

Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный технический университет

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
ДЛЯ ПОДГОТОВКИ
К ВНЕШНЕМУ НЕЗАВИСИМОМУ ОЦЕНИВАНИЮ
ПО МАТЕМАТИКЕ**

РАЗДЕЛ 4. ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

**Севастополь
2009**

Методические указания и контрольные задания для подготовки к внешнему независимому оцениванию по математике. Раздел 4. Геометрия на плоскости. / Сост. С.Г. Глеч. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2009. – 28 с.

Целью методических указаний является оказание помощи учащимся школ, лицеев и других учебных заведений в подготовке к внешнему независимому оцениванию и выполнении контрольных заданий по теме «Геометрия на плоскости».

Указания содержат необходимые теоретические сведения и формулы, примеры решения задач, задачи для самостоятельного решения, а также контрольные работы и тест.

Методические указания предназначены, прежде всего, учащимся средних учебных заведений и могут быть использованы для проведения занятий на подготовительных курсах, а также при самостоятельной подготовке к внешнему независимому оцениванию.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры «Высшая математика» 14 мая 2009 г., протокол № 9.

Допущено учебно-методическим центром и научно-методическим советом СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: Деркач М.И., доцент кафедры высшей математики.

СОДЕРЖАНИЕ

I. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И СООТНОШЕНИЯ ПЛАНИМЕТРИИ.....	4
II. ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ.....	8
III. СПИСОК ЗАДАЧ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.....	19
IV. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА.....	23
V.	
ТЕСТ.....	24
Библиографический список.....	28

I. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И СООТНОШЕНИЯ ПЛАНИМЕТРИИ

1. Произвольный треугольник (a, b, c – стороны; α, β, γ – противолежащие им углы).

Сумма внутренних углов равна 180° : $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

(рисунок 1).

Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не прилежащих к нему: $\alpha_1 = \beta + \gamma$.

Периметр: $P = 2p = a + b + c$ (p – полупериметр).

Теорема косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.

Теорема синусов: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$ (R – радиус описанной окружности).

Биссектриса делит сторону треугольника на отрезки, пропорциональные двум другим ее сторонам: $a_1 : b_1 = a : b$.

Длина биссектрисы:

$$\ell_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b} = \frac{2ab}{a+b} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Средняя линия параллельна основанию и равна половине основания: $EF = \frac{1}{2} AB$ (рисунок 2).

Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении

2:1, считая от вершины треугольника: $AK = \frac{2}{3} AF$.

Длина медианы: $m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$.

Высоты относятся друг к другу также, как обратные величины сторон, к которым они проведены $h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$.

Площадь треугольника равна полупроизведению любой стороны на высоту, проведенную к этой стороне: $S = \frac{1}{2} ah_a$ (h_a – высота, проведенная к стороне a);

или полупроизведению двух любых сторон на синус угла между ними:

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha; \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{формула Герона}),$$

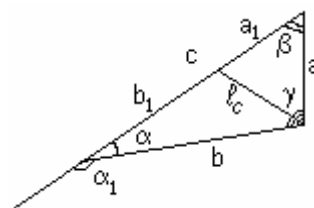


Рисунок 1

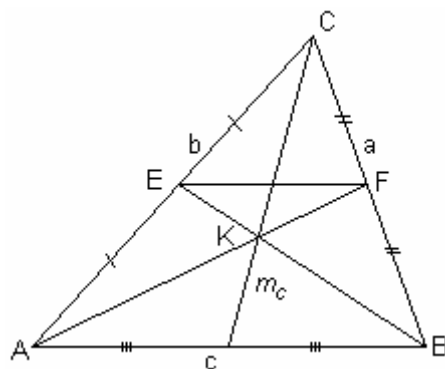


Рисунок 2

$$S = \frac{abc}{4R}, S = pr \quad (r - \text{радиус вписанной окружности}).$$

2. Прямоугольный треугольник (a, b – катеты; c – гипотенуза).

Если $\gamma = 90^\circ$, то $\alpha + \beta = 90^\circ$ (рисунок 3).

Теорема Пифагора: сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы $a^2 + b^2 = c^2$.

Высота, опущенная из вершины прямого угла, делит треугольник на два подобных прямоугольных треугольника, которые подобны исходному.

$$a^2 = c \cdot a_c; b^2 = c \cdot b_c; h_c^2 = a_c \cdot b_c$$

(a_c, b_c – проекции катетов на гипотенузу).

$$m_c = \frac{c}{2}; R = \frac{c}{2}; r = \frac{a+b-c}{2}; S = \frac{1}{2}ab; S = \frac{1}{2}ch_c.$$

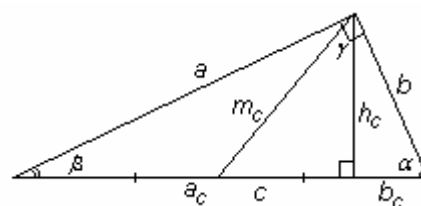


Рисунок 3

$$a = c \sin \alpha = c \cos \beta = b \tan \alpha = b \cot \beta.$$

3. Равнобедренный треугольник

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, а высота, опущенная из вершины, является также медианой и биссектрисой (рисунок 4).

$$h_b = m_b = l_b = \sqrt{a^2 - b^2/4}; \alpha = \frac{90^\circ - \beta}{2}; S = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}a^2 \sin \beta.$$

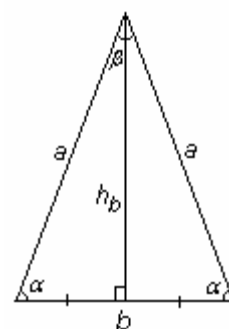


Рисунок 4

4. Равносторонний треугольник

В равностороннем треугольнике все внутренние углы равны между собой и равны по 60° .

$$h = m = l = \frac{a\sqrt{3}}{2}; r = \frac{a\sqrt{3}}{6}; R = \frac{a\sqrt{3}}{3}; R = 2r; S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

5. Произвольный выпуклый четырехугольник (d_1 и d_2 – диагонали; φ – угол между ними).

$$\text{Площадь: } S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi.$$

Если 4-угольник $ABCD$ вписан в окружность, то суммы противоположных углов равны между собой и равны по 180° : $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$.

Если 4-угольник $ABCD$ описан около окружности, то суммы противоположных сторон равны между собой: $AB + CD = BC + AD$.

6. Параллелограмм (a и b – смежные стороны; α – угол между ними; h_a – высота, проведенная к стороне a).

У параллелограмма противоположные стороны параллельны и равны между собой.

$$S = ah_a = ab \sin \alpha; \quad 2(a^2 + b^2) = d_1^2 + d_2^2.$$

7. Ромб

У ромба противоположные стороны параллельны и все равны между собой.

$$S = ah_a = a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2; \quad d_1^2 + d_2^2 = 4a^2.$$

9. Прямоугольник:

$$S = ab.$$

10. Квадрат:

$$S = a^2 = \frac{d^2}{2}.$$

11. Трапеция (a и b – основания; h – расстояние между ними; l – средняя линия).

Средняя линия трапеции равна полусумме оснований: $l = \frac{a+b}{2}$.

Площадь трапеции: $S = \frac{a+b}{2} h = lh$.

Площадь равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны $d_1 \perp d_2$, равна квадрату ее высоты: $S = h^2$, т.е. $l = h$.

Высота равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, является средним геометрическим ее оснований: $h^2 = a \cdot b$.

12. Описанный многоугольник (p – полупериметр; a_n – сторона правильного n -угольника; R – радиус описанной окружности; r – радиус вписанной окружности).

Сумма внутренних углов:

$$\angle A + \angle A_1 + \dots + \angle A_n = \pi(n-2) \quad (\text{рисунок 5}).$$

Сумма внешних углов: 2π .

Величина внутреннего угла: $\angle A_1 = \pi(n-2)/n$.

Величина внешнего угла: $\angle AOA_1 = \frac{2\pi}{n}$.

Сторона: $a_n = 2R_n \sin \frac{\pi}{n}$.

Взаимосвязь радиусов: $r_n = R_n \cos \frac{\pi}{n}$.

