

УДК 621.833

В.П. Прохоров, профессор, канд. техн. наук**В.А. Щипаков, ст. научн. сотр.***Александровский филиал Российского нового университета**ул. Советская 25 а, г. Александров, Россия, 601652**E-mail: afrosnou2009@yandex.ru***СИНТЕЗ И ОДНОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ПЛОСКИХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ ПО КОЭФФИЦИЕНТУ ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ**

Работа выполнена в рамках теории плоских трехзвенных механизмов и является логическим расширением общей теории в область оптимизации. Рассмотрена актуальная задача однокритериальной оптимизации зубчатой передачи по коэффициенту полезного действия (кпд). Задача решена вариационным методом Эйлера.

Ключевые слова: *трехзвенный механизм, зубчатая передача, оптимизация, коэффициент полезного действия.*

Работа выполнена в рамках системной концепции проектирования механизмов [1-7]. В более поздних работах предложены и исследованы геометрические и кинематические модели указанных в названии статьи зацеплений в виде

$$v_j = -a_j \dot{\phi}_j \sin \alpha + r(\dot{\alpha} - \dot{\phi}_j), \quad r = a_j \dot{\phi}_j \cos \alpha, \quad k_j = (\dot{\alpha} - \dot{\phi}_j) v_j^{-1}, \quad (1)$$

где v_j – скорость точки контакта по профилю зуба j -го звена ($j=1,2$ – индекс звена); a_j – радиус центроиды; $\dot{\phi}_j$ – угловая скорость; α – угол зацепления; r – расстояние от полюса зацепления P до точки контакта M_j ; k_j – кривизна профиля в точке контакта; точка над параметром обозначает производную по времени t . Очевидно, что

$$a_1 = a_5(1 - i_{12})^{-1}, \quad a_2 = a_5 i_{12}(1 - i_{12})^{-1}, \quad a_5 = a_1 - a_2 = \text{const}, \quad i_{12} = \frac{\dot{\phi}_1}{\dot{\phi}_2} = \frac{\dot{a}_1}{\dot{a}_2} = \text{const}, \quad \phi_j = \dot{\phi}_j t, \quad (2)$$

где a_5 – межосевое расстояние, i_{12} – передаточное отношение, ϕ_j – угол поворота j -го звена.

Решение (1) состоит в определении полярных координат r и α линии зацепления (ЛЗ). Переход от ЛЗ к профилям зубьев осуществляется преобразованием систем координат.

При известных $a_5 = \text{const}$, $i_{12} = \text{const}$, $\dot{\phi}_1 = 1$ решение (1) с учетом (2) возможно при задании одной дополнительной (замыкающей) связи между ее переменными в виде:

$$\Pi_i = \Pi_i(r, \alpha, a_j, \dot{\phi}_i, t, \dot{\alpha}, \dot{r}, v_j, k_j, \dots, \ddot{\alpha}, \ddot{r}, \ddot{v}_j, \ddot{k}_j, \dots), \quad (3)$$

где порядок критерия определяется номером входящей в (3) производной от координат линии зацепления.

Рассмотрим актуальность постановки задачи синтеза по критерию угла давления. Известно, что в зубчатой передаче с теоретическим часовым зацеплением в фазе контакта головки зуба 1-го входного звена с ножкой зуба 2-го выходного звена угол давления равен нулю. В таком зацеплении имеются хорошие условия передачи силового потока, т.к. радиальная сила, которая не способствует преобразованию движения, а только деформирует выходное звено и его опоры, не велика и равна проекции F' силы трения $\vec{F}$ в контакте (рисунок 1,а). Ее можно полностью исключить, если компенсировать радиальную составляющую силы трения противоположно направленной радиальной составляющей $\vec{Q}$ нормальной силы $\vec{N}$ (рисунок 1,б). Тогда результирующая сила $\vec{R} \perp \vec{O_2 M_j}$. Это условие выполняется при угле давления $\theta = \mu = \text{const}$, где μ – угол трения. Таким образом, постановка задачи синтеза зацепления с постоянными (нулевыми) или оптимальными углами давления актуальна и имеет практическое обоснование.

