелепипеда с высотой H служит прямоугольник, диагонали которого равны a и пересекаются под углом 60° . Найти объем параллелепипеда.

ОТВЕТ: $V = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 H$

Задача 3. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, основание которого равно a и угол при основании α . Определить объем призмы, если площадь ее боковой поверхности равна сумме площадей ее оснований.

ОТВЕТ: $V = \frac{a^3}{8} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha$

3. Пирамиды

Пирамидой называется многогранник, одна из граней которого – произвольный многоугольник, а остальные грани – треугольники, имеющие общую вершину.

Если все боковые ребра пирамиды образуют равные углы с основанием, то:

- 1) все боковые ребра равны;
- 2) около основания можно описать окружность;
- 3) высота пирамиды проходит через центр этой окружности.

Если все боковые грани пирамиды наклонены к основанию под одним и тем же углом α , а высота проходит через некоторую т. O основания пирамиды, то

- 1) высоты всех боковых граней равны;
- 2) в основание пирамиды можно вписать окружность, центром которой будет т. O ;
- 3) $S_{осн} = S_{бок} \cos \alpha$.

Справедливы следующие формулы:

Боковая поверхность пирамиды равна сумме площадей ее боковых граней.

Объем пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту, т.е.

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H.$$

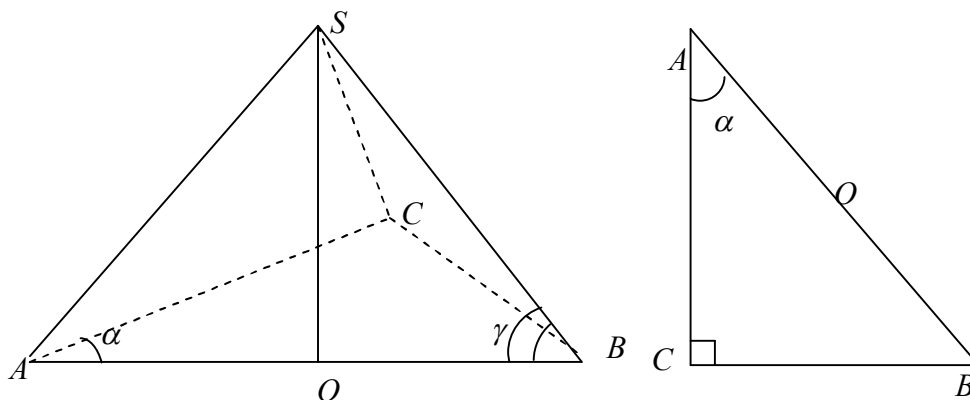
Объем усеченной пирамиды с площадями оснований S_1 и S_2 и высотой H равен

$$V = \frac{1}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) \cdot H$$

Задачи с решениями

Задача 1. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой $С$ и острым углом α . Каждое боковое ребро пирамиды образует с плоскостью основания угол γ . Найти объем пирамиды.

Решение



Так как все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, то вершина пирамиды проектируется в центр описанной около основания окружности. Центром такой окружности является т. O - середина гипотенузы прямоугольного треугольника.

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H, \quad S_{\text{осн}} = S_{\Delta ABC} \quad H = SO; \quad SO \perp (ABC),$$

тогда $\angle SBO = \gamma$. В ΔABC : $AB = c$; $\sin \alpha = \frac{CB}{AB}$ $CB = c \sin \alpha$

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB} \quad AC = c \cos \alpha.$$

$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} AC \cdot CB = \frac{1}{2} c \cos \alpha \cdot c \sin \alpha = \frac{1}{4} c^2 \sin 2\alpha \quad AO = OB = \frac{1}{2} c.$$

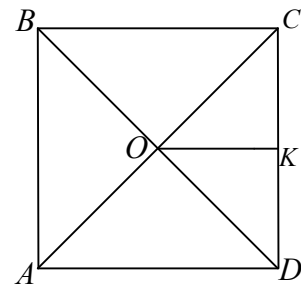
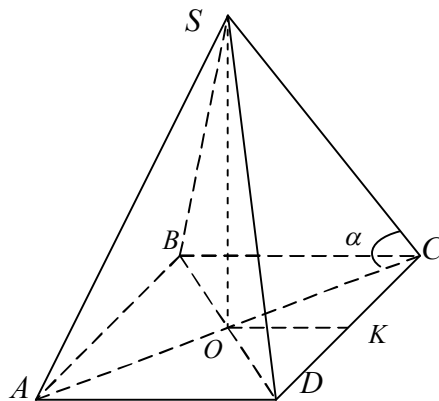
В ΔSOB : $OB = \frac{1}{2} c$; $\text{tg} \gamma = \frac{SO}{OB}$; $SO = H = \frac{1}{2} c \cdot \text{tg} \gamma$.

Тогда $V = \frac{1}{3} \frac{1}{4} c^2 \sin 2\alpha \frac{1}{2} c \cdot \text{tg} \gamma = \frac{1}{24} c^3 \sin 2\alpha \cdot \text{tg} \gamma$.

Ответ: $V = \frac{c^3}{24} \sin 2\alpha \cdot \text{tg} \gamma$

Задача 2. Апофема правильной четырехугольной пирамиды равен a . Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α . Найти объем пирамиды.

Решение



$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H; \quad S_{\text{осн}} = S_{ABCD}; \quad H = SO. \quad SO \perp (ABCD); \quad SK \perp DC$$

и $SK = a$, $\angle OCS = \alpha$, как угол между ребром SC и его проекцией на плоскость основания. Рассмотрим ΔOSC и ΔOSK и найдем в них SO :

$$\triangle OSC: tg\alpha = \frac{SO}{OC}; SO = OCtg\alpha.$$

$$\triangle OSK: SO = \sqrt{SK^2 - OK^2} = \sqrt{a^2 - OK^2}.$$

$$\text{Приравняем полученные выражения } OCtg\alpha = \sqrt{a^2 - OK^2}.$$

$$\text{Из } \triangle OCK: OC = \sqrt{OK^2 + CK^2} = \sqrt{2OK^2} = OK\sqrt{2}.$$

$$\text{Значит: } OK\sqrt{2} \cdot tg\alpha = \sqrt{a^2 - OK^2}; 2OK^2 \cdot tg^2\alpha = a^2 - OK^2;$$

$$OK^2 \cdot (2tg^2\alpha + 1) = a^2; OK^2 = \frac{a^2}{2tg^2\alpha + 1}; OK = \frac{a}{\sqrt{2tg^2\alpha + 1}}.$$

$$\text{Тогда: } OC = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2tg^2\alpha + 1}}; SO = \frac{a\sqrt{2}tg\alpha}{\sqrt{2tg^2\alpha + 1}};$$

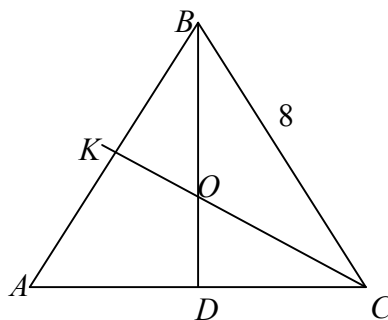
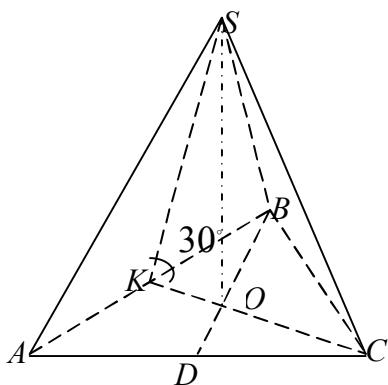
$$S_{осн} = (2OK)^2 = \frac{4a^2}{2tg^2\alpha + 1}.$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \frac{a^2}{2tg^2\alpha + 1} \cdot \frac{a\sqrt{2}tg\alpha}{\sqrt{2tg^2\alpha + 1}} = \frac{4\sqrt{2}a^3tg\alpha}{3(2tg^2\alpha + 1)\sqrt{2tg^2\alpha + 1}}.$$

$$\text{Ответ: } V = \frac{4\sqrt{2}a^3tg\alpha}{3(2tg^2\alpha + 1)\sqrt{2tg^2\alpha + 1}}.$$

Задача 3. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 8 см, а боковая грань наклонена к плоскости основания под углом 30° . Найти площадь полной поверхности пирамиды.