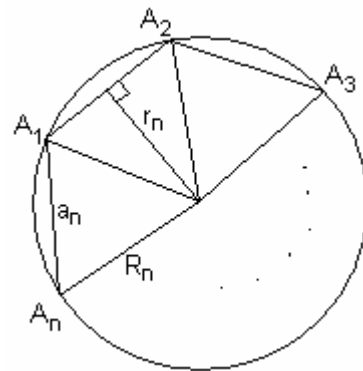


Рисунок 5

Площадь: $S_n = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{n} = nr^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} = \frac{na_n r}{2} = p_n r$ (p_n – полупериметр правильного n -угольника).

В частности, для правильного 6-угольника: $a_6 = R$; $S_6 = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$.

13. Окружность и круг

Центральный угол равен дуги на которую опирается: $\angle BOC = \overset{\smile}{BC}$ (рисунок 6).

Вписанный угол равен половине дуги, на которую опирается: $\angle BAC = \frac{1}{2} \overset{\smile}{BC}$.

Соотношения в круге:

$$\angle A = \angle C; \angle KAC = \frac{1}{2} \overset{\smile}{AC}.$$

Свойства хорд: $AS \times SB = TS \times SD$.

Свойства секущих: $MP^2 = PT \cdot PD$, где MP – касательная, M – точка касания.

Длина окружности: $l = 2\pi r$ (r – радиус).

Площадь круга: $S = \pi r^2$.

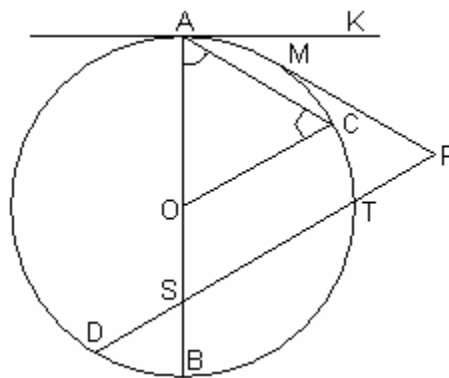


Рисунок 6

Длина дуги: $l_{\text{дуги}} = \frac{\pi n^\circ}{180^\circ} = r\alpha$ (n° – градусная мера дуги; α – радианная мера дуги).

Площадь сектора: $S_{\text{сек}} = \frac{\pi r^2 n^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2} r^2 \alpha$.

Площадь кругового сегмента, содержащего дугу n° : $S_{\text{сег}} = \frac{r^2}{2} \left(\frac{\pi n^\circ}{180^\circ} - \sin n^\circ \right)$.

II. ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

1. В треугольнике внутренние углы относятся как 2:3:5. Найти внешний угол треугольника, смежный с меньшим внутренним углом.

Решение.

Сумма внутренних углов треугольника равна 180° , пусть x – коэффициент пропорциональности, тогда

$2x + 3x + 5x = 180^\circ$ (рисунок 7), откуда $x = 18^\circ$. Значит

внешний угол треугольника, смежный с меньшим

внутренним углом равен $\gamma = 180^\circ - 2x = 180^\circ - 2 \cdot 18^\circ = 144^\circ$.

Ответ. 144° .

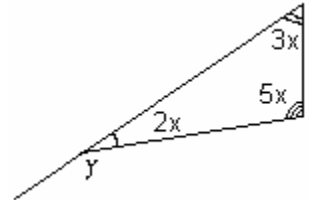


Рисунок 7

2. В треугольнике ABC две стороны, исходящие из вершины A равны 2 и 3 см, а два угла, не прилежащие к этой вершине, равны 20° и 40° . Найти квадрат стороны, противолежащей вершине A .

Решение.

По условию задачи $AC = 2$, $AB = 3$ (рисунок 8). Угол A равен

$180^\circ - 20^\circ - 40^\circ = 120^\circ$. Применим теорему косинусов для

стороны BC , противолежащей вершине A .

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos \angle A = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ = 4 + 9 - 12 \cdot (-1/2) = 19$$

(см).

Ответ. 19 (см).

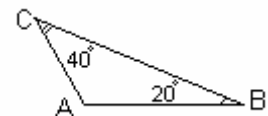


Рисунок 8

3. В треугольнике ABC проведена медиана AK , равная $\frac{13\sqrt{2}}{4}$ и составляющая со стороной AC угол 30° . Найти BC , если $\angle BCA = 45^\circ$.

Решение.

Воспользуемся теоремой синусов для треугольника AKC (рисунок 9).

$$\frac{AK}{\sin \angle ACK} = \frac{KC}{\sin \angle KAC}. \text{ Подставляя исходные данные, получим}$$

$$\frac{13\sqrt{2}/4}{\sin 30^\circ} = \frac{KC}{\sin 45^\circ}, \text{ т.е. } \frac{13\sqrt{2}/4}{1/2} = \frac{KC}{\sqrt{2}/2} \Rightarrow KC = 13/4.$$

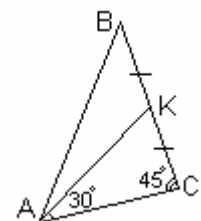


Рисунок 9

Т.к. AK - медиана, то $BC = 2 \cdot KC = 13/2$.

Ответ. $13/2$.

4. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки 5 см и 12 см. Найти катеты треугольника.

Решение:

В $\triangle ABC$ (рисунок 10) угол C прямой, E , F и D – точки касания вписанной окружности и соответствующих катетов и гипотенузы, $AD = 5$ см, $DB = 12$ см.

По свойству касательных к окружности, проведенных из одной точки

$AF = AD = 5$ см, $BE = BD = 12$ см, $FC = EC$.

Пусть $EC = x$, тогда по теореме Пифагора для $\triangle ABC$ можно записать

$$(5+x)^2 + (12+x)^2 = (5+12)^2, \quad x_1 = 3; \quad x_2 = -20 \text{ (не подходит)}.$$

Итак, $AC = 5 + 3 = 8$ см, $BC = 12 + 3 = 15$ см.

Ответ. 8 см, 15 см.

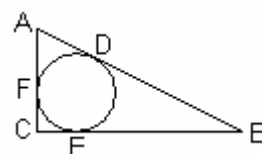


Рисунок 10

5. Найти длину основания равнобедренного треугольника, площадь которого равна 25 см^2 , а углы α при основании таковы, что $\operatorname{tg} \alpha = 4$.

Решение.

В треугольнике ABC (рисунок 11) $AB = BC$, $\angle A = \alpha$. Проведем из вершины B высоту BD . По свойству равнобедренного треугольника высота, опущенная из вершины, является также медианой, т.е. $AD = DC$. Обозначим $BD = h$, $AD = a$. Из прямоугольного треугольника ABD найдем тангенс $\angle A$:

$$\operatorname{tg} \angle A = \frac{BD}{AD} \text{ или}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{a}.$$

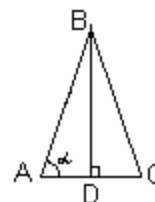


Рисунок 11

Найдем площадь треугольника ABC :

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} 2AD \cdot BD = \frac{1}{2} 2a \times h = ah.$$

Подставляя исходные данные, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{h}{a} = 4, \\ ah = 25, \end{cases}$$

$h = 4a$, $4a^2 = 25$, $a = 2,5$ или $a = -2,5$ (не подходит).

Таким образом, $AC = 2a = 5$ (см).

Ответ. 5 см.

6. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15 см, а проекция другого катета на гипотенузу равна 16 см. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник.

Решение.

В треугольнике ABC угол C – прямой (рисунок 12), $AC = 15$, $CD \perp AB$, $BD = 16$.

Высота CD , опущенная из вершины прямого угла, делит треугольник ABC на два подобных прямоугольных треугольника, которые подобны исходному.

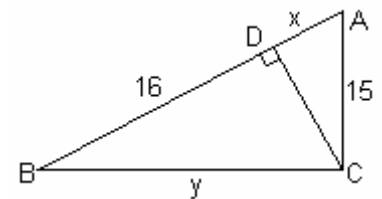


Рисунок 12

$$\triangle ADC \sim \triangle ACB \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}.$$

Обозначим $AD = x$, тогда, $AB = AD + DB = x + 16$.

