

Министерство образования и науки Украины  
Севастопольский национальный технический университет



## ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Методические указания и варианты контрольных заданий по теме модуля в дисциплине «Высшая математика» для студентов технических специальностей



Севастополь  
2009

УДК 517(075.8)

Плоскость и прямая в пространстве. Методические указания и варианты контрольных заданий по теме модуля в дисциплине «Высшая математика» для студентов технических специальностей/ Сост.: Е.Г. Бойко, Е.Н. Ларионова, С.Ф. Ледяев – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2009.-20 с.

Целью методических указаний является оказание помощи студентам технических специальностей в выполнении модульной работы по разделу «Аналитическая геометрия в пространстве. Плоскость и прямая в пространстве».

Разработан комплекс заданий для работы студентов по теме модуля. Каждое практическое задание содержит 30 вариантов. В большинстве практических задач указаны ответы. Приведен пример выполнения задач с достаточно полными пояснениями.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры высшей математики, протокол №1 от 10 сентября 2009 года.

Допущено учебно-методическим центром СевНТУ в качестве методических указаний.

Рецензент: ст. преподаватель кафедры высшей математики  
Быкова В.П.

## СОДЕРЖАНИЕ

|     |                                                               |    |
|-----|---------------------------------------------------------------|----|
| 1 . | Задания по теме «Плоскость и прямая в пространстве» . . . . . | 3  |
| 2 . | Уравнения плоскости в пространстве . . . . .                  | 12 |
| 3 . | Уравнения прямой линии в пространстве . . . . .               | 14 |
| 4 . | Указания к выполнению заданий и примеры решения . . . . .     | 16 |

## Задания по теме «Плоскость и прямая в пространстве»

### Задание №1.

- 1.1. Записать общее уравнение плоскости, параллельной плоскости  $xOy$  и содержащей точку  $A(1; 2; -4)$ .
- 1.2. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку  $A(2; 1; -1)$  и образующую на осях  $Ox$  и  $Oz$  отрезки, равные соответственно 2 и 1.
- 1.3. Найти уравнение плоскости, зная, что точки  $A(4; 0; -3)$  и  $B(1; -5; 2)$  симметричны относительно этой плоскости.
- 1.4. Подвижная точка, имеющая начальное положение  $A_0(5; -1; 2)$ , перемещается параллельно оси ординат. Найти координаты точки её встречи с плоскостью  $x - 2y - 3z + 7 = 0$ .
- 1.5. Найти объём пирамиды, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью  $3x - 5y - 6z + 4 = 0$ .
- 1.6. Дана точка  $A(-3; 4; 8)$ . Построить плоскость, проходящую через эту точку параллельно плоскости  $2x - 3y + z = 0$ .
- 1.7. Доказать, что три плоскости  $5x + 8y - z - 7 = 0$ ,  $x + 2y + 3z - 1 = 0$ ,  $2x - 8y + 2z - 9 = 0$  имеют единственную общую точку.
- 1.8. Найти уравнения линий пересечения плоскости  $3x + 2y - 4z + 2 = 0$  с координатными плоскостями.
- 1.9. Дана точка  $A_0(3; 2; 6)$ . Найти точку её встречи с плоскостью  $3x + y - 5z + 21 = 0$  при движении по прямой, параллельно оси абсцисс.
- 1.10. Найти уравнение плоскости, зная, что точки  $A(2; 3; -5)$  и  $B(3; 4; 1)$  симметричны относительно этой плоскости.
- 1.11. Найти уравнения линий пересечения плоскости  $5x + 2y - 3z - 10 = 0$  с координатными плоскостями.
- 1.12. Подвижная точка, имеющая начальное положение  $A_0(2; 1; 3)$ , перемещается параллельно оси аппликат. Найти координаты точки её встречи с плоскостью  $2x - 3y + z - 2 = 0$ .

- 1.13. Доказать, что три плоскости  $5x + 3y + 10z + 30 = 0$ ,  $4x - 5y + 10z + 20 = 0$ ,  $6x + 11y + 30z = 0$  имеют единственную общую точку.
- 1.14. Составить уравнения плоскостей, которые проходят через точку  $A_0(2;3;1)$  и отсекают на координатных осях отрезки одинаковой длины.
- 1.15. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(3;-2;7)$  параллельно плоскости  $2x - 3z + 5 = 0$ .
- 1.16. Найти уравнения линий пересечения плоскости  $5x - 6y + 3z - 1 = 0$  с координатными плоскостями.
- 1.17. Найти уравнение плоскости, проходящей через ось аппликат и через точку  $A_0(-3;2;2)$ .
- 1.18. Написать уравнение плоскости, отсекающей на осях аппликат и абсцисс отрезки, равные соответственно 3 и 2, если точка  $C(1;2;-0,6)$  принадлежит плоскости.
- 1.19. Плоскость проходит через точку  $C(2;-2;2)$  и отсекает на оси абсцисс отрезок -2, на оси аппликат отрезок 2. Составить уравнение плоскости.
- 1.20. Найти уравнение плоскости, зная, что точки  $A(1;0;3)$  и  $B(2;1;-4)$  симметричны относительно этой плоскости.
- 1.21. Найти уравнение плоскости, проходящей через ось абсцисс и через точку  $A_0(2;1;-3)$ .
- 1.22. Составить уравнения плоскостей, которые проходят через точку  $M_0(2;-3;3)$  параллельно координатным плоскостям.
- 1.23. Вычислить площадь треугольника, отсекаемого плоскостью  $2x - 3y + 5z - 30 = 0$  от координатного угла  $xOy$ .
- 1.24. Найти объём пирамиды, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью  $2x + 3y - 3z + 6 = 0$ . Построить пирамиду.
- 1.25. Составить уравнения плоскостей, которые проходят через точку  $A_0(4;3;2)$  и отсекают на координатных осях отрезки одинаковой длины.