Алгоритм синтеза по выбранному критерию запишем в последовательности: 1) задаем критерий нулевого порядка $\Pi(r, \alpha)$ в общем случае в неявной форме; 2) выражаем функцию $r(t)$ в явном виде; 3) находим $\dot{r}(t)$ и из (1) определяем $\alpha(t), v_j, k_j$; 4) используя формулы преобразования, переходим от полярных координат ЛЗ к прямоугольным координатам ЛЗ, профилей вращающихся звеньев и поступательно движущейся рейки по схеме $r, \alpha \rightarrow x, y \rightarrow x_j, y_j \rightarrow x_2', y_2'$.

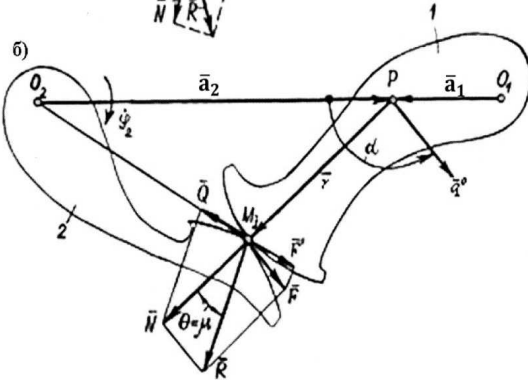
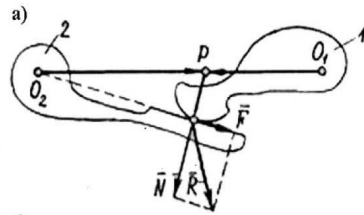


Рисунок 1 – Распределение сил в контакте

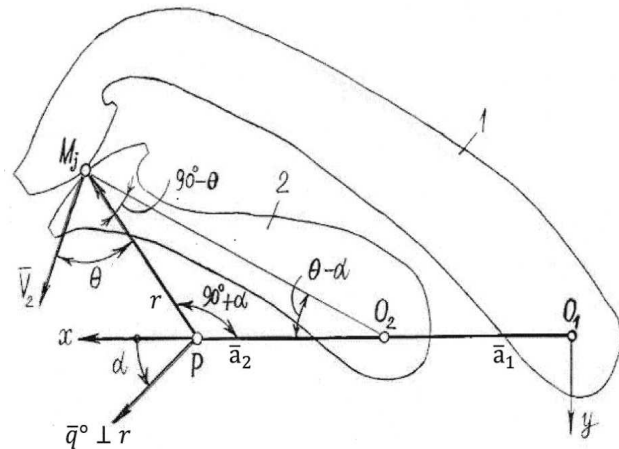


Рисунок 2 – Геометрическая модель зацепления

Очевидно, что $\theta = g(r, \alpha)$. Действительно, из рисунка 2 имеем:

$$\operatorname{tg} \theta = (r + a_2 \sin \alpha) / a_2 \cos \alpha, \quad (4)$$

или

$$r = a_2 \operatorname{tg} \theta \cos \alpha - a_2 \sin \alpha. \quad (5)$$

Оптимальным (нулевым) значениям θ соответствует ЛЗ $r = -a_2 \sin \alpha$ – дуга окружности диаметра a_2 . Такая ЛЗ соответствует теоретическому часовому зацеплению. ЛЗ с малыми значениями θ располагаются в ее окрестности

Рассмотрим первую задачу – задачу синтеза зацепления по условию $\theta = \text{const}$. Из (5) имеем:

$$\frac{dr}{dt} = -a_2 \frac{d\alpha}{dt} (\operatorname{tg} \theta \sin \alpha + \cos \alpha). \quad (6)$$

Приравнявая (6) и второе равенство в (1), получим дифференциальное уравнение 1-го порядка:

$$\dot{\varphi}_2 dt = (\operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \alpha + 1) d\alpha. \quad (7)$$