Получаем $\frac{x}{15} = \frac{15}{x+16}$. Решив квадратное уравнение, найдем $x = 9$, т.е. $AD = 9$ (см)

$\Rightarrow AB = AD + DB = 9 + 16 = 25$ (см).

BC найдем по теореме Пифагора: $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$ (см).

Для вычисления радиуса вписанной окружности воспользуемся формулой

$$r = \frac{AC + BC - AB}{2} = \frac{15 + 20 - 25}{2} = 5 \text{ (см)}.$$

Ответ. 5 см.

7. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD и медиана AE ; стороны AB и AC равны 42 и 24, а отрезок $DE = 4,5$ (рисунок 13). Найти сторону BC .

Решение.

По свойству биссектрисы AD угла A имеем

пропорцию $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$. Обозначим через x длину

отрезков на которые делит медиана AE сторону BC , т.е. $CE = BE = x$, тогда $BD = x + DE$ и $CD = x - DE$. Подставляя числовые значения в пропорцию,

получим:

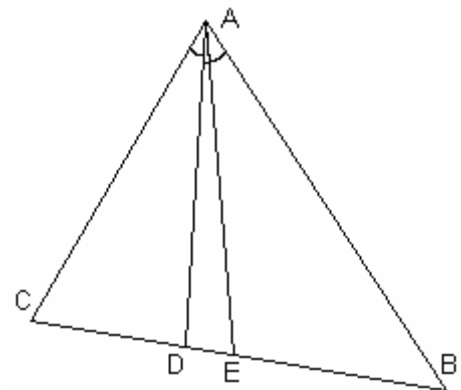


Рисунок 13

$$\frac{x+4,5}{x-4,5} = \frac{42}{24}, \text{ откуда } x=16,5.$$

$$\text{Сторона } BC = BE + CE = 2x = 33.$$

Ответ: 33.

8. В параллелограмме $ABCD$ $AB=10$; через точку пересечения диагоналей проведена прямая перпендикулярная к AD , которая пересекает сторону BC в точке E , а продолжение стороны AB в точке F , причем $BE=5$, $EC=15$ (рисунок 14). Найти BF .

Решение.

Для нахождения BF воспользуемся подобием треугольников AFG и BFE . Они подобны по двум углам: $\angle F$ – общий, $\angle G$ и $\angle E$ – прямые, т.к. $FG \perp AD$ по условию $\Rightarrow FG \perp BC$, т.к. $BC \parallel AD$, как противоположные стороны параллелограмма.

Из подобия запишем $\frac{AF}{BF} = \frac{AG}{BE}$, т.к.

$$AF = AB + BF, \text{ то } \frac{AB + BF}{BF} = \frac{AG}{BE}.$$

Разрешая пропорцию относительно BF ,

$$\text{получим: } BF = \frac{AB \cdot BE}{AG - BE}.$$

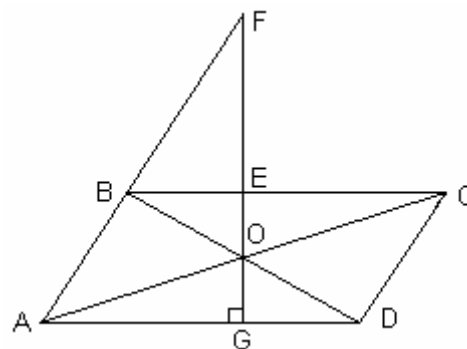


Рисунок 14

Отрезок AG найдем из равенства прямоугольных треугольников AOG и COE . Они равны, по гипотенузе $AO=OC$ (диагонали в параллелограмме точкой пересечения делятся пополам) и острому углу $\angle AOG = \angle COE$, как вертикальные. Из равенства треугольников имеем $AG=EC=15$. Теперь можем вычислить

$$BF = \frac{AB \cdot BE}{EC - BE} = \frac{10 \cdot 5}{15 - 5} = 5.$$

Ответ: 5.

9. Площадь параллелограмма равна 36, расстояния от точки пересечения диагоналей до сторон равны 2 и 3. Найти периметр параллелограмма.

Решение.

Пусть $ABCD$ – параллелограмм (рисунок 15). O – точка пересечения диагоналей AC и BD . Проведем через O высоты к сторонам параллелограмма, $OE = 2$, $OF = 3$ (по условию задачи).

Обозначим $AD = a$, $AB = b$, $FK = h_b$, $NE = h_a$.

Периметр параллелограмма вычисляется по формуле $p = 2(a + b)$. Чтобы найти стороны a и b воспользуемся формулой вычисления площади параллелограмма $S = ah_a = bh_b$,

$$\text{откуда } a = \frac{S}{h_a} \text{ и } b = \frac{S}{h_b}.$$

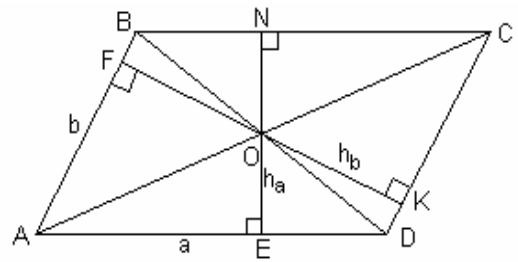


Рисунок 15

Треугольники AOD и BOC равные, так как $\angle AOD = \angle COB$, как вертикальные, $AO = OC$ и $BO = OD$ (диагонали в параллелограмме точкой пересечения делятся пополам), значит у них равны и высоты опущенные на соответствующие стороны, т.е. $h_a = 2 \times OE = 2 \times 2 = 4$.

Аналогично $h_b = 2 \times OF = 2 \times 3 = 6$.

$$\text{Итак } p = 2 \left(\frac{S}{h_a} + \frac{S}{h_b} \right) = 2 \left(\frac{36}{4} + \frac{36}{6} \right) = 30.$$

Ответ: 30.

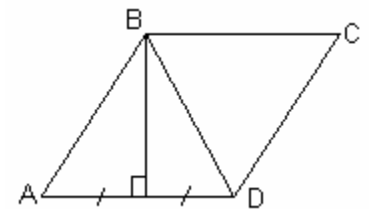


Рисунок 16

10. Найти тупой угол ромба, если высота, проведенная из его вершины, делит противоположную сторону пополам.

Решение.

Пусть $ABCD$ – ромб (рисунок 16). Рассмотрим треугольник ABD , т.к. высота, проведенная из вершины B , является медианой (делит противоположную сторону пополам по условию задачи), то этот треугольник – равнобедренный, с вершиной B . Следовательно, $AB = BD$. А $AB = AD$ как стороны ромба, значит треугольник ABD – равносторонний и все его углы равны по 60° . $\angle A + \angle ABC = 180^\circ$ по свойству смежных углов ромба. Значит, $\angle ABC = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Ответ: 120° .

11. Периметр ромба равен 8, острый угол – 30° . Найти радиус вписанной окружности.

Решение.

Пусть $ABCD$ – ромб, $\angle B = \alpha = 30^\circ$, периметр $P = 8$ (рисунок 17). Так как все стороны ромба равны, то $AB = \frac{P}{4} = \frac{8}{4} = 2$.

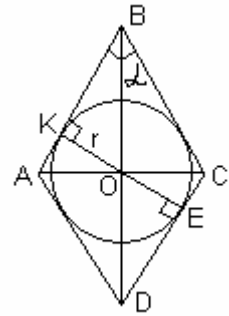


Рисунок 17

Проведем радиусы (r) вписанной в ромб окружности к точкам касания сторон AB и CD , они перпендикулярны этим сторонам; а значит KE , является высотой ромба и равняется

двум радиусам вписанной окружности $KE = 2 \cdot r$. Площадь ромба (S) можно найти по следующим формулам: $S = AB^2 \sin \alpha$, $S = AB \cdot KE$, $S = AB \cdot 2r$; откуда найдем

$$\text{радиус } r = \frac{AB \sin \alpha}{2}, \Rightarrow r = \frac{2 \sin 30^\circ}{2} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

12. Периметр ромба равен 40, диагонали относятся как 3:4. Найти высоту ромба.