Решение



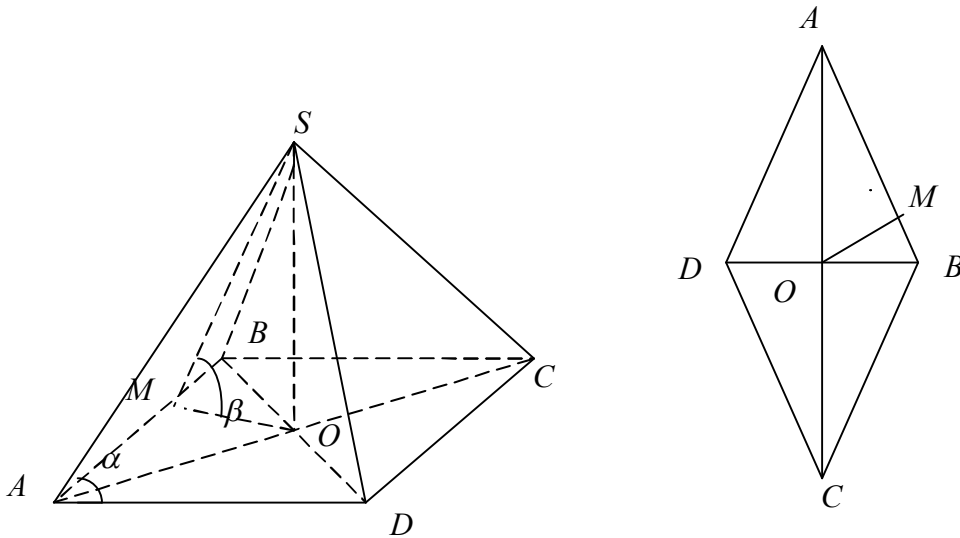
$$S_n = S_{бок} + S_{осн}; \quad S_{осн} = S_{\triangle ABC} = \frac{(AB)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{64\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}(\text{см}^2).$$

Так как все грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 30° , то $S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos 30^\circ} = \frac{16\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 32(\text{см}^2)$; $S_n = 16(2 + \sqrt{3})(\text{см}^2)$.

$$\text{Ответ: } S_n = 16(2 + \sqrt{3})(\text{см}^2)$$

Задача 4. Основание пирамиды – ромб с острым углом α и большей диагональю d . Все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β . Найти объем пирамиды.

Решение



$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H; \quad S_{осн} = S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot DB. \quad \triangle AOB: \operatorname{tg} \angle OAB = \frac{OB}{OA};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{OB}{\frac{1}{2}d}; \quad OB = \frac{1}{2}d \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}; \quad DB = 2OB; \quad DB = d \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Тогда $S_{осн} = \frac{1}{2} d^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Так как все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β , то вершина пирамиды проектируется в центр вписанной в основание окружности. Таким центром будет т. O - точка пересечения диагоналей ромба. Радиус такой окружности – перпендикуляр OM , опущенный из т. O на сторону ромба.

$OM \perp AB$; OM - проекция MS на плоскость основания, тогда $MS \perp AB$.
Так как $AB \perp OM$ и $AB \perp MS$, то $\angle SMO = \beta$.

$$\Delta MSO : \operatorname{tg} \angle SMO = \operatorname{tg} \beta = \frac{SO}{MO}; SO = H = MO \operatorname{tg} \beta.$$

$$\Delta AOM : \sin \angle OAM = \frac{OM}{AO}; OM = \frac{1}{2} d \sin \frac{\alpha}{2}$$

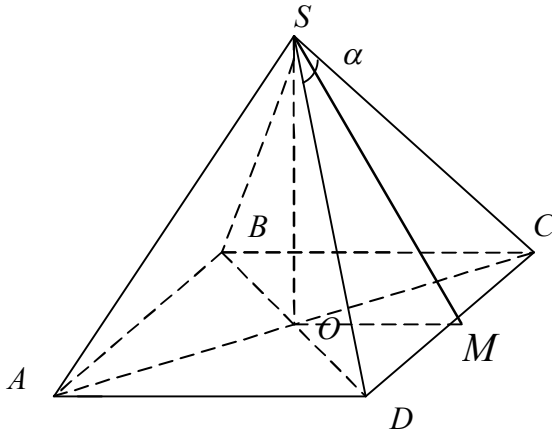
Значит, $H = \frac{1}{2} d \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$.

Поэтому $V = \frac{1}{3} \frac{1}{2} d^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \frac{1}{2} d \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{12} d^3 \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$.

Ответ: $V = \frac{1}{12} d^3 \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$.

Задача 5. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна h , а плоский угол при вершине α . Найти объем пирамиды.

Решение



$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h; S_{\text{осн}} = a^2,$$

где a - сторона квадрата $ABCD$.
Проведем $SM \perp DC$, т. M - середина DC .

$$\text{Из } \Delta DSM : \operatorname{tg} \angle DSM = \frac{DM}{SM}.$$

SM - биссектриса, медиана и высота равнобедренного ΔDSC .

Поэтому $SM = \frac{\frac{a}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. Из прямоугольного $\triangle OSM$:

$$SO^2 + OM^2 = SM^2; \quad h^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

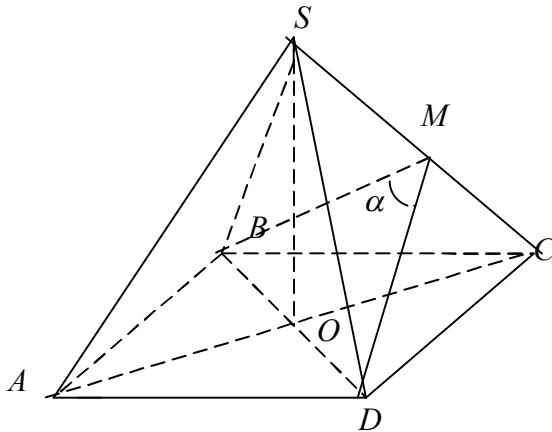
$$4h^2 = a^2 \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \right); \quad 4h^2 = a^2 \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = a^2 \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$a^2 = \frac{4h^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} \quad V = \frac{1}{3} \frac{4h^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha};$$

$$\text{Ответ: } V = \frac{4}{3} h^3 \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$$

Задача 6. Найти косинус угла между смежными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды, у которой боковое ребро равно стороне основания.

Решение



Углом между смежными боковыми гранями данной пирамиды является линейный угол $\angle BMD$, образованный BM и DM , где $BM \perp SC$ и $DM \perp SC$, SC — линия пересечения боковых граней. Обозначим сторону основания через a , тогда и все боковые ребра будут равны a .

$$\text{Из } \triangle ABD: BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Из } \triangle DMC: DM = \sqrt{DC^2 - MC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$BM = DM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \text{ так как все боковые грани представляют собой}$$

равносторонние треугольники со стороной a .

К $\triangle BMD$ применим теорему косинусов:

$$BD^2 = BM^2 + DM^2 - 2BM \cdot DM \cdot \cos \alpha.$$

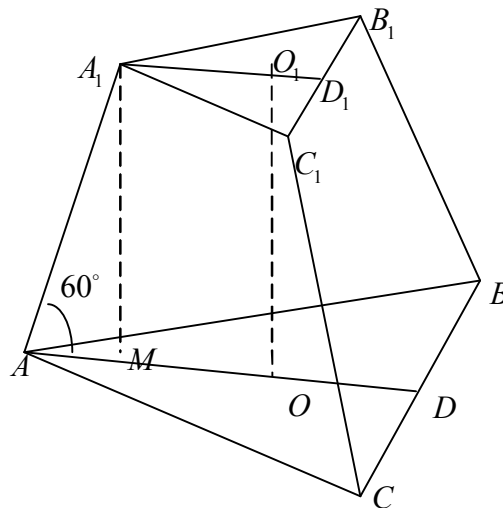
$$2a^2 = \frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - 2 \frac{a\sqrt{3}}{4} \frac{a\sqrt{3}}{4} \cos \alpha;$$

$$\frac{a^2}{2} = -\frac{3}{2}a^2 \cos \alpha; \quad \cos \alpha = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \cos \alpha = -\frac{1}{3}.$$

Задача 7. Стороны основания правильной треугольной усеченной пирамиды равны 8 см и 12 см, а боковое ребро образует с плоскостью большего основания угол 60° . Найти объем данной усеченной пирамиды.