- 1.26. Плоскость проходит через точку  $M(6; -10; 1)$  и отсекает на оси абсцисс отрезок  $-3$ , на оси аппликат отрезок  $2$ . Составить уравнение плоскости «в отрезках».
- 1.27. Плоскость проходит через точки  $A(1; 2; -1)$  и  $B(-3; 2; 1)$  и отсекает на оси ординат отрезок, равный трём единицам длины. Найти уравнение плоскости.
- 1.28. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $A_0(3; -1; 2)$  параллельно плоскости  $2x - y + 3z - 1 = 0$ .
- 1.29. Точка  $A_0(2; -1; 2)$  - основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Записать уравнение плоскости.
- 1.30. Даны две точки  $A(1; 3; -2)$  и  $B(7; -4; 4)$ . Через точку  $B$  проходит плоскость, перпендикулярно отрезку  $AB$ . Записать уравнение плоскости.

### Задание №2.

2.1 – 2.10. Вычислить косинус угла между плоскостями.

- 2.1.  $2x - y + 2z + 15 = 0$ ,  $6x + 2y - 3z - 1 = 0$ .
- 2.2.  $6x + 2y - 4z + 5 = 0$ ,  $9x + 3y - 6z - 2 = 0$ .
- 2.3.  $x + 2y - z = 0$ ,  $2x + y + 4z + 3 = 0$ .
- 2.4.  $x + y - 1 = 0$ ,  $2x - y + \sqrt{3}z + 1 = 0$ .
- 2.5.  $5x - 3y + 4z - 4 = 0$ ,  $3x - 4y - 2z + 5 = 0$ .
- 2.6.  $5x - 3y + 5z + 5 = 0$ ,  $x - 2y + 3z - 5 = 0$ .
- 2.7.  $x - y + \sqrt{2}z - 5 = 0$ ,  $xOz$ .
- 2.8.  $4x - 5y + 3z - 1 = 0$ ,  $x - 4y - z + 9 = 0$ .
- 2.9.  $3x - y + 2z + 15 = 0$ ,  $5x + 9y - 3z - 1 = 0$ .
- 2.10.  $6x + 2y - 4z + 17 = 0$ ,  $9x - 3y - 6z - 4 = 0$ .

2.11 – 2.20. Определить, при каких значениях  $p$ ,  $m$  следующие уравнения будут определять параллельные плоскости.

2.11.  $2x + py + 3z - 5 = 0$ ,  $mx - 6y - 6z + 2 = 0$ .

2.12.  $3x - y + pz - 9 = 0$ ,  $2x + my + 2z - 3 = 0$ .

2.13.  $mx + 3y - 2z - 1 = 0$ ,  $2x - 5y - pz - 1 = 0$ .

2.14.  $mx - y + 2z + 5 = 0$ ,  $x + py - 6z - 1 = 0$ .

2.15.  $x + py + z - 1 = 0$ ,  $mx - 5y - z + 3 = 0$ .

2.16.  $16x + 12y + pz - 1 = 0$ ,  $3x + my - 6z + 5 = 0$ .

2.17.  $8x + py + 3z - 5 = 0$ ,  $mx - 6y - 9z + 2 = 0$ .

2.18.  $x - y + pz - 9 = 0$ ,  $2x + my + 5z - 3 = 0$ .

2.19.  $x + my - 2z - 1 = 0$ ,  $2x - 5y - pz - 1 = 0$ .

2.20.  $3x - y + mz + 5 = 0$ ,  $x + py - 6z - 1 = 0$ .

2.21 – 2.30. Определить, при каком значении  $m$  следующие пары уравнений будут определять перпендикулярные плоскости.

2.21.  $3x - 5y + mz - 3 = 0$ ,  $x + 3y + 2z + 5 = 0$ .

2.22.  $6x + 2y - 4z + 5 = 0$ ,  $mx + 3y - 6z - 2 = 0$ .

2.23.  $x + 2y - mz = 0$ ,  $2x + y + 4z + 3 = 0$ .

2.24.  $x + y - 1 = 0$ ,  $2x - y + mz + 1 = 0$ .

2.25.  $mx - 3y + 4z - 4 = 0$ ,  $3x - 4y - 2z + 5 = 0$ .

2.26.  $5x - 3y + 5z + 5 = 0$ ,  $x + my + 3z - 5 = 0$ .

2.27.  $x - y + z - 5 = 0$ ,  $mx - 6y - 9z + 2 = 0$ .

2.28.  $4x - my + 3z - 1 = 0$ ,  $x - 4y - z + 9 = 0$ .

2.29.  $3x - y + 2z + 15 = 0$ ,  $5x + my - 3z - 1 = 0$ .

2.30.  $3x - y + mz + 5 = 0$ ,  $6x + 2y - 4z + 5 = 0$ .