Решение.

Пусть $ABCD$ – ромб, O – точка пересечения диагоналей, AK – высота, периметр $P = 40$ (рисунок 18). Так как все стороны ромба равны, значит $AB = \frac{P}{4} = \frac{40}{4} = 10$. Площадь ромба равна

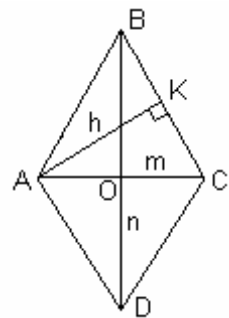


Рисунок 18

$S = ah = \frac{1}{2}mn$, где a – сторона ромба, h – высота, m и n –

диагонали, отсюда $h = \frac{mn}{2a}$.

По условию задачи $\frac{n}{m} = \frac{3}{4}$ или $n = \frac{3}{4}m$. Используя теорему Пифагора для

треугольника COD : $CD^2 = DO^2 + CO^2$, найдем m , $a^2 = \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2$,

$$a^2 = \frac{9}{64}m^2 + \frac{m^2}{4}, a^2 = \frac{25}{64}m^2, a = \frac{5}{8}m.$$

$$\text{Откуда } m = \frac{8}{5}a = \frac{8}{5} \cdot 10 = 16, n = \frac{3}{5}a = \frac{3}{5} \cdot 10 = 12.$$

$$\text{Теперь найдем высоту } h = \frac{16 \times 12}{2 \times 10} = 9,6.$$

Ответ: 9,6.

13. В равнобедренной трапеции большее основание равно 18, высота – 5, тупой угол – 135° . Найти среднюю линию трапеции.

Решение.

В трапеции $ABCD$: $AD = 18$, $\angle ABC = 135^\circ$, FG – средняя линия (рисунок 19). Проведем высоты из вершин B и C , $BK = CL = 5$. В результате получим прямоугольник $KBCL$, т.е. $BC = KL$. Отрезки AK и LD равны, т.к. трапеция равнобедренная.

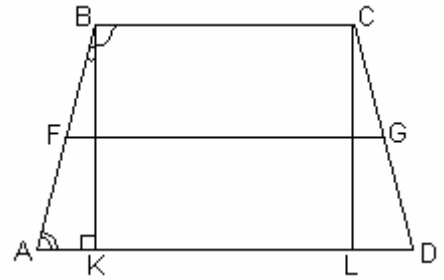


Рисунок 19

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABK , угол $\angle ABK = \angle ABC - \angle KBC = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ$, значит $\angle A = 45^\circ$, т.е. треугольник равнобедренный и $AK = BK = 5$, т.к. $AD = AK + KL + LD$, то $KL = AD - AK - LD = 18 - 5 - 5 = 8$ и $\Rightarrow BC = 8$.

Средняя линия трапеции равна половине суммы оснований:

$$FG = \frac{AD + BC}{2} = \frac{18 + 8}{2} = 13.$$

Ответ: 13.

14. Средняя линия равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна 68 см. Определить радиус этого круга, если нижнее основание трапеции больше верхнего на 64 см.

Решение.

На рисунке 20 $ABCD$ – трапеция, $AB = CD$ (по условию), $KN = 68$ – средняя линия, BE – высота. Диаметр вписанной в трапецию окружности равен ее высоте, а значит радиус – половине высоты.

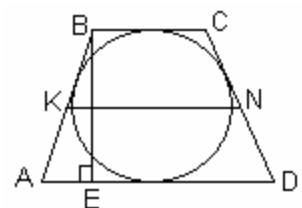


Рисунок 20

$$\frac{BC + AD}{2} = 68 \text{ по свойству средней линии трапеции.}$$

$$AD - BC = 64 \text{ по условию задачи.}$$

Решая эту систему уравнений, получаем $AD = 100$, $BC = 36$.

По свойству описанного четырехугольника $AB + CD = BC + AD$, так как $AB = CD$, то

$$AB = \frac{BC + AD}{2} = \frac{36 + 100}{2} = 68.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABE . Так как трапеция равнобедренная, то $AE = \frac{AD - BC}{2} = \frac{100 - 36}{2} = 32$. По теореме Пифагора, для $\triangle ABE$ имеем

$$AB^2 = AE^2 + BE^2. \text{ Отсюда } BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{68^2 - 32^2} = 60.$$

$$\text{Откуда находим } R = \frac{BE}{2} = \frac{60}{2} = 30.$$

Ответ. 30 см.

15. В равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, основания равны 3 и 5. Найти высоту.

Решение.

Пусть $ABCD$ – трапеция, $AD = 5$, $BC = 3$, $AB = CD$, $AC \perp BD$ по условию задачи (рисунок 21). Проведем высоту трапеции KL , проходящую через т. O – точку пересечения диагоналей. Требуется найти длину отрезка KL .

Так как трапеция равнобедренная, то и ее диагонали равны $AC = BD$, а значит, точкой пересечения, они делятся на равные отрезки: $AO = OD$ и $BO = OC$.

Рассмотрим $\triangle AOD$, он равнобедренный ($AO = OD$), OK является высотой, медианой и биссектрисой, т.е. $\angle AOD$ разделен пополам,

значит $\angle AOK = 45^\circ$. Рассмотрим треугольник AOK , он прямоугольный и равнобедренный $AK = OK$, т.к.

$$\angle AOK = \angle OAK = 45^\circ, \Rightarrow OK = AK = \frac{AD}{2} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Аналогично рассматривая треугольники BOC и BOL , получим $OL = 1,5$.

$$\text{Окончательно имеем } KL = OL + OK = 2,5 + 1,5 = 4.$$

Ответ: 4.

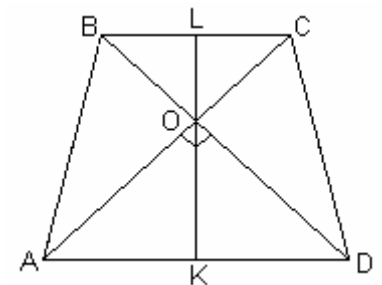


Рисунок 21

16. Найти площадь трапеции, у которой параллельные стороны равны 19 и 5, непараллельные – 13 и 15.

Решение.

В трапеции $ABCD$: $AD = 19$, $BC = 5$, $AB = 13$, $CD = 15$ (рисунок 22). Проведем высоты BE и CF .

Площадь (S) трапеции $ABCD$

$$S = \frac{AD + BC}{2} BE.$$

Приравняем квадраты высот (h) полученные из прямоугольных треугольников ABE и CDF $AB^2 - AE^2 = CD^2 - FD^2$. Кроме того имеем $AB + EF + FD = AD$, причем $EF = BC$, в результате получили два уравнения с двумя неизвестными AE и FD . Подставив известные данные, получим:

$$\begin{cases} 13^2 - AE^2 = 15^2 - FD^2, \\ AE + 5 + FD = 19, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} FD^2 - AE^2 = 56, \\ AE + FD = 14, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AE = 5, \\ FD = 9. \end{cases}$$

Теперь, зная AE , найдем BE из $\triangle ABE$: $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$; и

$$S = \frac{19 + 5}{2} \cdot 12 = 144.$$

Ответ: 144.

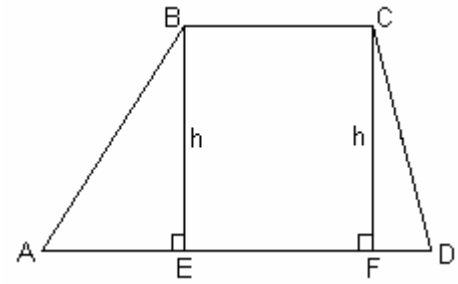


Рисунок 22

17. Центральный угол на 50° больше вписанного угла, опирающегося на ту же дугу. Найти, сколько градусов содержит дуга.

Решение.

