

УДК 62.50

В.А. Крамарь, доцент, канд. техн. наук*Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская. 33, г. Севастополь, Украина, 99053***АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ В ФОРМЕ СИСТЕМЫ С ЕДИНИЧНОЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ**

В статье рассматривается методика построения математической структурированной модели многомерной системы автоматического управления. Изложен подход к построению характеристического многочлена многомерной системы и анализа устойчивости многомерной системы управления по расположению его корней.

Ключевые слова: система управления, отрицательная обратная связь, анализ устойчивости.

Объектом исследования в настоящей работе является линейная многомерная система управления. Рассматривается модель системы управления в комплексной области с рациональными передаточными матрицами.

Общая цель работы заключается в развитии и совершенствовании математических методов построения характеристического многочлена многомерной системы и развития, на этой основе, методов анализа устойчивости исследуемого класса систем.

В настоящей статье рассматривается подход к построению характеристического многочлена многомерной системы управления, основанный на построении взаимно простых многочленных матриц, эквивалентных многочленным матрицам исходных представлений системы.

Реализация этого подхода для построения характеристического многочлена системы прямым путем с помощью элементарных эквивалентных преобразований представляет собою чрезвычайно громоздкую процедуру. Поэтому значительное внимание в работе уделяется формированию характеристического многочлена по многочленным матрицам прямых исходных представлений системы по их наибольшему общему делителю.

Проанализируем математическую модель многомерной системы автоматического управления, которую можно представить структурированной моделью в изображениях.

Рассмотрим замкнутую систему, вход – выходное описание которой представлено в виде

$$y(s) = \Phi(s)u(s), \quad (1)$$

где $y \in R^n$, $u \in R^n$ – векторы выходов и входов соответственно, а $\Phi(s)$ – рациональная передаточная матрица (матрица передаточных функций) системы.

Пусть матрица системы $\Phi(s)$ для вход – выходного соотношения (1) задана в виде

$$\Phi(s) = [I + W(s)]^{-1}W(s), \quad (2)$$

т.е. в форме системы, указанной на рисунке 1.

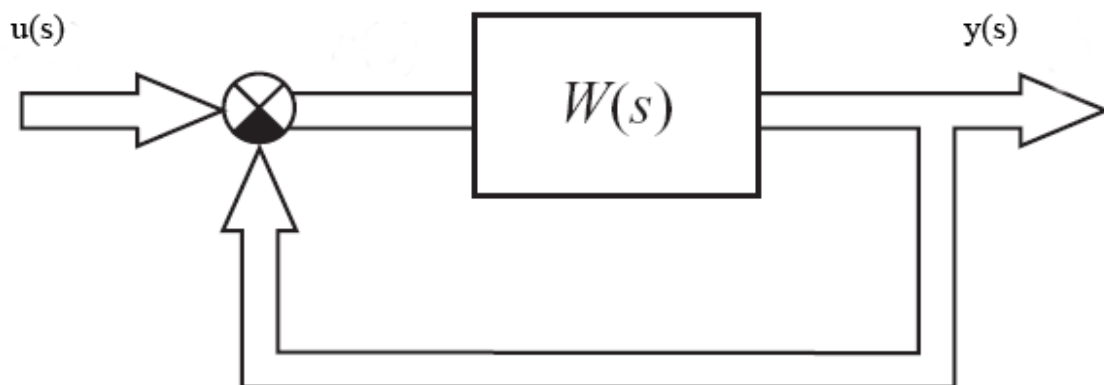


Рисунок 1 – Структурная схема

В прямой цепи системы $W(s)$ – передаточная матрица размера $n \times n$.

$$W(s) = \{w_{ij}(s)\}, w_{ij}(s) = \frac{p_{ij}(s)}{q_{ij}(s)}, i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

В то же время справедливо и выражение

$$\Phi(s) = W(s)[I + W(s)]^{-1}. \quad (4)$$

Действительно,

$$W(s) = I + W(s) - I, \quad (5)$$

а значит из соотношения (3) имеем

$$\Phi(s) = [I + W(s)]^{-1}[I + W(s) - I] = [I + W(s)]^{-1}[I + W(s)] - [I + W(s)]^{-1} = I - [I + W(s)]^{-1}. \quad (6)$$

Значит,

$$\Phi(s)[I + W(s)] = W(s). \quad (7)$$

Из равенства (7) следует соотношение (4).