Задание №3. Даны координаты точек  $N$ ,  $M$ ,  $P$ ,  $F$ . Найти общее уравнение плоскости, проходящей через точки  $N$ ,  $M$ ,  $P$ . Определить расстояние от точки  $F$  до плоскости  $NMP$ . Записать уравнение плоскости «в отрезках» и построить плоскость в системе координат.

| Вариант | Координаты точек |              |             |              |
|---------|------------------|--------------|-------------|--------------|
|         | $N$              | $M$          | $P$         | $F$          |
| 3.1     | (1; 3; 6)        | (2; 2; 1)    | (-1; 0; 1)  | (-4; 6; -3)  |
| 3.2     | (1; 3; -7)       | (2; -3; 5)   | (3; -1; 6)  | (4; -1; -3)  |
| 3.3     | (7; 2; 4)        | (7; -1; -2)  | (3; 3; 1)   | (-4; 2; 1)   |
| 3.4     | (2; 1; 4)        | (-1; 5; -2)  | (-7; -3; 2) | (-6; -3; 6)  |
| 3.5     | (-1; -5; 2)      | (-6; 0; -3)  | (3; 6; -3)  | (-10; 6; 7)  |
| 3.6     | (0; -1; -1)      | (-2; 3; 5)   | (1; -5; -9) | (-1; -6; 3)  |
| 3.7     | (5; 2; 0)        | (2; 5; 0)    | (1; 2; 4)   | (-1; 1; 1)   |
| 3.8     | (2; -1; -2)      | (1; 2; 1)    | (5; 0; -6)  | (-10; 9; -7) |
| 3.9     | (-2; 0; -4)      | (-1; 7; 1)   | (4; -8; -4) | (1; -4; 6)   |
| 3.10    | (3; 4; -5)       | (0; 7; 9)    | (-1; 2; -3) | (7; -2; 0)   |
| 3.11    | (1; 2; 0)        | (3; 0; -3)   | (5; 2; 6)   | (8; 4; -9)   |
| 3.12    | (2; -1; 2)       | (1; 2; -1)   | (3; 2; 1)   | (-4; 2; 5)   |
| 3.13    | (1; 1; 2)        | (-1; 1; 3)   | (2; -2; 4)  | (-1; 0; -2)  |
| 3.14    | (2; 3; 1)        | (4; 1; -2)   | (6; 3; 7)   | (7; 5; -3)   |
| 3.15    | (1; 1; -1)       | (2; 3; 1)    | (3; 2; 1)   | (5; 9; -8)   |
| 3.16    | (1; 5; -7)       | (-3; 6; 3)   | (-2; 7; 3)  | (-4; 8; -12) |
| 3.17    | (-3; 4; -7)      | (1; 5; -4)   | (-5; -2; 0) | (2; 5; 4)    |
| 3.18    | (-1; 2; -3)      | (4; -1; 0)   | (2; 1; -2)  | (3; 4; 5)    |
| 3.19    | (4; -1; 3)       | (-2; 1; 0)   | (0; -5; 1)  | (3; 2; -6)   |
| 3.20    | (1; -1; 1)       | (-2; 0; 3)   | (2; 1; -1)  | (2; -2; -4)  |
| 3.21    | (1; 2; 0)        | (1; -1; 2)   | (0; 1; -1)  | (-3; 0; 1)   |
| 3.22    | (1; 0; 2)        | (1; 2; -1)   | (2; -2; 1)  | (2; 1; 0)    |
| 3.23    | (1; 2; -3)       | (1; 0; 1)    | (-2; -1; 6) | (0; -5; -4)  |
| 3.24    | (3; 10; -1)      | (-2; 3; -5)  | (-6; 0; -3) | (1; -1; 2)   |
| 3.25    | (-1; 2; 4)       | (-1; -2; -4) | (3; 0; -1)  | (7; -3; 1)   |
| 3.26    | (0; -3; 1)       | (-4; 1; 2)   | (2; -1; 5)  | (3; 1; -4)   |
| 3.27    | (1; 3; 0)        | (4; -1; 2)   | (3; 0; 1)   | (-4; 3; 5)   |
| 3.28    | (1; 4; -7)       | (4; 1; 8)    | (2; 3; -4)  | (0; 1; 3)    |
| 3.29    | (1; 2; 5)        | (-1; 4; 3)   | (-3; 0; 2)  | (6; 5; 4)    |
| 3.30    | (2; 1; -3)       | (3; 5; -1)   | (4; -7; 5)  | (1; -1; 2)   |

Ответы (расстояние): 3.1) 7,483. 3.2) 3,097. 3.3) 4,196. 3.4) 2,132. 3.5) 12,329. 3.6) 5,516. 3.7) 3,464. 3.8) 14,967. 3.9) 7,071. 3.10) 8,338. 3.11) 7,286. 3.12) 7,036. 3.13) 4,183. 3.14) 5. 3.15) 10,914. 3.16) 7. 3.17) 3,173. 3.18) 7,071. 3.19) 7,603. 3.20) 3,284. 3.21) 3,082. 3.22) 0,798. 3.23) 6,532. 3.24) 7. 3.25) 4. 3.26) 6,964. 3.27) 6,124. 3.28) 2,828. 3.29) 3,556. 3.30) 2,364.

Задание №4. Найти канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки  $N$ ,  $M$ . Определить синус угла между прямой  $NM$  и заданной плоскостью.