Центральный угол $\angle AOB$ равен дуге $\overset{\frown}{AB}$, на которую опирается, а вписанный угол $\angle ACB$ равен половине дуги, на которую опирается: $\frac{1}{2} \overset{\frown}{AB}$ (рисунок 23). Так как по

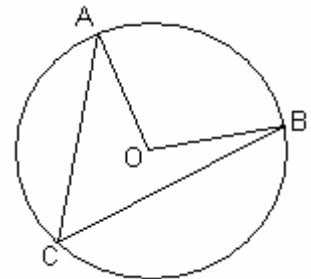


Рисунок 23

условию они опираются на одну и ту же дугу, то $\angle AOB = 2\angle ACB$. С другой стороны, по условию $\angle AOB = \angle ACB + 50^\circ$. Таким образом получаем систему

$$\begin{cases} \angle AOB = 2\angle ACB \\ \angle AOB = \angle ACB + 50^\circ \end{cases}$$

Решив систему, получим $\angle ACB = 50^\circ$; $\angle AOB = 100^\circ$, следовательно, дуга равна $\overset{\frown}{AB} = 100^\circ$.

Ответ: 100° .

18. Хорда пересекает диаметр под углом в 30° и делит его в точке пересечения на отрезки, равные 1 и 5. Найти расстояние от центра окружности до хорды.

Решение.

На рисунке 24 AB – диаметр, O – центр окружности, CD – хорда, по условию задачи $AE=5$ и $EB=1$, $\angle \alpha = 30^\circ$. Требуется найти расстояние OF . Рассмотрим прямоугольный треугольник OFE , OE – гипотенуза, тогда $OF = OE \cdot \sin \alpha$.

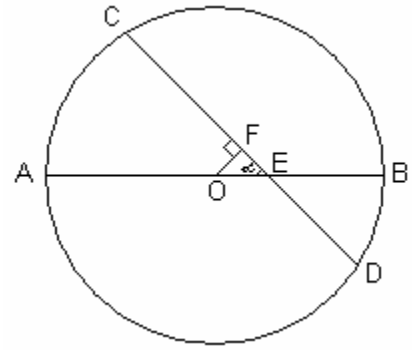


Рисунок 24

Половина диаметра равна

$$OB = \frac{AB}{2} = \frac{AE + EB}{2} = \frac{5 + 1}{2} = \frac{6}{2} = 3, \Rightarrow OE = OB - EB =$$

$$= 3 - 1 = 2, \text{ тогда } OF = 2 \sin 30^\circ = 1.$$

Ответ: 1.

19. В окружности по разные стороны от центра проведены параллельные хорды, равные 36 и 48; расстояние между ними 42. Найти радиус окружности.

Решение.

Пусть AB , CD – хорды, $AB \parallel CD$ по условию, O – центр окружности. Проведем перпендикуляр EF к хордам, проходящий через центр окружности (рисунок 25). По условию $AB = 36$, $CD = 48$, $EF = 42$.

Рассмотрим треугольники AOB и COD , они равнобедренные, т.к. $AO = OB = R$, $CO = OD = R$, где R – искомый радиус окружности. По свойству равнобедренного треугольника, высоты EO и OF , проведенные из вершины, являются также медианами и делят хорды AB и CD пополам: $BE = \frac{AB}{2} = 18$,

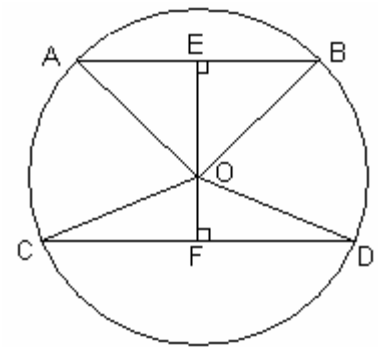


Рисунок 25

$$DF = \frac{CD}{2} = 24.$$

Рассмотрим два прямоугольных треугольника BEO и DFO . Применяя для них теорему Пифагора, получим $OE = \sqrt{OB^2 - BE^2} = \sqrt{R^2 - BE^2}$ и $OF = \sqrt{OD^2 - DF^2} = \sqrt{R^2 - DF^2}$. По условию задачи имеем $EF = OE + OF = 42$ и, тогда $\sqrt{R^2 - 18^2} + \sqrt{R^2 - 24^2} = 42$. Решая это иррациональное уравнение, получим $R = 30$.

Ответ: 30.

20. В круговой сектор, дуга которого содержит 60° , вписан круг. Найти отношение площади сектора к площади этого круга.

Решение.

На рисунке 26 A , B и C – точки касания вписанной в сектор окружности, O_1A – радиус круга проведенный в точку касания. Поэтому $O_1A \perp OA$. Аналогично $O_1B \perp OB$.

Треугольники $\triangle OBO_1 = \triangle OAO_1$ по трем сторонам (OO_1 – общая, $O_1A = O_1B$ – как радиусы, $OA = OB$ – как отрезки касательных, проведенных к окружности из общей т. O).

Следовательно, $\angle O_1OA = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$.

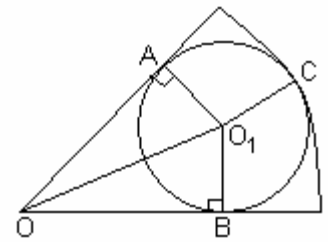


Рисунок 26

Из прямоугольного треугольника OO_1A имеем

$$O_1A = OO_1 \sin 30^\circ = 0,5 \cdot OO_1, \Rightarrow OO_1 = 2 \cdot O_1A.$$

Если обозначить радиус круга r , а радиус кругового сектора R , то $R = OC = OO_1 + O_1C = 2O_1A + O_1C = 3r$. Площадь круга $S_{кр} = \pi r^2$, площадь сектора

$$S_{сектора} = \frac{60^\circ}{360^\circ} \pi R^2 = \frac{1}{6} \pi (3r)^2 = \frac{3}{2} \pi r^2.$$

$$\frac{S_{сектора}}{S_{круга}} = \frac{\frac{3}{2} \pi r^2}{\pi r^2} = 1,5.$$

Ответ. 1,5.

21. Радиусы двух concentric окружностей равны 25 и 35. Найти площадь меньшей части кольца, заключенной между двумя радиусами большей окружности, угол между которыми равен 135° (принять $\pi=3,14$).

Решение.

На рисунке 27 O – центр окружности, $OA = OB = R = 35$, $OC = OD = r = 25$, угол $\alpha = 135^\circ$, по условию задачи.

Требуется найти площадь фигуры $ABCD$.

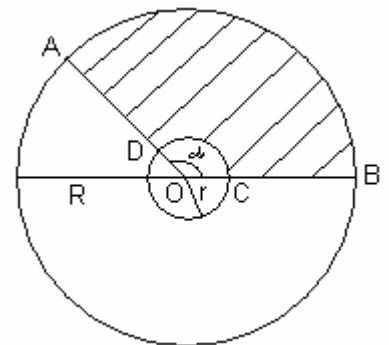


Рисунок 27

Обозначим S_1 – площадь сектора AOB и S_2 – площадь сектора COD , тогда площадь S части кольца $ABCD$ будет равна разности $S_1 - S_2$. Воспользовавшись

формулой для вычисления площади сектора, получим

$$S' = S_1 - S_2 = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} - \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ} = \frac{\pi \alpha}{360^\circ} (R^2 - r^2), \text{ где } R \text{ и } r \text{ соответственно радиусы большей и}$$

меньшей окружности, α – величина угла. Подставив числовые значения найдем S .

$$S = \frac{3,14 \times 135^\circ}{360^\circ} (35^2 - 25^2) = 706,5.$$

Ответ: 706,5.

22. Из точки A , не лежащей на окружности, проведены к ней касательная и секущая. Расстояние от точки A до точки касания равно 16 см, а до одной из точек пересечения секущей с окружностью равно 32 см. Найти радиус окружности, если секущая удалена от ее центра на 5 см.

Решение.