Решение



Верхнее основание данной усеченной пирамиды – равносторонний $\triangle A_1B_1C_1$ со стороной 8 см, в котором точка O_1 – точка пересечения

медиан(высот, биссектрис). Поэтому $AO_1 = \frac{2}{3} A_1D_1 = \frac{2}{3} \frac{A_1C_1}{2} \sqrt{3} = \frac{8}{\sqrt{3}}$ см.

Аналогично рассуждая, получим, что $AO = \frac{2}{3} AD = \frac{2}{3} \frac{AC}{2} \sqrt{3} = \frac{12}{\sqrt{3}}$ см.

Тогда $AM = AO - MO = AO - A_1O_1 = \frac{12}{\sqrt{3}} - \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ см.

Из $\triangle AA_1M$: $\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{A_1M}{AM}$; $A_1M = H = A_1M \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{3} = 4$ см.

$$V = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})H, \text{ где } S_1 = S_{\triangle A_1 B_1 C_1}; S_2 = S_{\triangle ABC}; H = A_1 M.$$

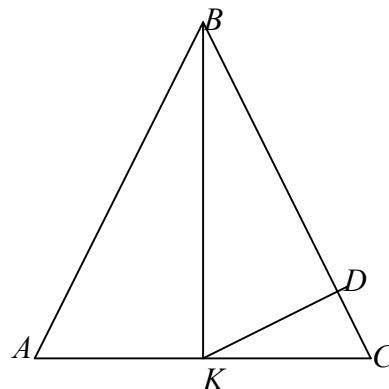
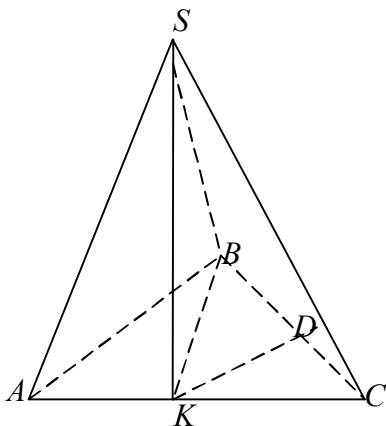
$$S_1 = \frac{(A_1 C_1)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{64\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \text{ см}^2. S_2 = \frac{(AC)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{144\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

$$V = \frac{1}{3}(16\sqrt{3} + 36\sqrt{3} + \sqrt{16\sqrt{3} \cdot 36\sqrt{3}})4 = \frac{1}{3}(52\sqrt{3} + 24\sqrt{3})4 = \frac{304}{3}\sqrt{3} \text{ см}^3.$$

$$\text{Ответ: } V = \frac{304}{3}\sqrt{3} \text{ см}^3.$$

Задача 8. Основание пирамиды – равнобедренный треугольник с углом α при вершине. Боковая грань пирамиды, которая содержит основание этого треугольника, перпендикулярна к плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углом β . Найти объем пирамиды, если ее высота равна H .

Решение



По условию $AB = BC$, $\angle ABC = \alpha$, боковая грань (ASC) перпендикулярна основанию (ABC) . $SK \perp AC$, значит, по признаку перпендикулярности двух плоскостей $SK \perp (ABC)$. Поэтому SK является высотой и $SK = H$. Проведем $KD \perp BC$. Так как KD является проекцией SD на плоскость (ABC) , то наклонная $SD \perp BC$ по теореме о трех перпендикулярах. Тогда $\angle KDS = \beta$,

Из прямоугольного $\triangle KSD$: ; $KD = H \operatorname{ctg} \beta$.

Из прямоугольного $\triangle KDC$: $\angle DCK = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, т.к. в $\triangle KBC$ $\angle KBC = \frac{\alpha}{2}$ (BK – биссектриса и медиана);

$$\sin \angle DCK = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{KD}{KC}; \quad KC = \frac{KD}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{H \operatorname{ctg} \beta}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{Из } \triangle KBC: \operatorname{tg} \angle KBC = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{KC}{KB}; \quad KB = \frac{KC}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{H \operatorname{ctg} \beta}{\cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{H \operatorname{ctg} \beta}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$S_{\text{осн}} = S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{H \operatorname{ctg} \beta}{\cos \frac{\alpha}{2}} \frac{H \operatorname{ctg} \beta}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{2H^2 \operatorname{ctg}^2 \beta}{\sin \alpha}.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{2}{3} H^3 \frac{\operatorname{ctg}^2 \beta}{\sin \alpha}.$$

$$\text{Ответ: } V = \frac{2}{3} H^3 \frac{\operatorname{ctg}^2 \beta}{\sin \alpha}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Основание пирамиды – ромб с острым углом β и меньшей диагональю d . Все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α . Найти объем пирамиды.

$$\text{Ответ: } V = \frac{1}{6} d^3 \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Задача 2. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетом b и противолежащим ему углом β . Все боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания угол γ . Найти объем пирамиды.

$$\text{Ответ: } V = \frac{1}{12} b^3 \frac{\operatorname{ctg} \beta}{\sin \beta} \operatorname{tg} \gamma.$$

Задача 3. Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны a , а ее диагональное сечение – равносторонний треугольник. Найти объем пирамиды.

$$\text{Ответ: } V = \frac{a^3 \sqrt{6}}{6}.$$

Задача 4. Площадь поверхности правильного тетраэдра равна $12\sqrt{3}$ см². Найти его объем. Тетраэдр – правильная пирамида, все грани которой равносторонние треугольники.

$$\text{Ответ: } V = 2\sqrt{6} \text{ см}^3.$$

Задача 5. Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды в 5 раз больше площади ее основания. Найти плоский угол при вершине пирамиды.

$$\text{Ответ: } \alpha = 2 \arctg \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

Задача 6. Основание пирамиды – правильный треугольник. Одна из боковых граней пирамиды перпендикулярна плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углом 45° . Найти объем пирамиды, если сторона основания пирамиды равна 6 см.

$$\text{Ответ: } V = \frac{27}{2} \text{ см}^3.$$

4. Круглые тела

Прямым круговым цилиндром называется тело, полученное при вращении прямоугольника вокруг оси, содержащей его сторону.

Прямым круговым конусом называется тело, полученное при вращении прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащей его катет.

Шаром называется тело, полученное при вращении полукруга вокруг оси, содержащей его диаметр.

Сфера – это поверхность шара, т.е. множество точек пространства, равноудаленных от центра шара.

Справедливы следующие формулы.

Площадь боковой поверхности цилиндра равна $S = 2\pi RH$, где R - радиус основания и H - высота.

Объем цилиндра равен $V = \pi R^2 \cdot H$.

Площадь боковой поверхности прямого кругового конуса равна $S = \pi Rl$, где R - радиус основания и l - образующая.

Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна $S = \pi(R_1 + R_2) \cdot l$, где R_1 и R_2 - радиусы оснований, а l - образующая.

Объем конуса равен $V = \frac{1}{3}S \cdot H$, где S - площадь основания, H -

высота.

Объем усеченного конуса

$V = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) \cdot H$, где S_1 и S_2 - площади оснований и H -

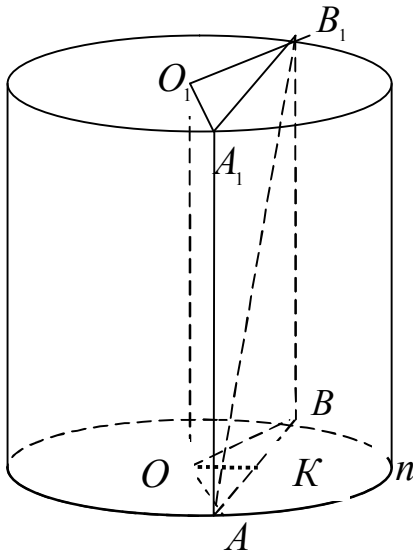
высота.

Площадь сферы равна $S = 4\pi R^2$, где R - ее радиус.

Объем шара равен $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где R - ее радиус.

Задачи с решениями

Задача 1. Параллельно оси цилиндра, радиус основания которого равен 8 см, проведена плоскость, пересекающая основание цилиндра по хорде, которая стягивает дугу 120° . Найти площадь сечения, если его диагональ равна 16 см.



Решение

Пусть плоскость сечения пересекает верхнее основание цилиндра по хорде A_1B_1 . Опустим перпендикуляры A_1A и B_1B на нижнее основание. Тогда, с одной стороны, A_1A и B_1B - образующая цилиндра, а с другой - A_1A и B_1B принадлежат плоскости сечения. Так как плоскость сечения параллельна оси цилиндра, то она перпендикулярна основанию цилиндра и сечение представляет собой прямоугольник AA_1B_1B .