| Вариант | $N$          | $M$          | Плоскость               |
|---------|--------------|--------------|-------------------------|
| 1       | 2            | 3            | 4                       |
| 4.1     | (-4; 6; -3)  | (0; 6; 10)   | $x + 3y + 2z + 5 = 0$   |
| 4.2     | (4; -1; -3)  | (4; 10; 5)   | $6x + 2y - 4z + 5 = 0$  |
| 4.3     | (-4; 2; 1)   | (-4; 10; 1)  | $2x + y + 4z + 3 = 0$   |
| 4.4     | (-6; -3; 6)  | (1; 0; 5)    | $3x - 4y - 2z + 5 = 0$  |
| 4.5     | (-10; 6; 7)  | (-10; 3; 1)  | $x - 3y + 5z + 5 = 0$   |
| 4.6     | (-1; -6; 3)  | (1; 6; 3)    | $x - y + z - 5 = 0$     |
| 4.7     | (-1; 1; 1)   | (2; -7; 0)   | $x - 4y - z + 9 = 0$    |
| 4.8     | (-10; 9; -7) | (-10; 10; 0) | $3x - y + 2z + 15 = 0$  |
| 4.9     | (1; -4; 6)   | (2; -7; 5)   | $6x + 2y - 4z + 5 = 0$  |
| 4.10    | (7; -2; 0)   | (10; 1; 2)   | $6x + 2y - 4z + 17 = 0$ |
| 4.11    | (8; 4; -9)   | (8; -4; -10) | $9x - 3y - 6z - 4 = 0$  |
| 4.12    | (-4; 2; 5)   | (4; 2; 20)   | $3x - y + 2z + 15 = 0$  |
| 4.13    | (-1; 0; -2)  | (3; 5; 0)    | $5x + 9y - 3z - 1 = 0$  |
| 4.14    | (7; 5; -3)   | (0; 10; -7)  | $4x - 5y + 3z - 1 = 0$  |
| 4.15    | (5; 9; -8)   | (1; 9; 0)    | $x - 4y - z + 9 = 0$    |
| 4.16    | (-4; 8; -12) | (1; 0; -12)  | $5x - 3y + 5z + 5 = 0$  |
| 4.17    | (2; 5; 4)    | (3; 5; -1)   | $x - 2y + 3z - 5 = 0$   |
| 4.18    | (3; 4; 5)    | (0; -1; 10)  | $5x - 3y + 4z - 4 = 0$  |
| 4.19    | (3; 2; -6)   | (0; 10; 15)  | $3x - 4y - 2z + 5 = 0$  |
| 4.20    | (2; -2; -4)  | (4; 3; -1)   | $x + y - 1 = 0$         |
| 4.21    | (-3; 0; 1)   | (3; 5; 1)    | $x + 2y - z = 0$        |
| 4.22    | (2; 1; 0)    | (10; 1; -5)  | $2x + y + 4z + 3 = 0$   |

| 1    | 2            | 3             | 4                      |
|------|--------------|---------------|------------------------|
| 4.23 | ( 0; -5; -4) | ( 2; -1; 4)   | $6x + 2y - 4z + 5 = 0$ |
| 4.24 | ( 1; -1; 2)  | ( 2; -1; 10)  | $9x + 3y - 6z - 2 = 0$ |
| 4.25 | ( 7; -3; 1)  | ( 7; 0; 10)   | $6x + 2y - 3z - 1 = 0$ |
| 4.26 | ( 3; 1; -4)  | ( 1; 9; 4)    | $x - 3y + 2z + 15 = 0$ |
| 4.27 | ( -4; 3; 5)  | ( 4; 0; -5)   | $x - 2y - 4z + 5 = 0$  |
| 4.28 | ( 0; 1; 3)   | ( 5; 4; 3)    | $x - 2y - 4z + 17 = 0$ |
| 4.29 | ( 6; 5; 4)   | ( 12; 0; 4)   | $2x - 3y - 5z - 4 = 0$ |
| 4.30 | ( 1; -1; 2)  | ( 10; 10; 11) | $5x - 2y + z + 15 = 0$ |

Ответы (синус угла): 4.1) 0,589. 4.2) 0,098. 4.3) 0,218. 4.4) 0,266. 4.5) 0,529. 4.6) 0,475. 4.7) 0,986. 4.8) 0,491. 4.9) 0,161. 4.10) 0,456. 4.11) 0,331. 4.12) 0,849. 4.13) 0,820. 4.14) 0,969. 4.15) 0,316. 4.16) 0,676. 4.17) 0,734. 4.18) 0,368. 4.19) 0,680. 4.20) 0,375. 4.21) 0,836. 4.22) 0,093. 4.23) 0,175. 4.24) 0,431. 4.25) 0,316. 4.26) 0,233. 4.27) 0,896. 4.28) 0,037. 4.29) 0,561. 4.30) 0,347.

### Задание №5

Прямая задана как линия пересечения двух непараллельных плоскостей. Написать канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве. Определить косинусы углов прямой с координатными осями.

5.1  $2x + 3y + z + 6 = 0$ ,  $x - 3y - 2z + 3 = 0$ .

5.2  $x - 2y + z - 4 = 0$ ,  $2x + 2y - z - 8 = 0$ .

5.3  $x + 5y + 2z - 4 = 0$ ,  $-2x + 2y + 2z + 3 = 0$ .

5.4  $x - 3y + 2z + 2 = 0$ ,  $x + 3y + z + 14 = 0$ .

5.5  $2x - y + 2z - 7 = 0$ ,  $x - 2y + 3z + 4 = 0$ .

5.6  $3x - y + 2z - 4 = 0$ ,  $2x + 2y - z - 4 = 0$ .

5.7  $6x - 7y + z + 4 = 0$ ,  $2x + 3y - z - 8 = 0$ .

5.8  $2x - 2y + z - 3 = 0$ ,  $x + 3y + z - 5 = 0$ .

5.9  $x + y + z - 2 = 0$ ,  $x - y - 2z + 2 = 0$ .

5.10  $3x + y - z - 6 = 0$ ,  $3x - y + 2z = 0$ .