По условию $AP = 16$ см, $ON = 5$ см – расстояния от центра окружности до секущей AC (т. O – центр окружности) (рисунок 28), т.к. расстояние от точки A до одной из точек пересечения секущей с окружностью 32 см больше, чем от точки A до точки касания P , то, очевидно, это расстояние до дальней точки пересечения C , т.е. $AC = 32$ см. Воспользуемся свойством секущей и касательной, проведенных к окружности из одной точки:

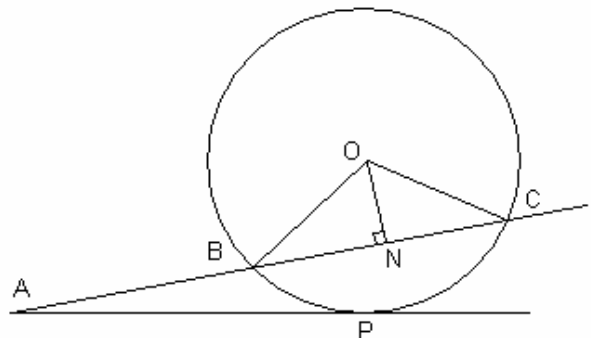


Рисунок 28

$$AP^2 = AB \cdot AC; \text{ откуда находим } AB: 16^2 = AB \cdot 32; \Rightarrow AB = 8 \text{ см.}$$

Значит хорда BC равняется $BC = AC - AB = 32 - 8 = 24$ см.

Теперь рассмотрим треугольник OBC , он равнобедренный, т.к. $OB = OC$ как радиусы. По свойству высоты ON , опущенная из вершины равнобедренного треугольника, она является также медианой, следовательно, $BN = NC = BC/2 = 24 / 2 = 12$ см.

Из треугольника OBN (он прямоугольный: $ON \perp BN$) находим радиус окружности по теореме Пифагора, $R = OB = \sqrt{ON^2 + BN^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ см.

Ответ: 13 см.

23. Найти площадь большего сегмента, отсекаемого основанием равнобедренного треугольника с углом 30° при основании, вписанного в окружность с радиусом $4\sqrt{3}$ см.

Решение.

Пусть ABC – данный вписанный треугольник, $AB = BC$ и $\angle BAC = 30^\circ$ по условию задачи, O – центр окружности (рисунок 29). Проведем радиусы к точкам A и B : $OA = OB = R = 4\sqrt{3}$.

У равнобедренного треугольника углы при основании равны, $\angle BAC = \angle ABC = 30^\circ$, следовательно, угол при его вершине равен $\angle C = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$.

Так как вписанный угол равен половине дуги, на которую опирается, то дуга $\overset{\frown}{A_N B} = 2 \cdot \angle C = 240^\circ$. Угол $\angle AOB_N = 240^\circ$, как центральный угол, опирающийся на свою дугу $\overset{\frown}{A_N B} = 240^\circ$, а, значит, на угол $\angle AOB$ приходится $\alpha = \angle AOB = 360^\circ - \angle AOB_N = 120^\circ$.

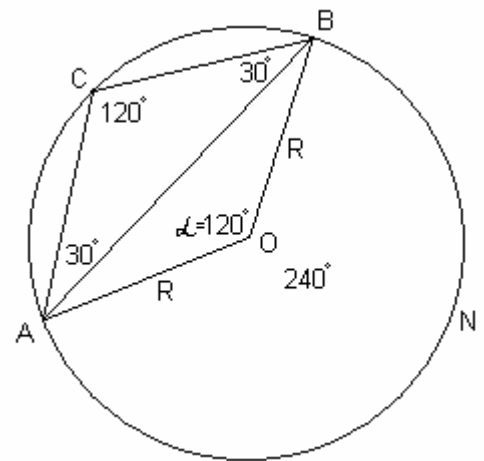


Рисунок 29

Площадь сегмента вычислим как сумму площадей сектора AOB_N и треугольника AOB :

$$S_{\text{сегмента}} = S_{\text{сектора}} + S_{\triangle AOB} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} + \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} R^2 \left(\frac{\pi \alpha}{180^\circ} + \sin \alpha \right) = \frac{1}{2} (4\sqrt{3})^2 \left(\frac{\pi 120^\circ}{180^\circ} + \sin 120^\circ \right) =$$

$$= 24 \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 16\pi + 12\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: $16\pi + 12\sqrt{3}$ (см²).

III. СПИСОК ЗАДАЧ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

В конце каждой задачи приведен ответ, задачи повышенной сложности помечены *.

треугольник

1. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$ см, а медиана боковой стороны 5 см. Найти длины боковых сторон. (Ответ: 6 см)

2. Найти длины сторон AB и AC треугольника ABC , если $BC=8$ см, а длины высот, проведенных на AC и BC , равны соответственно 6,4 и 4 см.

(Ответ: $\sqrt{41}$ и 6 см)

3. Определить острые углы прямоугольного треугольника, если медиана, проведенная к его гипотенузе, делит прямой угол в отношении 1:2.

(Ответ: 60° и 30°)

4. В треугольнике длины двух сторон составляют 6 и 3 см. Найти длину третьей стороны, если полусумма высот, проведенных к данным сторонам, равна третьей высоте. (Ответ: 4 см)

5. В прямоугольный треугольник вписана полуокружность так, что диаметр лежит на гипотенузе, а центр делит гипотенузу на отрезки длиной 15 и 20 см. Найти площадь треугольника и длину вписанной полуокружности.

(Ответ: 294 см^2 и $12\pi \text{ см}$)

6. В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равны соответственно 5 и 20 см. Найти биссектрису угла при основании треугольника.

(Ответ: 6 см)

7*. В равнобедренном треугольнике основание равно 16 см, а боковая сторона равна 10 см. Найти расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей. (Ответ: 5 см)

8*. Основание равнобедренного треугольника равно a , угол при вершине равен α . Найти длину биссектрисы, проведенной к боковой стороне.

(Ответ: $\frac{a \cos(\alpha / 2)}{\sin(45^\circ + 3\alpha / 4)}$)

9*. Площадь равнобедренного треугольника равна S , а противолежащий основанию угол между медианами, проведенными к его боковым сторонам, равен α . Найти основание. (Ответ: $2\sqrt{Stg(\alpha/2)/3}$)

квадрат

10. Дан квадрат, две ширины которого лежат на окружности радиуса R , две другие – на касательной к этой окружности. Найти длину диагонали квадрата. (Ответ: $1,6R\sqrt{2}$ см)

11. В квадрате, сторона которого a , середины двух смежных сторон соединены между собой и с противоположной вершиной квадрата. Найти площадь полученного треугольника. (Ответ: $3a^2/8$ см)

12. В квадрат вписан другой квадрат, вершины которого лежат на сторонах первого, а стороны составляют со сторонами первого квадрата углы в 60° . Какую часть площади данного квадрата составляет площадь вписанного? (Ответ: $4/(\sqrt{3}+1)^2$ см)

13*. Найти площадь квадрата, вписанного в правильный треугольник со стороной a . (Ответ: $3a^2(7-4\sqrt{3})$ см)

прямоугольник

14. В прямоугольнике проведены биссектрисы двух углов, прилежащих к большей стороне. Определить, на какие части делится площадь прямоугольника этими биссектрисами, если стороны прямоугольника равны 2 и 4 м. (Ответ: 2,2 и 4 м²)

параллелограмм

15. Величина одного из углов параллелограмма равна 60° , а меньшая диагональ $2\sqrt{31}$ см. Длина перпендикуляра, проведенного из точки пересечения диагоналей к большей стороне, равна $\frac{\sqrt{75}}{2}$ см. Найти длины сторон и большей диагонали параллелограмма. (Ответ: 12, 10 и $2\sqrt{91}$ см)

16. В параллелограмме $ABCD$ высота, проведенная из вершины B тупого угла на сторону DA , делит ее в отношении 5:3, считая от вершины D . Найти отношение $AC:BD$, если $AD:AB=2$. (Ответ: 2:1)

17*. Перпендикуляр, проведенный из вершины параллелограмма к его диагонали, делит эту диагональ на отрезки длиной 6 и 15 см. разность длин сторон параллелограмма равна 7 см. Найти длины сторон параллелограмма и его диагоналей. (Ответ: 10, 17, 21 и $\sqrt{337}$ см)

18*. В параллелограмме с периметром 32 см проведены диагонали. Разность между периметрами двух смежных треугольников равна 8 см. Найти длины сторон параллелограмма. (Ответ: 12 и 4 см)