Пусть матрица $W(s)$ представляется в виде:

$$W(s) = Q^{-1}(s)\Pi(s). \quad (8)$$

где $Q(s)$ – матрица вида:

$$Q(s) = \begin{bmatrix} q_1(s) & & & 0 \\ & q_2(s) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & q_n(s) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где $q_i(s)$, $i = 1, \dots, n$ – наименьшее общее кратное характеристических многочленов $q_{ij}(s)$, $j = 1, \dots, n$.

$$q_i(s) = c_{ij}(s)q_{ij}(s), i, j = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Матрица $\Pi(s)$ – имеет вид

$$\Pi(s) = \begin{bmatrix} \pi_{11}(s) & \pi_{12}(s) & \dots & \pi_{1n}(s) \\ \pi_{21}(s) & \pi_{22}(s) & \dots & \pi_{2n}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_{n1}(s) & \pi_{n2}(s) & \dots & \pi_{nn}(s) \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где

$$\pi_{ij}(s) = c_{ij}(s)p_{ij}(s), i, j = 1, \dots, n. \quad (12)$$

Тогда,

$$\Phi(s) = [I + Q^{-1}(s)\Pi(s)]^{-1}Q^{-1}(s)\Pi(s) = \{Q(s)[I + Q^{-1}(s)\Pi(s)]\}^{-1}\Pi(s) \quad (13)$$

и для матрицы $\Phi(s)$ справедливо представление

$$\Phi(s) = [Q(s) + \Pi(s)]^{-1}\Pi(s). \quad (14)$$

Если матрица $W(s)$ представленная соотношением (3) – правильная, т.е. $W(\infty) \neq \infty$, и

$$\det[I + W(\infty)] \neq 0, \quad (15)$$

то матрица $\Phi(s)$ также правильна и

$$\Delta(s) = \det[Q(s) + \Pi(s)] \quad (16)$$

является характеристическим многочленом рассматриваемой системы.

Действительно, из соотношения (14) для матрицы $\Phi(s)$ имеем:

$$\Phi(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \text{Adj}[Q(s) + \Pi(s)]\Pi(s). \quad (17)$$

В силу этого представления можем сделать вывод об ограниченности матрицы $\Phi(s)$ при $s \rightarrow \infty$ – матрица $\Phi(s)$ правильная и все ее полюсы расположены в конечной части комплексной плоскости. Теперь предположим, что некоторое комплексное число λ – является полюсом матрицы передаточных функций $\Phi(s)$. Поскольку из представления (17) следует

$$\Phi(s) = \text{Adj}[Q(s) + \Pi(s)] \frac{1}{\det[Q(s) + \Pi(s)]} \Pi(s) \quad (18)$$

и поскольку многочленные матрицы при $s \rightarrow \lambda$ ограничены, то λ – является корнем характеристического многочлена $\Delta(s)$ (16), т.е. $\Delta(\lambda) = 0$. Если это не так, то $\Phi(s)$ при $s = \lambda$ не равняется бесконечности, так как ее числитель является многочленной матрицей.

Обратное утверждение, в общем, не имеет места, так как в соотношении (17) могут быть общие нули у числителя и знаменателя.

Для того, чтобы получить необходимые и достаточные условия устойчивости введем представления

$$Q(s) = C(s)\hat{Q}(s), \quad \Pi(s) = C(s)\hat{\Pi}(s), \quad (19)$$

где $C(s)$ – левый наибольший общий делитель матриц, а $\hat{Q}(s)$ и $\hat{\Pi}(s)$ – взаимно простые. Это значит, что существуют многочленные матрицы $K(s)$ и $N(s)$ такие, что

$$\hat{Q}(s)K(s) + \hat{\Pi}(s)N(s) = I_n, \quad (20)$$

где $K(s), \Pi(s)$ – некоторые многочленные матрицы.

$$\text{Как и ранее, имеем } W(s) = Q^{-1}(s)\Pi(s) \text{ и } W(s) = \hat{Q}^{-1}(s)\hat{\Pi}(s), \quad (21)$$

а

$$\Phi(s) = [I + \hat{Q}^{-1}(s)\hat{\Pi}(s)]^{-1} \hat{Q}^{-1}(s)\hat{\Pi}(s), \quad (22)$$

а значит

$$\Phi(s) = [\hat{Q}(s) + \hat{\Pi}(s)]^{-1} \hat{\Pi}(s). \quad (23)$$

Учитывая, что

$$\Phi(s) = \frac{1}{\det[I + W(s)]} \text{Adj}[I + W(s)]W(s), \quad (24)$$

получаем, что $\Phi(\infty) \neq \infty$, т.к. $\det[I + W(\infty)] \neq 0$ по условию.