5.11  $x - y - z - 2 = 0$ ,  $x - 2y + z + 4 = 0$ .

$$5.12 \quad 3x + 3y - 2z - 1 = 0, \quad 2x - 3y + z + 6 = 0.$$

$$5.13 \quad 4x - y + 5z - 6 = 0, \quad 6x + y - z + 7 = 0.$$

$$5.14 \quad 5x - 4y + 6z - 1 = 0, \quad 2x - y - z + 2 = 0.$$

$$5.15 \quad 2x + y - 3z - 2 = 0, \quad 2x - y + z + 6 = 0.$$

$$5.16 \quad 3x - y - 3z - 1 = 0, \quad -x + y + z + 10 = 0.$$

$$5.17 \quad 4x + y + z + 2 = 0, \quad 2x - y - 3z - 8 = 0.$$

$$5.18 \quad 3x - y - z + 3 = 0, \quad 2x + y - 3z - 4 = 0.$$

$$5.19 \quad 2x - 3y - 3z - 9 = 0, \quad x - 2y + z + 3 = 0.$$

$$5.20 \quad x + 2y + z - 1 = 0, \quad x - 2y + z + 1 = 0.$$

$$5.21 \quad x - y - z - 1 = 0, \quad x - y + 2z + 1 = 0.$$

$$5.22 \quad x + 2y + z - 1 = 0, \quad 3x - y + 4z - 10 = 0.$$

$$5.23 \quad 4x + y - 6z - 2 = 0, \quad x + y - 3z + 2 = 0.$$

$$5.24 \quad 2x - y + z - 4 = 0, \quad x + 3y - 4z + 4 = 0.$$

$$5.25 \quad 2x + 3y - 4z + 5 = 0, \quad x - y + z = 0.$$

$$5.26 \quad x - 2y - z - 1 = 0, \quad 3x - y + z - 2 = 0.$$

$$5.27 \quad 2x + 3y + 2z + 8 = 0, \quad x - y - z - 9 = 0.$$

$$5.28 \quad x - 2y + 3z - 4 = 0, \quad 2x + 3y - 4z + 6 = 0.$$

$$5.29 \quad x - 2y + 3z + 1 = 0, \quad 2x + y - 4z - 8 = 0.$$

$$5.30 \quad 3x - y + 2z - 7 = 0, \quad x + 3y - 2z + 3 = 0.$$

Ответы ( $\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma$ ): 5.1) (0,28; 0,466; 0,839). 5.2) (0; 0,447; 0,894).

5.3) (0,408; 0,408; 0,816). 5.4) (0,829; 0,092; 0,552). 5.5) (0,196; 0,784; 0,588).

5.6) (0,272; 0,634; 0,724). 5.7) (0,12; 0,241; 0,963). 5.8) (0,527; 0,105; 0,843).

5.9) (0,267; 0,802; 0,535). 5.10) (0,092; 0,829; 0,552). 5.11) (0,802; 0,535;

0,267). 5.12) (0,178; 0,416; 0,892). 5.13) (0,112; 0,953; 0,28). 5.14) (0,501;

0,852; 0,15). 5.15) (0,218; 0,873; 0,436). 5.16) (0,707; 0; 0,707). 5.17) (0,13;

0,911; 0,391). 5.18) (0,422; 0,738; 0,527). 5.19) (0,87; 0,483; 0,097). 5.20)

(0,707; 0; 0,707). 5.21) (0,707; 0,707; 0). 5.22) (0,786; 0,087; 0,612). 5.23)

(0,408; 0,816; 0,408). 5.24) (0,087; 0,786; 0,612). 5.25) (0,127; 0,762; 0,635).

5.26) (0,424; 0,566; 0,707). 5.27) (0,154; 0,617; 0,772). 5.28) (0,082; 0,816;

0,572). 5.29) (0,408; 0,816; 0,408). 5.30) (0,298; 0,596; 0,745).

Задание №6. Задано общее уравнение плоскости и точка  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ . Записать уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  перпендикулярно плоскости. Найти координаты точки пересечения прямой и плоскости.

| Вариант | Плоскость               | $M_0(x_0, y_0, z_0)$ |
|---------|-------------------------|----------------------|
| 1       | 2                       | 3                    |
| 6.1     | $5x - 2y + z + 15 = 0$  | ( 10; 10; 9)         |
| 6.2     | $2x - 3y - 5z - 4 = 0$  | ( 12; 5; 4)          |
| 6.3     | $x - 2y - 4z + 17 = 0$  | ( 5; 4; 3)           |
| 6.4     | $x - 2y - 4z + 5 = 0$   | ( 4; 0; -5)          |
| 6.5     | $x - 3y + 2z + 15 = 0$  | ( 1; 9; 4)           |
| 6.6     | $6x + 2y - 3z - 1 = 0$  | ( 7; 0; 10)          |
| 6.7     | $9x + 3y - 6z - 2 = 0$  | ( 2; -1; 10)         |
| 6.8     | $6x + 2y - 4z + 5 = 0$  | ( 2; -1; 4)          |
| 6.9     | $2x + y + 4z + 3 = 0$   | ( 10; 1; -5)         |
| 6.10    | $x + 3y - z = 0$        | ( 3; 5; 1)           |
| 6.11    | $x + y - 1 = 0$         | ( 9; 3; -1)          |
| 6.12    | $3x - 4y - 2z + 5 = 0$  | ( 0; 10; 15)         |
| 6.13    | $5x - 3y + 4z - 4 = 0$  | ( 0; -1; 10)         |
| 6.14    | $x - 2y + 3z - 5 = 0$   | ( 3; 5; -1)          |
| 6.15    | $5x - 3y + 5z + 5 = 0$  | ( 2; 4; -12)         |
| 6.16    | $x - 4y - z + 9 = 0$    | ( 5; 9; 1)           |
| 6.17    | $4x - 5y - 3z - 1 = 0$  | ( 0; 10; -7)         |
| 6.18    | $5x + 9y - 3z - 1 = 0$  | ( 3; 5; 0)           |
| 6.19    | $3x - y + 2z + 15 = 0$  | ( 4; 2; 20)          |
| 6.20    | $9x - 3y - 6z - 4 = 0$  | ( 8; -4; -10)        |
| 6.21    | $6x + 2y - 4z + 17 = 0$ | ( 10; 1; 2)          |
| 6.22    | $6x + 2y - 4z + 5 = 0$  | ( 2; -7; 5)          |
| 6.23    | $3x - y + 2z + 15 = 0$  | ( -10; 10; 0)        |