Интегрируя (7) при начальных условиях $t = 0, \alpha = \alpha_0$, имеем:

$$\varphi_2 = \operatorname{tg} \theta \ln \left| \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} \right| + \alpha - \alpha_0. \quad (8)$$

Подставив $\alpha(\varphi_j)$ из (8) в (6), найдем $r(\varphi_j)$. Для вычисления параметров v_j, k_j системы (1) и множества критериев (3) определим $\dot{\alpha}$ из (7) в виде:

$$\dot{\alpha} = \dot{\varphi}_2 (\operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \alpha + 1)^{-1}. \quad (9)$$

Подставив (5), (8) и (9) в (1), для v_j и k_j получим:

$$\begin{aligned} v_1 &= -a_1 \dot{\varphi}_1 \sin \alpha + a_2 (\operatorname{tg} \theta \cos \alpha - \sin \alpha) [\dot{\varphi}_2 (\operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \alpha + 1)^{-1} - \dot{\varphi}_1], \\ v_2 &= -a_1 \dot{\varphi}_2 \left\{ \sin \alpha + (\operatorname{tg} \theta \cos \alpha - \sin \alpha) [(\operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \alpha + 1)^{-1} - 1] \right\} k_j = (\dot{\alpha} - \dot{\varphi}_j) v_j^{-1}. \end{aligned}$$

Дальнейшие вычисления выполняем по изложенному выше алгоритму.

ЛЗ (линии уровня $\theta = \text{const}$), построенные с учетом (4), (8), приведены на рисунке 3. Из рисунка видно, что они представляют собой окружности, имеющие единую хорду $O_2 P = a_2$. Множество таких ЛЗ (окружностей) принадлежит эллиптическому пучку [15]. Действительно, если ЛЗ записать в прямоугольной системе координат (рисунок 2) в виде $x = a_1 + a_2 (\operatorname{tg} \theta \cos \alpha - \sin \alpha) \sin \alpha$, $y = -a_2 (\operatorname{tg} \theta \cos \alpha - \sin \alpha) \cos \alpha$, то, исключив параметр α , после преобразований получим:

$$[x - (a_1 - 0.5a_2)]^2 + (y + 0.5a_2 \operatorname{tg} \theta)^2 = 0.25a_2^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \theta),$$

что представляет окружность, проходящую через O_2 и P , с координатами центра $x_c = a_1 - 0.5a_2$, $y_c = -0.5a_2 \operatorname{tg} \theta$, и радиусом $R^2 = 0.5a_2^2(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)$.

Рассмотрим вторую задачу – задачу оптимизации по условию $\theta \rightarrow \min$. Представим её как задачу минимизации функционала

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \operatorname{tg} \theta dt. \quad (10)$$

Обозначим через $L(r, \alpha)$ правую часть равенства (4). Выражение может принимать отрицательные значения, что формально соответствует отрицательным углам, отсчитываемым от $\bar{r}$ в противоположном направлении. Поскольку физический смысл имеет только абсолютное значение угла давления, то в дальнейшем будем рассматривать функционал (10) в виде

$$I = \int_{t_0}^{t_1} |L(r, \alpha)| dt \quad (11)$$

с начальными условиями:

$$r(t_0) = r_0, \quad \alpha(t_0) = \alpha_0. \quad (12)$$

Реальные условия работы механизма ограничивают класс допустимых функций, минимизирующих функционал (11). Экстремальные кривые должны быть гладкими (непрерывно дифференцируемыми), проходить через полюс P , не содержать особые точки, в которых $v_j = 0$, и лежать в области $\theta \leq \theta_{\max}$, где $\theta_{\max}$ – максимально допустимый угол давления. Границу этой области определяет линия уровня $\theta = \text{const}$:

$$r = a_2(|\operatorname{tg} \theta| \cos \alpha - \sin \alpha). \quad (13)$$

На рисунке 4 показана рабочая область для $\theta_{\max} = 30^\circ$ и $i_{12} = 1/2$.