трапеция

19. Найти диагональ и боковую сторону равнобедренной трапеции с основаниями 20 и 12 см, если известно, что центр описанной окружности лежит на большем основании трапеции. (Ответ: $8\sqrt{5}$ и $4\sqrt{5}$ см)

20. В равнобедренной трапеции даны основания $a=21$ см, $b=9$ см и высота $h=8$ см. Найти радиус описанного круга. (Ответ: 10, 625 см)

21*. Около окружности с диаметром 15 см описана равнобедренная трапеция с боковой стороной, равной 17 см. Найти основания трапеции. (Ответ: 9 и 25 см)

22. Прямые, содержащие боковые стороны равнобедренной трапеции, пересекаются под прямым углом. Найти длины сторон трапеции, если ее площадь равна 12 см^2 , а длина высоты равна 2 см. (Ответ: 4, 8, $2\sqrt{2}$ и $2\sqrt{2}$ см)

23. Один из углов трапеции равен 30° , а прямые, содержащие боковые стороны трапеции, пересекаются под прямым углом. Найти длину меньшей боковой стороны трапеции, если ее средняя линия равна 10 см, а одно из оснований 8 см. (Ответ: 2 см)

24. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны. Найти длину большего основания трапеции, если ее меньшее основание равно 1, а площадь трапеции равна 9. (Ответ: 5)

25. Найти длины боковой стороны и диагонали равнобедренной трапеции с основаниями 20 и 12 см, если известно, что центр описанной окружности лежит на большем основании трапеции. (Ответ: $4\sqrt{5}$ и $8\sqrt{5}$ см)

26. В равнобедренную трапецию вписана окружность радиуса R . Верхнее основание трапеции в два раза меньше ее высоты. Найти площадь трапеции. (Ответ: $5R^2$)

27*. В равнобедренной трапеции длина средней линии равна 5, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции. (Ответ: 25)

28*. На меньшем основании равнобедренной трапеции построен правильный треугольник. Его высота равна высоте трапеции, а площадь в 5 раз меньше площади трапеции. Найти угол при большем основании трапеции. (Ответ: 30°)

ромб

29. Периметр ромба равен 2 м, длины его диагоналей относятся как 3:4. Найти площадь ромба. (Ответ: $0,24 \text{ м}^2$)

30. Высота ромба равна 12 см, а одна из его диагоналей равна 15 см. Найти площадь ромба. (Ответ: 150 см^2)

окружность

31. Через точку M , лежащую в круге, проведены диаметр и хорда, угол между которыми равен $\frac{\pi}{4}$. Расстояние от центра круга до хорды равно 4. Точка M разбивает хорду на 2 отрезка. Длина меньшего равна 4. Найти длину хорды.

(Ответ: 8)

32. Из одной точки проведены к окружности две касательные. Длина каждой касательной 12 см, а расстояние между точками касания 14,4 см. Определить радиус окружности. (Ответ: 9 см)

33*. Расстояние от центра круга до хорды длиной 16 см равно 15 см. Найти площадь треугольника, описанного около круга, если периметр треугольника равен 200 см. (Ответ: 1700 см^2)

34*. Дуга AB сектора AOB содержит α радианов. Через точку B и середину C радиуса OA проведена прямая. В каком отношении она делит площадь сектора?

(Ответ: $\frac{\sin \alpha}{2\alpha - \sin \alpha}$)

35. В сектор радиуса R вписана окружность радиуса r . Найти периметр сектора. (Ответ: $2R\left(1 + \arcsin \frac{r}{R-r}\right)$)

36. Радиус дуги сектора равен R , центральный угол AOB равен α . Через середину C радиуса OA проведена прямая, параллельная радиусу OB и пересекающая дугу AB в точке D . Найти площадь треугольника OCD .

$$(\text{Ответ: } \frac{R^2 \sin \alpha}{8} (\sqrt{4 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha))$$

37. Радиус дуги сектора AOB равен R , центральный угол AOB равен α . В этот сектор вписан правильный треугольник так, что одна его вершина совпадает с серединой дуги AB , а две другие вершины лежат соответственно на радиусах OA и OB . Найти стороны треугольника.

$$(\text{Ответ: } \frac{R \sin(\alpha/2)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right)})$$

МНОГОУГОЛЬНИК

38. Около квадрата, сторона которого равна a , описана окружность, а около окружности – правильный шестиугольник. Определить площадь шестиугольника.

$$(\text{Ответ: } a^2 \sqrt{3} \text{ см})$$

39. В правильный шестиугольник, сторона которого равна a , вписана окружность, и около него же описана окружность. Определить площадь кругового кольца, заключенного между этими окружностями.

$$(\text{Ответ: } \pi a^2/4 \text{ см})$$

Смешанные

40*. В пересечение двух равных кругов вписан ромб с диагоналями 12 и 6 см. Найти радиус окружностей.

$$(\text{Ответ: } 7,5 \text{ см})$$

41*. К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 12 см и высотой 8 см, проведена касательная, параллельная основанию. Найти длину отрезка этой касательной, заключенного между сторонами треугольника.

$$(\text{Ответ: } 3 \text{ см})$$

42. В прямоугольный треугольник с углом 60° вписан ромб со стороной, равной 6 см, так, что угол в 60° у них общий и все вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найти стороны треугольника.

$$(\text{Ответ: } 9, 9\sqrt{3} \text{ и } 18 \text{ см})$$

43*. В ромб с острым углом 30° вписан круг, а в круг – квадрат. Найти отношение площади ромба к площади квадрата.

$$(\text{Ответ: } 4)$$

IV. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

1. В равнобедренный треугольник с углом 120° при вершине и боковой стороной 3 вписана окружность. Найти радиус этой окружности.

(Ответ: $3\sqrt{3}(2-\sqrt{3})/2$)

2. В равнобедренном треугольнике основание равно 16 см, а боковая сторона равна 10 см. Найти радиусы вписанной и описанной окружностей.

(Ответ: $8/3$; $25/3$)

3. На сторонах квадрата вне его построены правильные треугольники, и их вершины последовательно соединены. Определить отношение периметра полученного четырехугольника к периметру данного квадрата.

(Ответ: $(\sqrt{6} + \sqrt{2})/2$)

4. Площадь прямоугольника равна 9 см^2 , а величина одного из углов, образованного диагоналями, равна 120° . Найти стороны прямоугольника.

(Ответ: $3\sqrt[4]{3}$ и $\sqrt[4]{27}$ см)

5. Периметр параллелограмма равен 90 см и острый угол содержит 60° . Диагональ параллелограмма делит его тупой угол на части в отношении 1:3. Найти стороны параллелограмма.

(Ответ: 15 и 30 см)

6. Длины параллельных сторон трапеции равны 25 и 4 см, а длины непараллельных сторон – 20 и 13 см. Найти высоту трапеции.

(Ответ: 12 см)

7. Диагональ прямоугольной трапеции и ее боковая сторона равны. Найти длину средней линии, если высота трапеции равна 2 см, а боковая сторона 4 см.

(Ответ: $3\sqrt{3}$ см)

8. Хорда окружности равна 10 см. Через один конец хорды проведена касательная к окружности, а через другой – секущая, параллельная касательной. Определить радиус окружности, если внутренний отрезок секущей равен 12 см.

(Ответ: 6,25 см)

9. В сектор AOB с радиусом R и углом 90° вписана окружность, касающаяся отрезков OA , OB и дуги AB . Найти радиус окружности.

(Ответ: $R(\sqrt{2}-1)$ см)

10. Вычислить отношение площадей квадрата, правильного треугольника и правильного шестиугольника, вписанных в одну и ту же окружность.

(Ответ: $8:3\sqrt{3}:6\sqrt{3}$)

Замечание: Полное и правильное решение каждой задачи оценивается в 10 баллов. Таким образом, максимальное количество баллов, которое можно получить за контрольную работу, равно 100.

V. ТЕСТ

Тестовые задания имеют по четыре варианта ответов, только ОДИН из которых ПРАВИЛЬНЫЙ. Выберите, по вашему мнению, правильный ответ и отметьте его.

1. Найдите величины углов равнобокой трапеции, если один из них в два раза больше другого.