| 1    | 2                      | 3            |
|------|------------------------|--------------|
| 6.24 | $x - 4y - z + 9 = 0$   | ( 2; -7; 0)  |
| 6.25 | $x - y + z - 5 = 0$    | ( 1; 6; 3)   |
| 6.26 | $x - 3y + 5z + 5 = 0$  | ( -10; 3; 1) |
| 6.27 | $3x - 4y - 2z + 5 = 0$ | ( 1; 0; 5)   |
| 6.28 | $2x + y + 4z + 3 = 0$  | ( -4; 10; 1) |
| 6.29 | $6x + 2y - 4z + 5 = 0$ | ( 4; 10; 5)  |
| 6.30 | $x + 3y + 2z + 5 = 0$  | (0; 6; 10)   |

Ответы (координаты точки пересечения): 6.1) (1,0; 13,6; 7,2). 6.2) (12,789; 3,816; 2,026). 6.3) (4,905; 4,19; 3,381). 6.4) (2,619; 2,762; 0,524). 6.5) (1,214; 8,357; 4,429). 6.6) (5,653; -0,449; 10,673). 6.7) (5,357; 0,119; 7,762). 6.8) (2,107; -0,0964; 3,929). 6.9) (9,619; 0,81; -5,762). 6.10) (1,455; 0,364; 2,545). 6.11) (3,5; -2,5; -1). 6.12) (6,724; 1,034; 10,517). 6.13) (-3,9; 1,344; 6,88). 6.14) (4,071; 2,857; 2,214). 6.15) (6,831; 1,102; -7,169). 6.16) (6,278; 3,889; -0,278). 6.17) (2,4; 7,0; 8,8). 6.18) (0,435; 0,383; 1,539). 6.19) (-9,929; 6,643; 10,714). 6.20) (-2,0; -0,667; -3,333). 6.21) (2,393; -1,536; 7,071). 6.22) (3,821; -6,393; 3,786). 6.23) (-4,643; 8,214; 3,571). 6.24) (-0,167; 1,667; 2,167). 6.25) (3,333; 3,667; 5,333). 6.26) (-9,743; 2,229; 2,286). 6.27) (1,207; -0,276; 4,862). 6.28) (-4,857; 9,571; -0,714). 6.29) (0,893; 8,964; 7,071). 6.30) (-3,071; -3,214; 3,857).

## Уравнения плоскости в пространстве

В пространстве с заданной декартовой системой координат однозначное расположение плоскости можно задать различными способами, существуют различные уравнения плоскости в пространстве.

Пусть точки  $N(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M(x_2, y_2, z_2)$ ,  $P(x_3, y_3, z_3)$  не лежат на одной прямой. Тогда через них можно провести плоскость, причем только одну. Пусть в этой же плоскости лежит точка  $G(x, y, z)$  с текущими координатами. Уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  перпендикулярно заданному вектору  $\vec{N}(A, B, C)$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (2)$$

Если в уравнении (2) раскрыть скобки и обозначить свободный член через  $D$ , получим общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (3)$$

*Примечание.* Если в общем уравнении (3) один из коэффициентов  $A$ ,  $B$ ,  $C$  равен нулю, то плоскость проходит параллельно соответствующей оси. Если два коэффициента из  $A$ ,  $B$ ,  $C$  равны нулю, плоскость параллельна одной из координатных плоскостей. Например, плоскость  $4x - 5z - 1 = 0$  проходит параллельно оси  $Oy$ , плоскость  $y + 3 = 0$  проходит параллельно координатной плоскости  $xOz$  через точку  $y = -3$  на оси  $Oy$ . Коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  в общем уравнении являются одновременно координатами вектора  $\vec{N}(A, B, C)$ , перпендикулярного плоскости.

Уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (4)$$

Здесь  $a, b, c$  - отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат.

Нормальное уравнение плоскости

Пусть задан радиус-вектор единичной длины  $\vec{n}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ , где  $\alpha, \beta, \gamma$  - углы между вектором  $\vec{n}$  и положительными полуосями координат. Задано также расстояние  $OD = p$  от начала координат до плоскости.

В произвольную точку плоскости  $M(x, y, z)$  проведем радиус-вектор, координаты которого совпадают с координатами точки  $M$ .

Векторное уравнение плоскости:

$$OM \cdot \vec{n} - p = 0. \quad (5)$$

Координатная форма уравнения (5) называется нормальным уравнением плоскости:

$$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma - p = 0. \quad (6)$$

Формула нормирующего множителя для перехода от общего уравнения к нормальному:

$$\mu = \frac{-\operatorname{sgn}(D)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (7)$$

Формула для определения расстояния  $\rho$  от точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  до плоскости, заданной уравнением (3):

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (8)$$

Две плоскости перпендикулярны (параллельны) друг другу, если перпендикулярны (параллельны) их векторы нормали. Поэтому, если даны две плоскости

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

то условие перпендикулярности плоскостей:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0, \quad (9)$$

условие параллельности плоскостей:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (10)$$

Угол между плоскостями можно определить по формуле

$$\cos \alpha = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (11)$$

## Уравнения прямой линии в пространстве

Уравнения прямой, проходящей через заданную точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  параллельно заданному вектору  $\vec{S}(n, m, p)$ , где  $M(x, y, z)$  - принадлежащая прямой линии точка с переменными координатами, имеют вид:

$$\frac{x - x_0}{n} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}. \quad (12)$$

Уравнения (12) называются каноническими уравнениями прямой в пространстве.