Проведем в равнобедренном треугольнике $\triangle OAB$ $OK \perp AB$. Так как

дуга $AnB = 120^\circ$, то $\angle AOB = 120^\circ$, а $\angle AOK = 60^\circ$, т.к. OK - биссектриса в равнобедренном треугольнике.

$$\sin 60^\circ = \frac{AK}{OA}; AK = OA \frac{\sqrt{3}}{2} = 8 \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ см. } AB = 2AK = 8\sqrt{3} \text{ см.}$$

$$\text{Из } \triangle AB_1B: B_1B = \sqrt{AB_1^2 - AB^2} = \sqrt{256 - 192} = \sqrt{64} = 8 \text{ см.}$$

$$S_{AA_1B_1B} = AB \cdot BB_1 = 8\sqrt{3} \cdot 8 = 64\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

Ответ: $S = 64\sqrt{3} \text{ см}^2$.

Задача 2. В цилиндре параллельно его оси проведена плоскость, пересекающая нижнее основание цилиндра по хорде, которую видно из центра этого основания под углом α . Найти площадь боковой поверхности цилиндра, если площадь данного сечения равна S .

Решение

Пусть плоскость сечения пересекает верхнее основание цилиндра по хорде A_1B_1 . Опустим перпендикуляры A_1A и B_1B на нижнее основание. Тогда, с одной стороны, A_1A и B_1B – образующая цилиндра, а с другой – A_1A и B_1B принадлежат плоскости сечения. Так как плоскость сечения параллельна оси цилиндра, то она перпендикулярна основанию цилиндра и сечение представляет собой прямоугольник

$$AA_1B_1B \cdot S_{AA_1B_1B} = AB \cdot AA_1 = S,$$

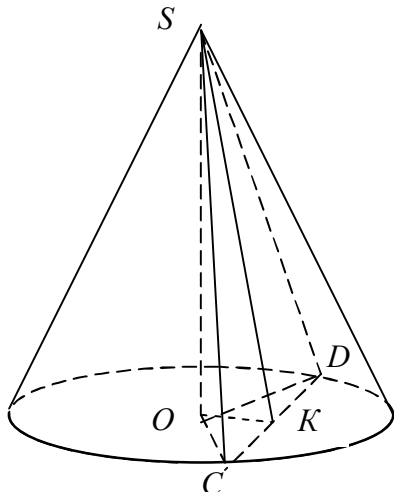
$\angle AOB = \alpha$. Проведем $OK \perp AB$, $AK = KB$, т.к. $\triangle AOB$ – равнобедренный.

Применим теорему синусов к $\triangle OAB$. $\frac{AB}{\sin \angle AOB} = 2OA$;

$$S_{бок} = 2\pi RH = 2\pi OA \cdot AA_1 = \pi \frac{AB}{\sin \alpha} \cdot AA_1 = \frac{\pi S}{\sin \alpha}.$$

$$\text{Ответ: } S_{бок} = \frac{\pi S}{\sin \alpha}.$$

Задача 3. В основании конуса проведена хорда CD на расстоянии 3 см от центра O основания. SO – высота конуса, $SO = 3\sqrt{3}$ см. Найти расстояние от точки O до плоскости CSD .



Решение

Высота $SO \perp (OCD)$, в равнобедренном $\triangle OCD$ проведем высоту OK . $OK \perp CD$ и по условию $OK = 3$ см.

OK – проекция SK на (ODC) , тогда $SK \perp DC$ по теореме о трех перпендикулярах и $(SDC) \perp (SOK)$.

Опустим в плоскости (SOK)

перпендикуляр OE на линию пересечения плоскостей (SDC) и (SOK) .
 Так как плоскости перпендикулярны, то $OE \perp (SDC)$ и OE - искомое расстояние. Из прямоугольного $\triangle SOK$:

$$SK = \sqrt{(OS)^2 + (OK)^2} = \sqrt{27 + 9} = 6 \text{ см.}$$

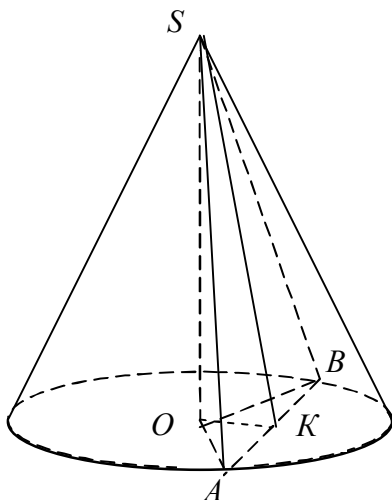
$\triangle SOK$ подобен $\triangle OSE$ по двум углам, поэтому $\frac{OK}{OE} = \frac{SK}{OS}$;

$$OE = \frac{OK \cdot OS}{SK} = \frac{3 \cdot 3\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ см.}$$

$$\text{Ответ: } OE = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ см.}$$

Задача 4. Сечение конуса, которое проходит через его вершину, пересекает основание конуса по хорде, которую видно из центра основания под углом β . Плоскость сечения образует с высотой конуса угол φ . Найти площадь боковой поверхности и объем конуса, если его высота равна H .

Решение



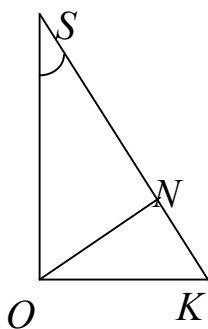
$SO = H$ - высота конуса. $\triangle ASB$ - сечение, $\angle AOB = \beta$

Проведем $OK \perp AB$. Так как $\triangle AOB$ равнобедренный, то $AK = KB$. OK - проекция SK на плоскость (OAB) . $OK \perp AB$, значит, $SK \perp AB$ по теореме о трех перпендикулярах. Угол между плоскостью сечения (ASB) и высотой SO это угол между высотой и ее проекцией SN на плоскость сечения, т.е. $\angle OSK$ равен φ . $S_{бок} = \pi Rl = \pi OA \cdot AS$.

$$\text{Из } \triangle OSK: \operatorname{tg} \varphi = \frac{OK}{SO}; \quad OK = H \operatorname{tg} \varphi$$

$$\text{Из } \triangle OAK: \angle OAK = \frac{\beta}{2}; \quad \cos \frac{\beta}{2} = \frac{OK}{OA};$$

$$OA = \frac{H \operatorname{tg} \varphi}{\cos \frac{\beta}{2}};$$



$$\text{Из } \triangle OSA: AS = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{H^2 + \frac{H^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{\cos^2 \frac{\beta}{2}}} = \frac{H}{\cos \frac{\beta}{2}} \sqrt{\cos^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

$$S_{\text{бок}} = \pi \frac{H \operatorname{tg} \varphi}{\cos \frac{\beta}{2}} \frac{H}{\cos \frac{\beta}{2}} \sqrt{\cos^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \pi H^2 \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos^2 \frac{\beta}{2}} \sqrt{\cos^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot H = \frac{1}{3} (OA)^2 H = \frac{1}{3} \pi \frac{H^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{\cos^2 \frac{\beta}{2}} H = \frac{1}{3} \pi H^3 \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{\cos^2 \frac{\beta}{2}}.$$

$$\text{Ответ: } S = \pi H^2 \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos^2 \frac{\beta}{2}} \sqrt{\cos^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \varphi}. \quad V = \frac{1}{3} \pi H^3 \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{\cos^2 \frac{\beta}{2}}$$

Задача 5. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 18 см. и образует с плоскостью его основания угол 60° . Найти объем правильной четырехугольной призмы, описанной около цилиндра.