A	B	C	D
$30^\circ; 60^\circ; 60^\circ; 30^\circ$	$45^\circ; 90^\circ; 90^\circ; 45^\circ$	$60^\circ; 120^\circ; 120^\circ; 60^\circ$	$80^\circ; 160^\circ; 160^\circ; 80^\circ$

2. Найдите площадь треугольника, длины сторон которого 5, 7 и 8 см.

A	B	C	D
$10\sqrt{3} \text{ см}^2$	$10\sqrt{13} \text{ см}^2$	$60\sqrt{3} \text{ см}^2$	$60\sqrt{13} \text{ см}^2$

3. В окружности, радиус которой 13 см, на расстоянии 5 см от центра проведена хорда. Найдите длину этой хорды.

A	B	C	D
8 см	12 см	16 см	24 см

4. Известно, что треугольник ABC подобен треугольнику MKE , $AB=6$ см, $BC=12$ см, $MK=3$ см, $ME=8$ см. Найдите длины сторон AC и KE .

A	B	C	D
6 см, 16 см	14 см, 24 см	16 см, 6 см	24 см, 14 см

5. В треугольнике ABC $\angle B = 45^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $BC = 16$ см. Найдите длину стороны AC .

A	B	C	D
$\frac{16}{\sqrt{2}}$ см	$16\sqrt{\frac{2}{3}}$ см	$16\sqrt{\frac{3}{2}}$ см	$16\sqrt{2}$ см

6. В равнобедренном треугольнике MKE ($MK = KE$) биссектриса угла E пересекает сторону MK в точке C . Найдите углы треугольника MKE , если $\angle KCE = 126^\circ$.

A	B	C	D
$12^\circ; 84^\circ; 84^\circ$	$24^\circ; 60^\circ; 60^\circ$	$32^\circ; 74^\circ; 74^\circ$	$54^\circ; 63^\circ; 63^\circ$

7. Радиусы двух непересекающихся окружностей равны 10 и 2 см, а длина их общей внешней касательной 15 см. Найдите расстояние между центрами окружностей.

A	B	C	D
13 см	15 см	17 см	24 см

8. Длина стороны ромба равна a , а величина острого угла α . Найдите длины диагоналей ромба.

A	B	C	D
$2a \sin \frac{\alpha}{2}, 2a \cos \frac{\alpha}{2}$	$2a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, 2a \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$	$2a \sin \alpha, 2a \cos \alpha$	$2a \operatorname{tg} \alpha, 2a \operatorname{ctg} \alpha$

9. В окружности проведены хорды AK и BM , которые пересекаются в точке E . Найдите длину хорды KM , если $AB = 4$ см, $BE = 2$ см, $KE = 8$ см.

A	B	C	D
6 см	10 см	12 см	16 см

10. Найдите площадь параллелограмма, длины сторон которого 5 и 13 см, а один из диагоналей перпендикулярен стороне.

A	B	C	D
25 см^2	30 см^2	60 см^2	65 см^2

11. Периметр прямоугольного треугольника равен 24 см, а радиус вписанной окружности – 2 см. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.

A	B	C	D
3 см	5 см	7 см	10 см

2. Биссектриса, проведенная из вершины прямоугольника, делит его диагональ на отрезки 15 см и 20 см. Определите площадь прямоугольника.

A	B	C	D
224 см^2	386 см^2	400 см^2	588 см^2

13. Какой из приведенных наборов отрезков и углов может определять некоторый треугольник ABC .

A	B	C	D
$AB = 3,$ $BC = 5,$ $\angle ABC = 105^\circ$	$AB = 5,$ $BC = 7,$ $AC = 14$	$AB = 10,$ $\angle ABC = 88^\circ,$ $\angle CAB = 95^\circ$	$AB = 2,$ $BC = 1,$ $\angle ABC = 1^\circ$

14. Стороны треугольника равны 1, 4 и $\sqrt{17}$. Найдите наибольший из углов треугольника.

A	B	C	D
60°	75°	90°	100°

15. Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 10 км. Найдите радиус круга, описанного около этого треугольника, если угол A равен 30° .

A	B	C	D
$\frac{20}{\sqrt{2}} \text{ км}$	$\frac{10}{\sqrt{2}} \text{ км}$	$\frac{20}{\sqrt{3}} \text{ км}$	$\frac{10}{\sqrt{3}} \text{ км}$

16. Треугольник ABC – равносторонний со стороной 12. Точки P, S, R середины сторон AB, BC и AC соответственно. Найдите радиус круга, который проходит через эти точки.

A	B	C	D
$2\sqrt{2}$	$3\sqrt{3}$	4	$2\sqrt{3}$

17. Треугольник ABC имеет площадь 1. Стороны AC и BC делятся точками P, Q и R, S на три равные части соответственно, т.е. $AP=PQ=QC$ и $BR=RS=SC$. Вычислите площадь четырехугольника $APRB$.

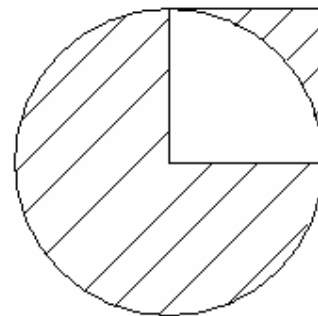
A	B	C	D
$1/3$	$4/9$	$5/9$	$2/3$

18. Продолжение боковых сторон KL и MP трапеции $KLMP$ пересекаются в точке S . Найдите KL , если $KS=20$, а $KP:LM = 5 : 2$.

A	B	C	D
21	18	15	12

19. Две вершины квадрата лежат на круге, а третья совпадает с центром круга. Найдите площадь заштрихованной фигуры, если радиус круга равен 4.

A	B	C	D
$16\pi - 16$	12π	$12\pi + 4$	$8\pi + 4$



20. Большая высота параллелограмма совпадает с меньшей его диагональю и равна 6. Найдите меньшую высоту параллелограмма, если его меньшая сторона равна 2,5.

A	B	C	D
$35/17$	2	3	$30/13$

21. Углы выпуклого пятиугольника образуют арифметическую прогрессию с целой разностью. Тогда наименьший угол этого пятиугольника может равняться ...

A	B	C	D
69°	85°	45°	38°

22. Квадрат и правильный шестиугольник вписаны в один круг. Тогда отношение площади квадрата к площади шестиугольника равняется ...

A	B	C	D
$4:3\sqrt{3}$	$3:4\sqrt{2}$	$5:3\sqrt{6}$	$3:4\sqrt{5}$

23. Расстояние по прямой между точками с отметками 5 и 9 на циферблате часов равно $\sqrt{6}$. Найдите длину минутной стрелки, если она является радиусом круга (циферблата часов).

A	B	C	D
$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$	$3\sqrt{3}$

24. Точка S лежит вне круга с центром в точке O . Из этой точки к данному кругу проведена секущая SO , которая пересекает круг в точках A и B , и касательную, которая касается круга в точке C . Точка A принадлежит отрезку SB . Найдите длину отрезка SC , если $SA = 10$, а радиус круга $R = 5$.

A	B	C	D
20	$10\sqrt{6}$	$10\sqrt{3}$	$10\sqrt{2}$

Библиографический список

1. Захарійченко Ю.О. Математика: Зб. тест. завдань для підготовк. до зовніш. незалеж. оцінювання / Ю.О. Захарійченко, О.В. Шкільний. – К.: Генеза, 2008. – 104 с.
2. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы: учеб. Пособие / под ред. Сканава М.И. – 3-е издание дополненное. М.: Высшая школа, 1978. – 519 .
3. Математика. Типовые тестовые задания. Сборник / А.Р. Гальперина, Е.Я. Михеева: Учеб. пособ. – Х.: Факт, 2008. – 128 с.
4. Готовимся к экзамену по математике. Пособие для поступающих в ВУЗ / под ред. Максимова И.И. – Кривой Рог: Городская типография, 1992. – 206 с.
5. Система тренировочных задач и упражнений по математике / А.Я. Симонов, Д.С. Бакаев, А.Г. Эпельман и др. – М.: Просвещение, 1991. – 208 с.