Уравнения прямой, проходящей через две точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ :

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \quad (13)$$

Параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + nt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases} \quad t \in (-\infty; \infty). \quad (14)$$

Прямая в пространстве может быть задана как линия пересечения двух плоскостей:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Условия перпендикулярности и параллельности двух прямых

Две прямые линии в пространстве, заданные каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_1}{n_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{n_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

будут параллельны, если соответствующие направляющие векторы коллинеарны:  $\frac{n_1}{n_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2}$ .

Две прямые перпендикулярны, если перпендикулярны направляющие векторы:  $n_1n_2 + m_1m_2 + p_1p_2 = 0$ .

Условия перпендикулярности и параллельности прямой и плоскости

Пусть задана плоскость (р)  $Ax + By + Cz + D = 0$ , нормальный вектор

которой  $\vec{N}(A, B, C)$ , и прямая L в

пространстве  $\frac{x-x_0}{n} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{p}$ ,

направляющий вектор которой  $\vec{S}(n, m, p)$  (см. рисунок 1).

Обозначим  $\angle \alpha$  - угол между прямой и вектором  $\vec{N}$ ,  $\angle \beta$  - угол между прямой и плоскостью.

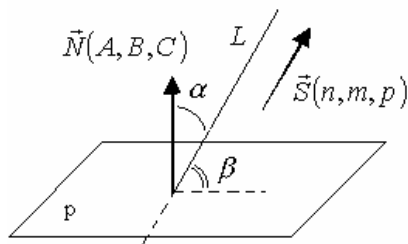


Рисунок 1 – Прямая и плоскость

Если прямая перпендикулярна плоскости, то векторы  $\vec{N}$  и  $\vec{S}$  коллинеарны:

$$\frac{A}{n} = \frac{B}{m} = \frac{C}{p}.$$

Если прямая параллельна плоскости, то векторы  $\vec{N}$  и  $\vec{S}$  перпендикулярны между собой:

$$A \cdot n + B \cdot m + C \cdot p = 0.$$

Угол  $\beta$  между прямой и плоскостью можно определить по формуле:

$$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{|An + Bm + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{n^2 + m^2 + p^2}}. \quad (16)$$

### Указания к выполнению заданий и примеры решения

**Задание №1.** При выполнении вариантов задания следует использовать уравнения плоскости (2) – (4) и примечания к уравнению (3). Если три плоскости имеют единственную общую точку, это означает, что система линейных алгебраических уравнений, составленная из уравнений плоскостей, имеет единственное решение (нужно применить правило Крамера).

#### Задание №2.

В вариантах 2.1 – 2.10. вычислить косинус угла между заданными плоскостями поможет формула (11).

В вариантах 2.11 – 2.20. определить, при каких значениях  $p$ ,  $m$  заданные уравнения будут определять параллельные плоскости, помогут условия параллельности плоскостей (10).

В вариантах 2.21 – 2.30. определить, при каком значении  $m$  заданные пары уравнений будут определять перпендикулярные плоскости, помогут условия перпендикулярности плоскостей (9).

**Задание №3.** Даны координаты точек  $N$ ,  $M$ ,  $P$ ,  $F$ . Найти общее уравнение плоскости, проходящей через точки  $N$ ,  $M$ ,  $P$ . Определить расстояние от точки  $F$  до плоскости  $NMP$ . Записать уравнение плоскости «в отрезках» и построить плоскость в системе координат.

Дано:  $N(-2; 1; 5)$ ,  $M(3; 6; -2)$ ,  $P(5; -8; 3)$ ,  $F(10; -4; 6)$

**Решение.** Используем уравнение плоскости, проходящей через три точки (1):

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Считая точки  $N$ ,  $M$ ,  $P$  первой, второй и третьей точкой, подставим их координаты в уравнение (1):

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z-5 \\ 3+2 & 6-1 & -2-5 \\ 5+2 & -8-1 & 3-5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z-5 \\ 5 & 5 & -7 \\ 7 & -9 & -2 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{раскрывая}$$

определитель, получим общее уравнение плоскости:

$$-73x - 39y - 80z + 293 = 0.$$

Расстояние от точки  $F$  до плоскости определяем по формуле (8):

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \text{ где } (x_0, y_0, z_0) - \text{координаты точки } F.$$

$$\rho = \frac{|-73 \cdot 10 - 39 \cdot (-4) - 80 \cdot 6 + 293|}{\sqrt{(-73)^2 + (-39)^2 + 80^2}} = 6,611.$$

Запишем уравнение плоскости  $-73x - 39y - 80z + 293 = 0$  «в отрезках».

$-73x - 39y - 80z = -293$ , разделим на  $-293$ . Запишем в виде:

$$\frac{x}{293/73} + \frac{y}{293/39} + \frac{z}{293/80} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x}{4,0143} + \frac{y}{7,513} + \frac{z}{3,663} = 1.$$

Рисуем декартову систему координат в пространстве, на оси  $Ox$  ставим точку  $4,0143$ , на оси  $Oy$  ставим точку  $7,513$ , на оси  $Oz$  ставим точку  $3,663$ . Каждая пара точек определяет линию пересечения заданной плоскости и координатной плоскости. Соединяем точки отрезками прямых. Полученный треугольник принадлежит плоскости (см. рисунок 2).