Решение

$ABCD$ - осевое сечение цилиндра,
 OO_1 - ось цилиндра, AD - диаметр
 основания цилиндра.

$$V_{\text{призмы}} = S_{\text{осн}} H;$$

$$S_{\text{осн}} = a^2 = (AD)^2; H = AB;$$

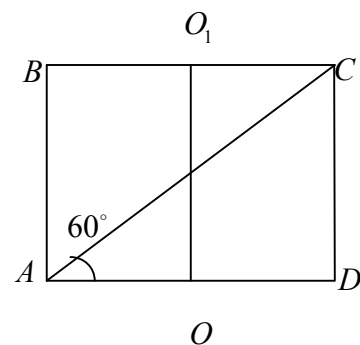
Из $\triangle ACD$:

$$\sin 60^\circ = \frac{H}{AC}$$

$$H = AC \sin 60^\circ = 18 \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3} \text{ см. } \cos 60^\circ = \frac{AD}{AC};$$

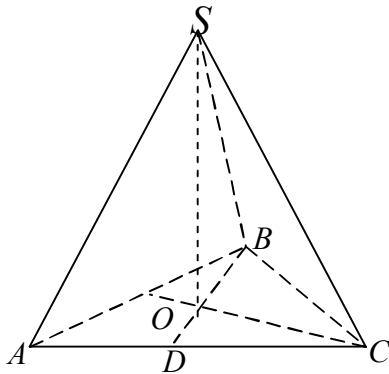
$$AD = AC \cos 60^\circ = 18 \frac{1}{2} = 9 \text{ см. } V_{\text{призмы}} = 9^2 9\sqrt{3} = 729\sqrt{3} \text{ см}^3.$$

$$\text{Ответ: } V = 729\sqrt{3} \text{ см}^3.$$



Задача 6. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с боковой стороной 20 см и основанием 24 см. Все двугранные углы при основании пирамиды равны 45° . Найти объем конуса, вписанного в данную пирамиду.

Решение



$$V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \pi r^2 H = \frac{1}{3} \pi (OD)^2 SO;$$

В $\triangle ABC$: $AB = BC = 20$ см. $AC = 24$ см. $AD = DC = 12$ см.

Так как двугранные углы при основании пирамиды равны между собой, то вершина S проектируется в т. O - центр вписанной окружности. Основание конуса вписано в $\triangle ABC$, поэтому радиус основания $r = OD$. $BD \perp AC$;

$SD \perp AC$, значит, $\angle SDB = 45^\circ$.

Из $\triangle BDC$: $BD = \sqrt{BC^2 - DC^2} = \sqrt{400 - 144} = 16$ см. Воспользуемся

двумя формулами площади треугольника: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot DB$ и $S_{ABC} = pr$,

где p - полупериметр, r - радиус вписанной окружности:

$$\frac{1}{2} ACDB = \frac{AB + BC + AC}{2} OD;$$

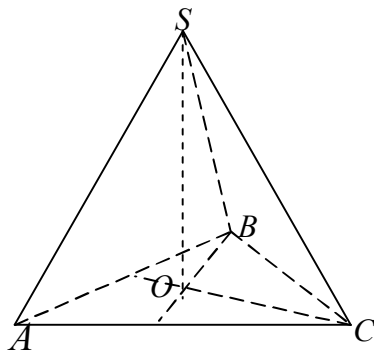
$$OD = \frac{ACDB}{AB + BC + AC} = \frac{24 \cdot 16}{20 + 20 + 24} = 6 \text{ см.}$$

Из $\triangle DSO$: $OD = OS$, т.к. треугольник прямоугольный и его острые углы равны 45° . $SO = 6$ см. $V = \frac{1}{3} \pi 36 \cdot 6 = 72\pi \text{ см}^3$.

Ответ: $V = 72\pi \text{ см}^3$.

Задача 7. Основание пирамиды – равнобедренный треугольник с основанием a и углом α при основании. Около пирамиды описан конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом φ . Найти объем конуса.

Решение



$$V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H, \text{ где } R - \text{радиус}$$

основания конуса или радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$; H - высота конуса, совпадающая с высотой пирамиды.

Применим теорему синусов к $\triangle ABC$:

$$\frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2R; R = \frac{a}{2 \sin(\pi - 2\alpha)} = \frac{a}{2 \sin 2\alpha};$$

$$R = OB.$$

Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом φ . Значит, из $\triangle OSB$:

$$\operatorname{tg} \angle SBO = \frac{SO}{OB}; SO = H = R \operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{2 \sin 2\alpha} \operatorname{tg} \varphi. V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{a}{2 \sin 2\alpha} \right)^3$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{24} \pi \frac{a^3 \operatorname{tg} \varphi}{\sin^3 2\alpha}.$$

$$\text{Ответ: } V = \frac{1}{24} \pi \frac{a^3 \operatorname{tg} \varphi}{\sin^3 2\alpha}.$$

Задача 8. Апофема правильной четырехугольной пирамиды равна h , а двугранный угол при ребре основания φ . Найти площадь поверхности сферы, вписанной в эту пирамиду.

Решение

$S = 4\pi R^2$, где R - радиус сферы. В пирамиде $SO \perp (ABC)$, $OK \perp CD$, значит, $SK \perp DC$, $\angle OKS = \varphi$, $SK = h$.

Центр вписанной сферы - это точка P пересечения высоты SO и биссектрисы линейного угла $\angle OSK$. Поэтому

$$\angle PKO = \frac{\varphi}{2}. \text{ Так как вписанная сфера}$$

касается всех граней пирамиды, то ее радиус $R = PO$.

Из прямоугольного

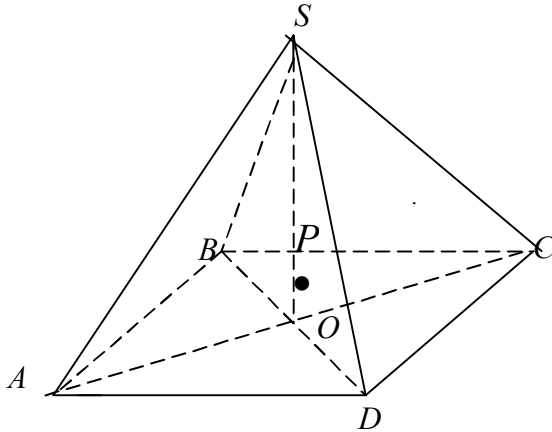
$$\triangle OSK: \cos \angle OKS = \cos \varphi = \frac{OK}{SK}. OK = SK \cos \varphi = h \cos \varphi.$$

$$\text{Из прямоугольного } \triangle OPK: \operatorname{tg} \angle PKO = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{PO}{OK};$$

$$PO = R = OK \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = h \cos^2 \varphi \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \dots S = 4\pi h^2 \cos^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}$$

$$\text{Ответ: } S = 4\pi h^2 \cos^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Задача 9. В шар вписана правильная четырехугольная пирамида, у которой боковое ребро равно b и образует с высотой пирамиды угол β . Найти площадь поверхности и объем шара.



Решение

$$S = 4\pi R^2, V = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ где } R - \text{радиус}$$

шара, описанного около пирамиды.

$$SO \perp (ABC), \angle OSC = \beta,$$

 $SC = b$. Центр шара P лежит на
 SO и находится на одинаковомрасстоянии от всех вершин $\triangle ASC$

$$PS = PA = PC = R, \text{ т.е. является}$$

для $\triangle ASC$ центром описанной

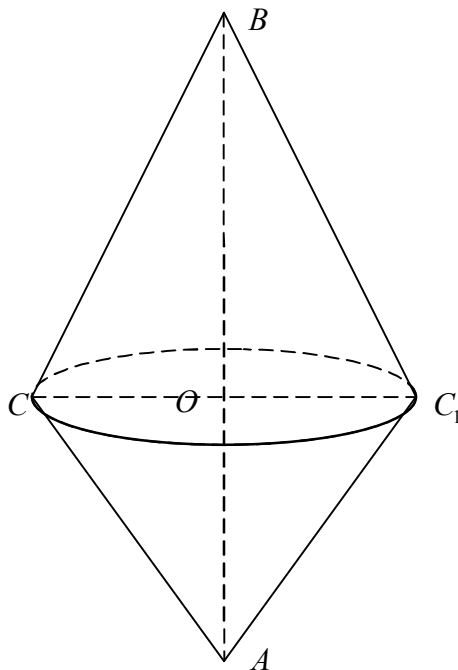
$$\text{окружности. Применим к } \triangle ASC \text{ теорему синусов: } \frac{SC}{\sin \angle SAC} = 2R;$$

$$\frac{b}{\sin(90-\beta)} = 2R, R = \frac{b}{2\cos\beta}, S = 4\pi \frac{b^2}{4\cos^2\beta} = \pi \frac{b^2}{2\cos^2\beta};$$

$$V = \frac{4}{3}\pi \frac{b^3}{8\cos^3\beta} = \frac{1}{6}\pi \frac{b^3}{\cos^3\beta}.$$

$$\text{Ответ: } S = \pi \frac{b^2}{2\cos^2\beta} \quad V = \frac{1}{6}\pi \frac{b^3}{\cos^3\beta}.$$

Задача 10. Прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим углом β вращается вокруг прямой, которая содержит его гипотенузу. Найти объем тела вращения.