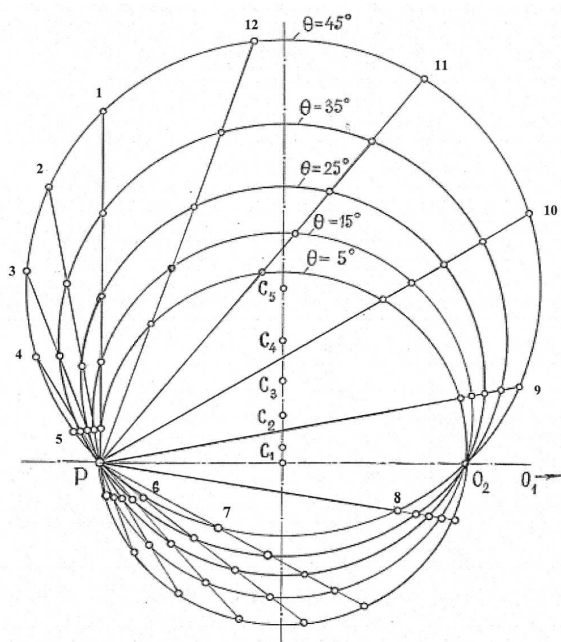


Рисунок 3 – ЛЗ при постоянных углах давления

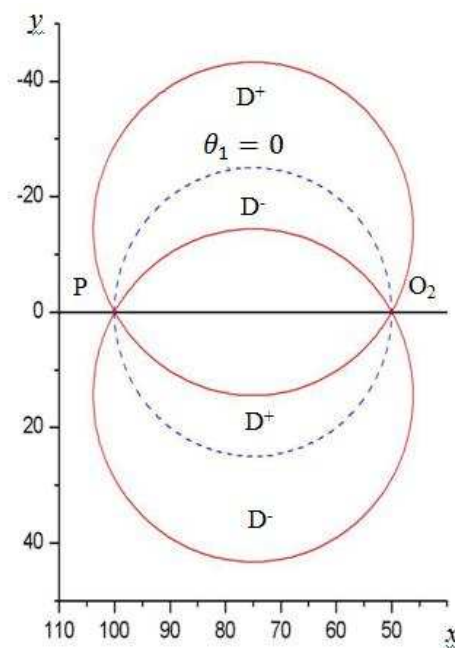


Рисунок 4 – Границы рабочей области

Вариационная задача (11), (12) решается совместно с уравнением связи (1). Исключив переменную α , получим задачу на безусловный экстремум для функционала (11) с подынтегральной функцией в виде

$$L(r, \dot{r}, t) = -\frac{r\dot{\phi}_2 + \sqrt{a_2^2 \dot{\phi}_2^2 - \dot{r}^2}}{\dot{r}}. \quad (14)$$

Наличие в подынтегральном выражении знака модуля определяет разбиение плоскости (x, y) на две области: D^+ (где $L > 0$) и D^- (где $L < 0$), в которых значения функционала отличаются знаком

$$I = \begin{cases} I^+, D = D^+ \\ I^-, D = D^- \end{cases}, \quad (15)$$

где $I = \int_{t_0}^{t_1} L(r, \dot{r}, t) dt$. При этом кривая, доставляющая минимум функционалу I в области D^+ доставляет

максимум в области D^- и наоборот. Нетрудно убедиться, что области $D^\pm$ определяются следующим образом (рисунок 4):

$$D^+ = \left\{ (x, y): y < 0, \left(x - \frac{a_2}{2}\right)^2 + y^2 > \frac{a_2^2}{4} \right\} \cup \left\{ (x, y): y > 0, \left(x - \frac{a_2}{2}\right)^2 + y^2 < \frac{a_2^2}{4} \right\},$$

$$D^- = \left\{ (x, y): y < 0, \left(x - \frac{a_2}{2}\right)^2 + y^2 < \frac{a_2^2}{4} \right\} \cup \left\{ (x, y): y > 0, \left(x - \frac{a_2}{2}\right)^2 + y^2 > \frac{a_2^2}{4} \right\}.$$

Одна из границ этих областей – окружность $\left(x - \frac{a_2}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a_2^2}{4}$, является линией уровня $\theta = 0$ (см. (13)). Кривая

$$r = -a_2 \sin \alpha, \quad \alpha = \alpha_0 + \varphi_2 t \quad (16)$$

доставляет абсолютный минимум функционала I (11). На другой границе областей D^+ и D^- – отрезке $|PO_2|$, $\theta = 90^\circ$ и функционал I достигает абсолютного максимума $I = \infty$.