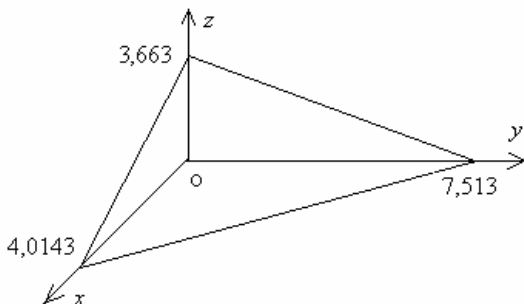


Рисунок 2 – плоскость  
в задании №3

**Задание №4.** Найти канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки  $N$ ,  $M$ . Определить синус угла между прямой  $NM$  и заданной плоскостью.

Дано:  $N(2; -3; 4)$ ,  $M(9; 12; 7)$ ,  $3x - 2y - 2z + 10 = 0$ .

**Решение.** Используем уравнения прямой, проходящей через две точки:  $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ . Считая точку  $N$  первой, а точку

$M$  - второй, подставим их координаты в уравнения.

$\frac{x - 2}{9 - 2} = \frac{y + 3}{12 + 3} = \frac{z - 4}{7 - 4}$ ,  $\frac{x - 2}{7} = \frac{y + 3}{15} = \frac{z - 4}{3}$ . Последние уравнения – канонические. В знаменателях дробей расположены координаты направляющего вектора:  $\vec{S}(7; 15; 3)$ . Приравнивая каждую дробь параметру  $t$  и выражая переменные, получим параметрические уравнения прямой (14):

$$\begin{cases} x = 2 + 7t, \\ y = -3 + 15t, \\ z = 4 + 3t, \end{cases} t \in (-\infty; \infty).$$

Синус угла между прямой  $NM$  и заданной плоскостью определяем по формуле (16). Здесь  $A = 3$ ,  $B = -2$ ,  $C = -2$  - коэффициенты при переменных в уравнении плоскости (координаты нормального вектора к плоскости),  $n, m, p$  - координаты направляющего вектора  $\vec{S}(7; 15; 3)$ .

$$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{|3 \cdot 7 - 2 \cdot 15 - 2 \cdot 3|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{7^2 + 15^2 + 3^2}} = \frac{15}{\sqrt{17} \sqrt{283}} = 0,216.$$

**Задание №5.** Прямая задана как линия пересечения двух непараллельных плоскостей. Написать канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве. Определить косинусы углов прямой с координатными осями.

Дано:  $5x - 3y + z + 6 = 0$ ,  $-x + 3y - 2z + 3 = 0$ .

**Решение.** Вначале определяем координаты одной из точек пересечения плоскостей. Для этого одну из координат точки задаем произвольно. Пусть  $x_0 = 0$ . Подставим эту координату в уравнения плоскостей. Полученные два уравнения составляют систему. Решаем

$$\text{систему: } \begin{cases} -3y_0 + z_0 = -6, \\ 3y_0 - 2z_0 = -3, \end{cases} \text{ откуда } z_0 = 9, y_0 = 5.$$

Нашли точку пересечения  $M_0(0; 9; 5)$ .

Направляющий вектор прямой перпендикулярен нормальным векторам плоскостей, поэтому его определяем как векторное произведение  $\vec{S} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ .

$$\begin{aligned} \vec{S} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= 3\vec{i} + 9\vec{j} + 12\vec{k}. \end{aligned}$$

$$\text{Канонические уравнения прямой: } \frac{x}{3} = \frac{y-9}{9} = \frac{z-5}{12}.$$

$$\text{Параметрические уравнения прямой: } \begin{cases} x = 3t, \\ y = 9 + 9t, \\ z = 5 + 12t, \end{cases} t \in (-\infty; \infty).$$

Обозначим углы между прямой и координатными осями  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  соответственно  $\alpha, \beta, \gamma$ . Косинусы углов между прямой и координатными осями определяем как модули косинусов углов между направляющим вектором  $\vec{S}$  и ортами  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ :  $\cos \alpha = \frac{|\vec{n}|}{|\vec{S}|}$ ,

$$\cos \beta = \frac{|m|}{|\vec{S}|}, \quad \cos \gamma = \frac{|p|}{|\vec{S}|}, \quad \cos \alpha = \frac{|3|}{\sqrt{3^2 + 9^2 + 12^2}} = \frac{3}{\sqrt{234}} = 0,196,$$

$$\cos \beta = \frac{9}{\sqrt{234}} = 0,588, \quad \cos \gamma = \frac{12}{\sqrt{234}} = 0,784.$$

**Задание №6.** Задано общее уравнение плоскости и точка  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ . Записать уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  перпендикулярно плоскости. Найти координаты точки пересечения прямой и плоскости.

Дано:  $M_0(3, -5, 7)$ ,  $7x - 2y - 4z + 10 = 0$ .

**Решение.** Нормальный вектор плоскости  $\vec{N}(7; -2; -4)$  является направляющим для искомой прямой. Запишем канонические и параметрические уравнения прямой:

$$\frac{x-3}{7} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z-7}{-4}; \quad \begin{cases} x = 3 + 7t, \\ y = -5 - 2t, \\ z = 7 - 4t. \end{cases}$$

В точке пересечения прямой и плоскости координаты совпадают, поэтому в уравнение плоскости подставим координаты точки прямой, выраженные через параметр.

$$7(3 + 7t) - 2(-5 - 2t) - 4(7 - 4t) + 10 = 0, \quad t = -\frac{13}{69}. \quad \text{Вычисляем}$$

$$\text{координаты точки пересечения: } x = 3 - 7 \cdot \frac{13}{69} = 1,681,$$

$$y = -5 - 2 \cdot \left(-\frac{13}{69}\right) = -4,623, \quad z = 7 - 4 \cdot \left(-\frac{13}{69}\right) = 7,754.$$

Ответ: (1,681; -4,623; 7,754).

---