Решение

Прямоугольный треугольник $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$) вращается вокруг гипотенузы AB , тогда

$$V_{\text{т.вр.}} = \frac{1}{3}\pi(CO)^2 OB + \frac{1}{3}\pi(CO)^2 OA =$$

$$= \frac{1}{3}\pi(CO)^2(OB+OA) = \frac{1}{3}\pi(CO)^2 AB.$$

В $\triangle ABC$: $CB = a$, $\angle CBA = \beta$. Тогда

$$\text{из } \triangle CBO: \sin CBO = \sin \beta = \frac{CO}{CB};$$

$$CO = a \sin \beta. \text{ Из } \triangle ABC: \cos \beta = \frac{CB}{AB};$$

$$AB = \frac{a}{\cos \beta};$$

$$V = \frac{1}{3} \pi a^2 \sin^2 \beta \frac{a}{\cos \beta} = \frac{1}{3} \pi a^3 \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta}.$$

$$\text{Ответ: } V = \frac{1}{3} \pi a^3 \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Параллельно оси цилиндра, радиус основания которого равен $6\sqrt{2}$ см, проведена плоскость, пересекающая основание цилиндра по хорде, которая стягивает дугу 90° . Найти площадь сечения, если угол между диагональю сечения и указанной хордой равен 60° .

$$\text{Ответ: } 144\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

Задача 2. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 12 см. Найти площадь боковой поверхности цилиндра, если его высота равна диаметру основания.

$$\text{Ответ: } S = 72\pi \text{ см}^2$$

Задача 3. В основании конуса проведена хорда AB на расстоянии 3 см от центра O основания. $MO = 6\sqrt{2}$ см. Найти расстояние от точки O до плоскости AMB .

$$\text{Ответ: } OE = 2\sqrt{2} \text{ см.}$$

Задача 4. Через две образующие конуса, угол между которыми равен α , проведено сечение, образующее с плоскостью основания конуса угол β . Найти площадь боковой поверхности конуса, если его высота равна H .

$$\text{Ответ: } S = \frac{\pi H^2}{\sin^2 \beta \cos \beta} \sqrt{\cos^2 \beta + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Задача 5. Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы равна d и наклонена под углом φ к плоскости основания. Найти объем цилиндра, вписанного в эту призму.

$$\text{Ответ: } V = \pi \frac{d^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi}{12}.$$

Задача 6. Основанием пирамиды является ромб со стороной 16 см и острым углом 60° . Все двугранные углы при основании пирамиды равны 30° . Найти объем конуса, вписанного в пирамиду.

$$\text{Ответ: } V = 64\pi \text{ см}^3.$$

Задача 7. Основание пирамиды – равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом α при основании. Все боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания угол β . Найти образующую конуса, описанного около данной пирамиды.

$$\text{Ответ: } l = \frac{a}{2 \sin \alpha \cos \beta}.$$

Задача 8. Апофема правильной треугольной пирамиды равна h , а двугранный угол при ребре основания – α . Найти площадь поверхности сферы, вписанной в эту пирамиду.

$$\text{Ответ: } S = 4\pi h^2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Задача 9. В шар вписана правильная четырехугольная призма, высота которой равна h , а диагональ наклонена к плоскости основания под углом β . Найти радиус шара.

$$\text{Ответ: } R = \frac{h}{2 \sin \beta}.$$

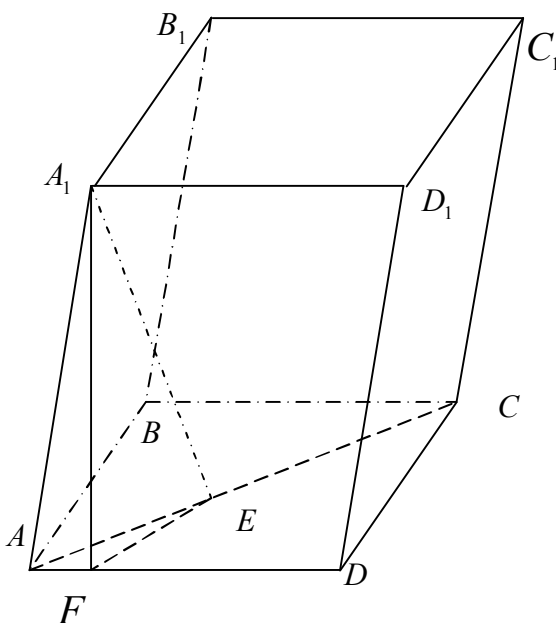
Задача 10. Высота конуса равна H , угол между образующей и высотой равен α . В этот конус вписан другой конус так, что вершина второго конуса совпадает с центром основания первого конуса, а соответствующие образующие обоих конусов перпендикулярны. Найти объем вписанного конуса.

$$\text{Ответ: } V = \frac{1}{12} \pi H^3 \sin^2 \alpha \sin^2 2\alpha.$$

5. Задачи повышенной сложности

Задача 1. В параллелепипеде все его грани – равные ромбы со сторонами a и острыми углами α . Определить объем параллелепипеда.

Решение



$V = S_{осн} H$; $S_{осн}$ – это площадь ромба $ABCD$ со стороной a и острым углом α . Поэтому $S_{осн} = a^2 \sin \alpha$. Построим высоту параллелепипеда. Опустим из т. A_1 перпендикуляр A_1F ; FE – проекция на A_1F на AD в плоскости AA_1D и перпендикуляр A_1F на плоскость (ABC) . Получим $A_1F \perp AD$ и $AE \perp (ABC)$, тогда $EF \perp AD$ по теореме о трех перпендикулярах.

Поэтому высотой H параллелепипеда является A_1E .

Из прямоугольного $\triangle AA_1E$: $H = \sqrt{(AA_1)^2 - (AE)^2} = \sqrt{a^2 - (AE)^2}$.

Из прямоугольного $\triangle AA_1F$: $\cos \alpha = \frac{AF}{AA_1}$; $AF = a \cos \alpha$;

Из прямоугольного $\triangle AEF$ $\angle EAF = \frac{\alpha}{2}$; так как диагонали ромба делят углы при вершине пополам.

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{AF}{AE}; AE = \frac{AF}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{a \cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$H = \sqrt{a^2 - \frac{a^2 \cos^2 \alpha}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \alpha} =$$

$$= \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\left(\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha\right) \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha\right)} =$$

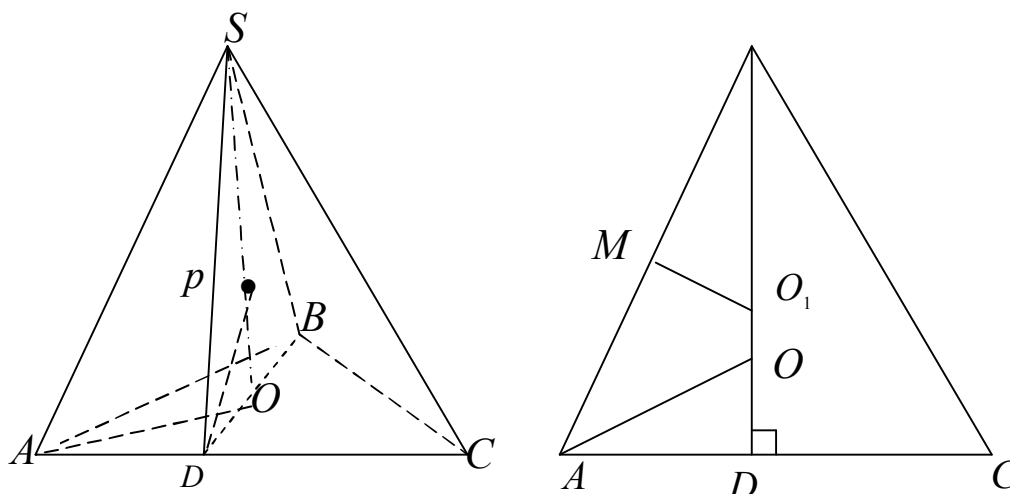
$$= \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{2 \cos \frac{3\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{4} 2 \sin \frac{3\alpha}{4} \sin \frac{\alpha}{4}} = \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sin \frac{3\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$V = \frac{a^3 \sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sin \frac{3\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}} = 2a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\sin \frac{3\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{Ответ: } V = 2a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\sin \frac{3\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Задача 2. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с углом при основании α . Все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β . Найти объем пирамиды, если радиус окружности, описанной около основания, равен R .