Если начальная точка $M(r_0, \alpha_0)$ не лежит на кривой (16), то эта кривая не является решением задачи (11), (12). Для поиска других (локальных) экстремумов необходимо решить уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = 0. \quad (17)$$

Поскольку функция L (14) не зависит явно от времени ($\frac{\partial L}{\partial t} = 0$), то первый интеграл уравнения Эйлера (17) имеет вид:

$$L - \dot{r} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = C = \text{const}. \quad (18)$$

Дифференцируя L по переменной $\dot{r}$ и подставляя затем $\dot{r}$ из (1), получим решение (18) в виде функции угла зацепления α и параметра C :

$$r(\alpha, C) = \frac{a_2}{2} \left(C \cos \alpha - \sin \alpha - \frac{1}{\sin \alpha} \right). \quad (19)$$

Постоянная C в (19) определяется из начальных условий:

$$C = \frac{\left(2 \frac{r_0}{a_2} + \sin \alpha_0 + \frac{1}{\sin \alpha_0} \right)}{\cos \alpha_0}.$$

Семейство экстремалей 1, 2, ..., 6 для различных C показано на рисунке 5 на всей плоскости координат $x = a_1 + r \sin \alpha$, $y = -r \cos \alpha$.

Все кривые семейства проходят через точку O_2 с полярными координатами $r = -a_2$, $\alpha = 90^\circ$ и имеют асимптоту $x = a_1 - a_2/2$ (соответствующую углам $\alpha = \pi k$, k – целое). Экстремали с $C^2 > 8$ дважды пересекают полюс P , образуя петлю при $x > a_1$. Кроме того, как видно на рисунке, экстремали с противоположными значениями параметра C ($C = 3.5$ и $C = -3.5$) симметричны относительно оси $O_j x$ – межосевой линии (экстремали 2 и 6 на рисунке 5).

Для дальнейшего анализа удобно ввести переменную $u = ctg \alpha$ так, что

$$r = -\frac{a_2}{2} \sin \alpha (u^2 - Cu + 2), \quad L = tg \theta = \frac{1}{2} (C - u). \quad (20)$$

Из последнего выражения следует, что при

$$u_{\theta} = C \quad (21)$$

экстремаль пересекает линию уровня нулевого угла давления. Точки прохождения через полюс ($r = 0$) являются корнями квадратного уравнения в (20). Действительные корни существуют при $C^2 \geq 8$ и равны