Из соотношения (23) следует, что

$$\Phi(s) = \frac{1}{\det[\hat{Q}(s) + \hat{\Pi}(s)]} \text{Adj}[\hat{Q}(s) + \hat{\Pi}(s)]\hat{\Pi}(s) \quad (25)$$

и, если $\Phi(\lambda) = \infty$, то и $\delta(\lambda) = \det[\hat{Q}(\lambda) + \hat{\Pi}(\lambda)] = 0$.

Запишем соотношение (20) в виде

$$[\hat{Q}(s) + \hat{\Pi}(s)]K(s) + \hat{\Pi}(s)[N(s) - K(s)] = I_n.$$

Учитывая соотношение (14), теперь можем записать

$$[\hat{Q}(s) + \hat{\Pi}(s)]\{K(s) + \Phi(s)[N(s) - K(s)]\} = I_n, \quad (26)$$

откуда имеем

$$\det[\hat{Q}(s) + \hat{\Pi}(s)]\det\{K(s) + \Phi(s)[N(s) - K(s)]\} = 1 \quad (27)$$

или

$$\delta(s)\det\{K(s) + \Phi(s)[N(s) - K(s)]\} = 1. \quad (28)$$

При $s \rightarrow \lambda$ первый множитель равенства (28) – $\delta(s)$ – стремится к нулю, многочленные матрицы $K(s), N(s)$ – к конечным значениям. Следовательно, $\Phi(\lambda) = \infty$. Таким образом, множество корней многочлена $\delta(s)$ и множество полюсов матрицы $\Phi(s)$ совпадают.

Таким образом, имеет место необходимое и достаточное условие устойчивости многомерной системы описываемой соотношениями (1), (2), (3).

Пусть все корни характеристического многочлена системы $\Delta(s)$ (16) принадлежат строго левой полуплоскости. Тогда, в силу того, что множество полюсов матрицы передаточных функций $\Phi(s)$ совпадает со множеством корней характеристического многочлена системы $\Delta(s)$ (16), все полюсы $\Phi(s)$ также принадлежат строго левой полуплоскости. То есть, если многочлен $\Delta(s)$ – гурвицев, то $\Phi(s)$ – устойчива.

Предлагаемый в статье подход позволяет получить математическую модель структурированной многомерной системы автоматического управления представленной в виде системы с единичной отрицательной обратной связью, пригодную для анализа устойчивости системы по расположению корней построенного характеристического многочлена системы.

Библиографический список использованной литературы

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер.— М.: Наука, 1977. — 576 с.
2. Doyle, J.C. Feedback Control Theory / J.C. Doyle, B. Francis, A. Tannenbaum. — Macmillan Publishing Company, New York, 1992. — 673 p.
3. Gasparjan O.N. Linear and Nonlinear Multivariable Feedback Control: A Classical Approach / O.N. Gasparjan. — John Wiley & Sons, 2008. — 341 p.

Поступила в редакцию 4.05.2011 г.

Крамар В.О. Алгебраїчний підхід до аналізу стійкості багатовимірної системи автоматичного керування у формі системи з одиничним негативним оборотним зв'язком

В статті розглянута методика побудови математичної структурованої моделі багатовимірної системи автоматичного керування. Викладений підхід до побудови характеристичного багаточлена багатовимірної системи та аналізу стійкості багатовимірної системи керування по розташуванню його коренів.

Ключові слова: система керування, негативний зворотній зв'язок, аналіз стійкості.

Kramar V.A. Algebraic method for the stability analysis of complex control system in the form of system with negative feedback

The method of building the mathematical model of complex control system is the subject of the article based on the analysis of characteristic equation roots.

Keywords: control system, negative feedback, stability analysis.