Решение



$$O_1B = R, AM = MB, AD = DC. \angle BAO = \angle OAD = \frac{\alpha}{2};$$

$$\angle ABD = \angle DBS = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$, r - радиус шара, вписанного в пирамиду. Так как $SD \perp AC$ и $BD \perp AC$, то $\angle SDB$ - угол наклона боковой грани (ABC) к основанию пирамиды и равен β . Центром шара, вписанного в пирамиду, является точка P пересечения высоты пирамиды и биссектрисы линейного угла $\angle SDB$. $PO = r$.

Из прямоугольного $\triangle DPO$: $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{PO}{OD}$; $r = OD \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$;

Применим к $\triangle ABC$ теорему синусов: $\frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2R$;

где R - радиус описанной около основания окружности.

$$AC = 2R \sin(180 - 2\alpha) = 2R \sin 2\alpha. AD = DC = R \sin 2\alpha.$$

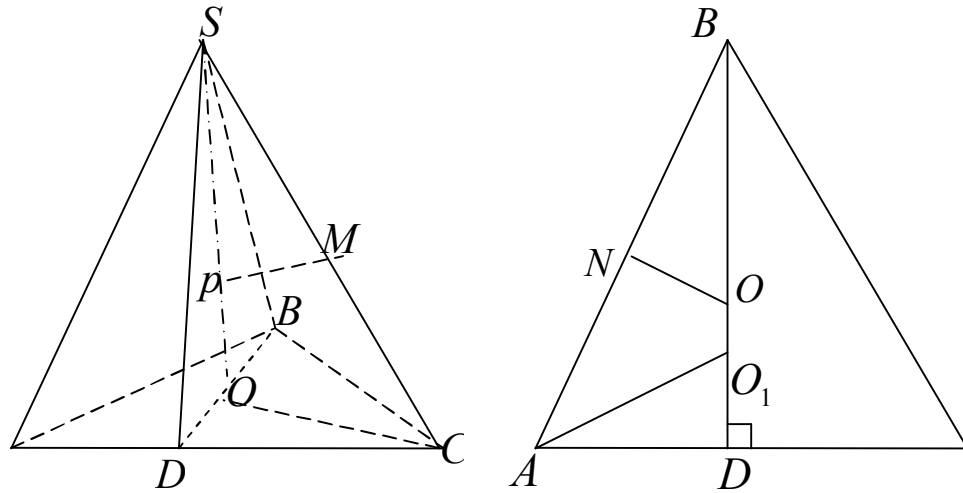
Из прямоугольного $\triangle AOD$: AO - биссектриса, $\operatorname{tg} \angle OAD = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{OD}{AD}$;

$$OD = AD \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = R \sin 2\alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}; r = R \sin 2\alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}; V = \frac{4}{3}\pi R^3 \sin^3 2\alpha \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^3 \frac{\beta}{2}.$$

Ответ: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \sin^3 2\alpha \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^3 \frac{\beta}{2}.$

Задача 3. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с углом при вершине α . Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом β . Найти радиус шара, описанного около пирамиды, если радиус окружности, вписанной в ее основание равен R .

Решение



$$O_1D = R, \angle BAO = \angle OAD = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}; \angle ABD = \angle DBS = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2};$$

$$AN = NB; AD = DC.$$

Так как все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом β , то вершина пирамиды проектируется в точку O - точку пересечения средних перпендикуляров, $\angle OCS = \beta$. Точка O_1 - точка пересечения биссектрис $\triangle ABC$, является центром вписанной в основание окружности. $O_1D = R$ по условию

$$\text{Из } \triangle AO_1D: \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right) = \frac{AD}{O_1D}; AD = DC = R \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right).$$

$$AC = 2R \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right). \text{Применим к } \triangle ABC \text{ теорему синусов:}$$

$$\frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2OC;$$

$$OC = \frac{R \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)}{\sin \alpha}.$$

$$\text{Из } \triangle OSC: \cos \angle OCS = \frac{OC}{SC}; SC = \frac{R \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)}{\sin \alpha \cos \beta}.$$

Центром шара, описанного около пирамиды, является точка P - точка пересечения высоты SO и срединного перпендикуляра PM к боковому ребру SC .

$$PS = PC = PA = PB = R_{\text{шара}}.$$

$$\text{Из } \triangle PSM: SM = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2} \frac{R \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)}{\sin \alpha \cos \beta}; \angle PSM = \frac{\pi}{2} - \beta.$$

$$\cos \angle PSM = \frac{SM}{PS}; PS = \frac{1}{2} \frac{R \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)}{\sin \alpha \cos \beta \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)} = \frac{R \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)}{\sin \alpha \sin 2\beta}.$$

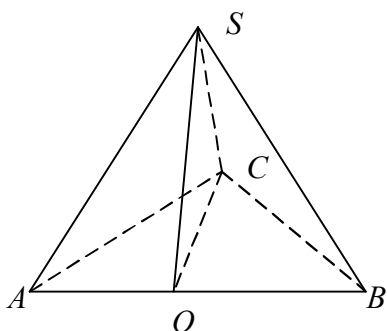
Радиус шара, описанного около пирамиды,

$$R_{\text{ш}} = PS = \frac{R \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)}{\sin \alpha \sin 2\beta}$$

$$\text{Ответ: } R_{\text{ш}} = PS = \frac{R \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)}{\sin \alpha \sin 2\beta}.$$

Задача 4. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом φ . Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 30° и имеют длину l . При каком значении φ объем пирамиды будет наибольшим? Вычислить этот наибольший объем.

Решение



Так как боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, то вершина S пирамиды проектируется в точку O - центр описанной около треугольника ABC окружности. Точка O является серединой гипотенузы AB

$$AO = OB = OC = R; \angle ACB = 90^\circ.$$

$SO = H$ - высота пирамиды, высота

$SO \perp (ABC)$, поэтому $SO \perp AB$. Углом между боковым ребром пирамиды и плоскостью основания является угол между ребром и его проекцией на плоскость: $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = 30^\circ$.

$$\text{Из } \triangle ASO: \sin \angle SAO = \sin 30^\circ = \frac{SO}{AS}; SO = AS \frac{1}{2} = l \frac{1}{2}$$

$$\cos \angle SAO = \cos 30^\circ = \frac{AO}{AS}; AO = AS \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = l \frac{\sqrt{3}}{2}; AB = l\sqrt{3}.$$

$$\text{Из } \triangle ABC: \angle ACB = 90^\circ; \angle CAB = \varphi; \sin \angle CAB = \sin \varphi = \frac{CB}{AB};$$

$$CB = l\sqrt{3} \sin \varphi; \cos \angle CAB = \cos \varphi = \frac{AC}{AB}; AC = l\sqrt{3} \cos \varphi.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H;$$

$$S_{\text{осн}} = S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot CB = \frac{1}{2} l\sqrt{3} \cos \varphi l\sqrt{3} \sin \varphi = \frac{3}{2} l^2 \sin \varphi \cos \varphi = \frac{3}{4} l^2 \sin 2\varphi;$$

$$H = l \frac{1}{2}; V = \frac{1}{3} \frac{3}{4} l^2 \sin 2\varphi l \frac{1}{2} = \frac{l^3}{8} \sin 2\varphi; \text{ где } \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Исследуем, при каком значении φ объем пирамиды будет наибольшим.

$$V'_\varphi = \frac{l^3}{8} \cos 2\varphi \cdot 2 = \frac{l^3}{4} \cos 2\varphi; V'_\varphi = 0;$$

$$\frac{l^3}{4} \neq 0; \cos 2\varphi = 0; 2\varphi = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in \mathbb{Z}.$$

Так как $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то единственной критической точкой будет $\varphi = \frac{\pi}{4}$ при $n = 0$.