$$u_{\theta}^{\pm} = \frac{C \pm \sqrt{C^2 - 8}}{2}. \quad (22)$$

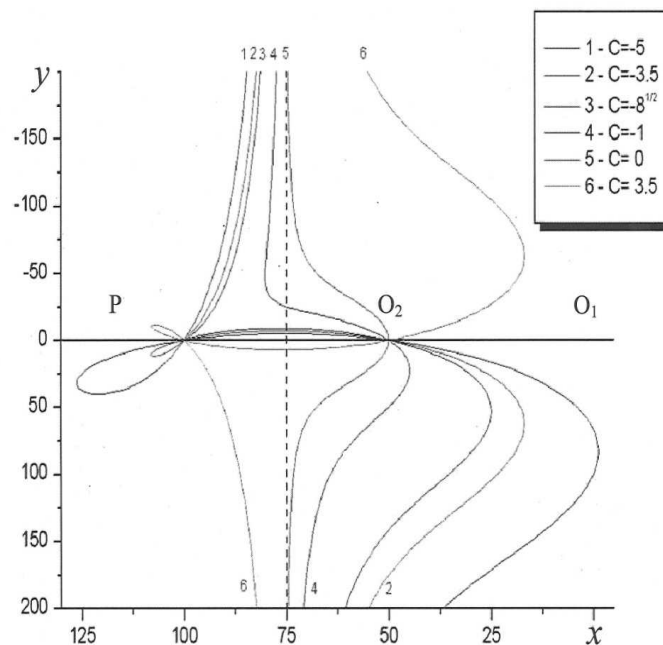


Рисунок 5 – Семейство экстремалей на плоскости

Представляют интерес также точки пересечения экстремали с границами рабочей области, определяемыми кривыми (13). Для точек пересечения с линиями уровня $\theta = \theta_{\max}$ получаем уравнение $u^2 - (C + 2|tg\theta_{\max}|)u = 0$, которое имеет корни $u = 0$ ($\alpha = 90^\circ$), соответствующие пересечению в точке O_2 и

$$u_{\max} = C + 2|tg\theta_{\max}|. \quad (23)$$

Таким образом, выражения (21), (22), (23) определяют углы прохождения экстремали через пограничные линии.

Для получения экстремали как функции от времени $r(t, C)$ продифференцируем (19) и воспользуемся вторым уравнением системы (1):

$$\dot{\alpha} = \frac{2u}{C - u^2} \dot{\varphi}_2. \quad (24)$$

Интегрируя (24), получим функциональную связь α с t в виде: $\varphi_2 = \dot{\varphi}_2 t = \Phi(\alpha) - \Phi(\alpha_0)$, где

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha + ctg\alpha - C \ln|\cos \alpha|). \quad (25)$$

Функция (25) стремится к бесконечности при $\alpha = \frac{\pi}{2}k$ и имеет экстремум в точке

$$\bar{u}_0 = ctg\bar{\alpha}_0 = \sqrt[3]{C}. \quad (26)$$

Из этого следует, что точки $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\bar{\alpha}_0$ делят интервал изменения угла зацепления $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ на 3 отрезка монотонности функции $\Phi(\alpha)$, на которых она допускает обращение в виде функции $\alpha(t)$. Соответствующие ветви функции $\alpha(\varphi_2)$ представлены на рисунке 6. Соответственно, экстремальная кривая (19) делится на 3 участка, только один из которых, в зависимости от выбора начальной точки,

проходится в реальном времени. Например, из рисунка 6 видно, что для точки контакта на экстремали с $C = 3.5$ и начальным углом $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ при увеличении угла ϕ_2 ($t \rightarrow \infty$) угол зацепления от значения α_0 стремится к $\alpha = 90^\circ$.

Участки допустимых экстремалей, лежащих в рабочей области, показаны на рисунке 7.

Проверим участки экстремалей, показанных на рисунке 7, на наличие особых точек. С учетом (1), (21) и (26) условие $v_j = 0$ записывается в виде:

$$v_j = -a_j \dot{\phi}_j \sin \alpha \left(1 + \frac{(u^2 - Cu + 2) \left(u - \frac{\dot{\phi}_j}{2\dot{\phi}_2} (C - u^2) \right)}{C - u^2} \right) = 0.$$