Определим знак V'_φ при значениях $\varphi < \frac{\pi}{4}$ и $\varphi > \frac{\pi}{4}$;

$$V'_\varphi \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{l^3}{4} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{l^3}{8} > 0; V'_\varphi \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{l^3}{4} \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{l^3}{4} \left(-\cos \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{l^3}{8} < 0;$$

Значит, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ - точка max; $V_{\text{наиб}} = V_{\text{max}}$;

$$V_{\text{наиб}} = V \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{l^3}{8} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{l^3}{8}.$$

$$\text{Ответ: } V_{\text{наиб}} = \frac{l^3}{8}$$

6. Контрольная работа

Стереометрия

1. Площадь полной поверхности конуса равна 90π см² а его образующая больше радиуса основания на 8 см. Найти объем конуса.
2. Основания прямой призмы – ромб с острым углом 45° . Диагональ боковой грани равна 8 см и образует с плоскостью основания угол 30° . Найти объем призмы.
3. В нижнем основании цилиндра проведена хорда, которая видна из центра нижнего основания под углом 90° , а из центра верхнего основания - под углом 60° . Найти площадь боковой поверхности цилиндра, если радиус его основания равен 8 см.
4. Равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна b , а угол при вершине - β , вращается вокруг прямой, проходящей через вершину треугольника параллельно его основанию. Найти объем тела вращения.
5. Основание пирамиды – прямоугольник, одна из сторон которого равна a и образует с диагональю прямоугольника угол α . Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β . Найти площадь боковой поверхности конуса, описанного около данной пирамиды.

7. Тест Стереометрия

1. Точка A лежит в одной из граней двугранного угла. Из точки A опущен перпендикуляр AB на ребро двугранного угла и перпендикуляр AC на другую грань данного угла, $AB = 6\sqrt{2}$ см, $BC = 6$ см. Найти величину двугранного угла.

А 45° Б 30° В 60° Г 90° Д. Другой ответ.

2. Из точки M , удаленной от плоскости α на 24 см, проведена к этой плоскости наклонная MN . Найти длину этой наклонной, если длина ее проекции на плоскость α равна 7 см.

А $\sqrt{527}$ см Б 17 см В $\sqrt{31}$ см Г 25 см Д 31 см

3. Через вершину прямого угла B треугольника ABC к плоскости треугольника проведен перпендикуляр BK , длина которого равна 7 см.

Найти расстояние от точки K до прямой AC , если $AC = 8\sqrt{2}$ см, $\angle BAC = 45^\circ$.

А 12 см Б 10 см В 9 см Г 14 см Д $AC = 9\sqrt{2}$ см.

4. Если площадь полной поверхности куба равна 150 см², то его объем равен

А 25 см³ Б 125 см³ В 150 см³ Г 625 см³ Д. Другой ответ.

5. Найти ребро куба, если площадь его диагонального сечения равна $16\sqrt{2} \text{ см}^2$.

А 8 см Б $2\sqrt{2} \text{ см}$ В 4 см Г $8\sqrt{2} \text{ см}$ Д Другой ответ.

6. Двухгранный угол равен 45° . Точка A , лежащая в одной из граней этого угла, удалена от второй грани на $4\sqrt{2} \text{ см}$. Найти расстояние от точки A до ребра этого угла.

А 4 см Б $8\sqrt{2} \text{ см}$ В 32 см Г $4\sqrt{2} \text{ см}$ Д Другой ответ.

7. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 6 см и 8 см, а его диагональ образует с плоскостью основания угол 45° . Найти объем параллелепипеда.

А 288 см^3 ; Б 384 см^3 ; В 96 см^3 ; Г $48\sqrt{3} \text{ см}^3$; Д Другой ответ.

8. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 5 см и 6 см, а диагональ - $\sqrt{65} \text{ см}$.

Найти площадь полной поверхности параллелепипеда

А 92 см^2 Б 44 см^2 В $30\sqrt{65} \text{ см}^2$ Г 60 см^2 Д 64 см^2

9. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см. Высота призмы равна 10 см. Площадь боковой поверхности призмы равна

А 180 см^2 Б 120 см^2 В 40 см^2 Г 17 см^2 Д Другой ответ.

10. Площадь полной поверхности тетраэдра равна $16\sqrt{3} \text{ см}^2$. Длина его ребра равна:

А $2\sqrt{2} \text{ см}$ Б 2 см В 4 см Г 8 см Д $4\sqrt{3} \text{ см}$.

11. Вычислить объем пирамиды, основание которой – квадрат с диагональю $3\sqrt{2} \text{ см}$, а высота пирамиды равна 12 см.

А 72 см^3 Б $36\sqrt{2} \text{ см}^3$ В 108 см^3 Г 36 см^3 Д Другой ответ.

12. Высота цилиндра равна 8 см, а радиус основания 7 см. Площадь осевого сечения цилиндра равна

А 56 см^2 Б $14\pi \text{ см}^2$ В 28 см^2 Г 112 см^2 Д Другой ответ.

13. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 8 см и образует с плоскостью основания цилиндра угол 30° . Найти площадь его основания.

А $48\pi \text{ см}^2$; Б $4\sqrt{3} \text{ см}^2$; В $12\pi \text{ см}^2$; Г $6\pi \text{ см}^2$; Д Другой ответ.

14. Объем цилиндра равен $1440\pi \text{ см}^3$. Найти диагональ осевого сечения цилиндра, если радиус его основания равен 12 см.

А 26 см Б 25 см В 10 см Г $12\pi \text{ см}$ Д Другой ответ.

15. Образующая конуса равна 13 см, а его высота равна 12 см. Найти площадь осевого сечения.

А 78 см^2 Б 60 см^2 В 30 см^2 Г 15 см^2 Д Другой ответ.

16. Объем косинуса, у которого площадь основания равна $330\pi \text{ см}^2$, а высота 6 см, равен

А $660\pi \text{ см}^3$ Б $220\pi \text{ см}^3$ В $440\pi \text{ см}^3$ Г $1320\pi \text{ см}^3$ Д $990\pi \text{ см}^3$.

17. Найти объем конуса, если длина окружности его основания равна $8\sqrt{\pi}$ см, а высота 6 см.

А $32\sqrt{\pi}$ см³ Б 48 см³ В $16\sqrt{\pi}$ см³ Г 32 см³

Д Другой ответ.

18. Как изменится площадь боковой поверхности конуса, если длину его образующей уменьшить в 3 раза, а радиус основания увеличить в 9 раз?

А увеличится в 3 раза; Б уменьшится в 3 раза; В не изменится;

Г увеличится в 9 раз; Д уменьшится в 9 раз.

19. Как изменится объем конуса, если радиус его основания уменьшить в 2 раза, а высоту увеличить в 2 раза?

А не изменится; Б увеличится в 2 раза; В уменьшится в 2 раза;

Г увеличится в 4 раза; Д уменьшится в 4 раза.

20. Радиус шара увеличили в 3 раза. Как при этом изменится площадь его поверхности?

А уменьшится в 9 раз; Б увеличится в 9 раз; В не изменится;

Г уменьшится в 3 раза; Д увеличится в 3 раза.

21. На каком расстоянии от центра сферы надо провести плоскость, чтобы радиус сечения был в 2 раза меньше радиуса сферы, равного $12\sqrt{3}$ см?

А $6\sqrt{3}$ см Б 9 см В 324 см Г 18 см Д Другой ответ.

22. Во сколько раз надо уменьшить радиус шара, чтобы его объем уменьшился в 5 раз?

А в 5 раз; Б в $\sqrt[3]{5}$ раз; в $\sqrt{5}$ раз; Г в 25 раз; Д другой ответ;

23. Объем шара равен 36π см³. Найти диаметр шара.

А 6 см Б 3 см В 27 см Г 18 см Д 36 см.

24. Осевое сечение конуса – правильный треугольник со стороной 4 см. Найти объем конуса.

А $8\sqrt{3}$ см³ Б $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ см³ В $\frac{8}{3}\sqrt{3}$ см³ Г $4\sqrt{3}$ см³ Д Другой ответ.

25. Найти отношение объемов двух шаров, радиусы которых равны 3 см и 6 см соответственно.

А 2 Б $\frac{1}{2}$ В 4 Г 8 Д $\frac{1}{8}$.

Библиографический список

1. Сборник задач по математике для поступающих во втузы. В 2 кн. Кн.2 Геометрия: Учеб. пособие /под ред. Сканави М.И. – 7 е изд., пераб. и доп.-М.: Высшая школа, 1995 – 368с.
2. Сборник заданий для государственной итоговой аттестации по математике Геометрия/под. ред. З.И. Слепкань – Харьков: «Гимназия», 2002-183с
3. Лурье М.В. Геометрия. Техника решения задач. Учебное пособие. – 3 е изд. стер. – Ростов на /Д: Феникс; М.: Издательский отдел УНЦ ДО, 2002 – 240с.
4. Будная Е.С. Внешнее оценивание(подготовка). Геометрия. 11 класс. Тесты для тематического оценивания /Е.С. Будная, С.Н. Будная. – Харьков: Веста: Издательство «Ранок», 2006 - 72 с.