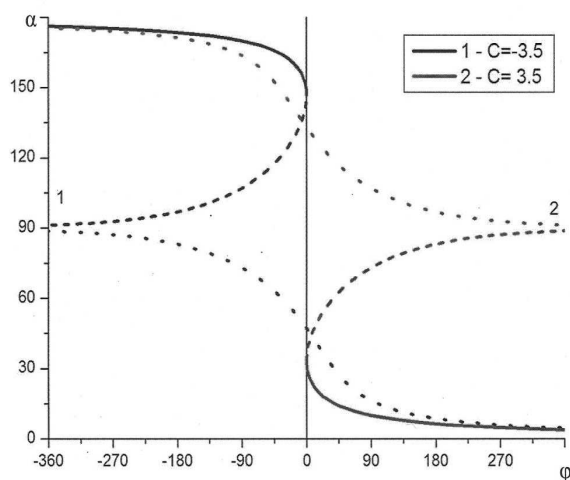


Рисунок 6 – Функция $\alpha(t)$

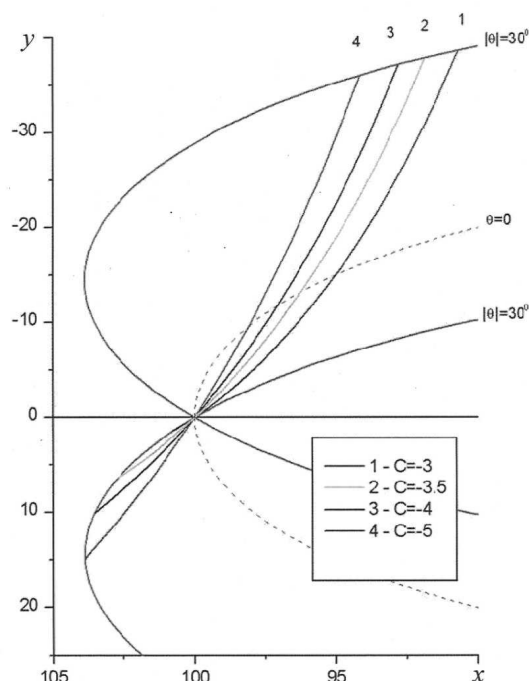


Рисунок 7 – Семейство экстремалей в рабочей области

При этом получается уравнение 5-ой степени относительно u , которое решается только численно. Тем не менее, можно сделать важные выводы, не прибегая к численным расчетам. Так, в точке пересечения экстремали с линией нулевого угла давления $u = u_0 = C$:

$$v_j|_{u=C} = -\frac{a_j \dot{\phi}_j \sin \alpha}{\dot{\phi}_2 (1 - C^2)} (3\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_j - C^2 (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_j)).$$

При $C > 1$ и $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ отсюда следует $v_j|_{u=C} > 0$. В то же время для точки прохождения экстремали через полюс ($r = 0$) из (1) следует $v_j = -a_j \dot{\phi}_j \sin \alpha < 0$. Таким образом, на участке между пересечением линии нулевого угла давления и полюсом экстремаль имеет особую точку $v_2 = 0$.

Осталось только определить характер экстремума на полученных кривых в рабочей области. Для этого воспользуемся условием Лежандра, формулирующим достаточное условие минимума (максимума) функционала требованием постоянства знака производной $\frac{\partial^2 |L|}{\partial \dot{r}^2}$ вдоль экстремали. Дифференцирование (14) и подстановка (19) дает результат в виде:

$$\frac{\partial^2 |L|}{\partial \dot{r}^2} = \begin{cases} \frac{C - u^2}{(a_2 \dot{\phi}_2 \cos \alpha)^2}, (r, \alpha) \in D^+ \\ -\frac{C - u^2}{(a_2 \dot{\phi}_2 \cos \alpha)^2}, (r, \alpha) \in D^- \end{cases}. \quad (27)$$

Рабочая область (рисунок 7) соответствует участкам экстремалей $\bar{\alpha}_0 < \alpha < 180^\circ$ на которых $u \leq \bar{u}_0 = \sqrt[3]{C}$ (26). Следовательно, $u^2 \leq C$ и дробь в правой части (27) неотрицательна. Согласно условию Лежандра это значит, что в рабочей области экстремали (19) дают минимум функционалу (11) в области D^+ и соответственно максимум в области D^- . Данные результаты подтверждаются численными расчетами интеграла (15) по экстремальной кривой (19) и близким к ней дугам окружностей.

Как было показано, рабочий участок экстремали, не содержащий особых точек и проходящий через полюс, расположен в области D^- , т.е. функционал угла давления достигает на этом участке локальный максимум. Соответственно локальный минимум достигается на рабочем участке экстремали без особых точек, целиком лежащим в области D^+ , но этот участок не проходит через полюс.

Выбрав в качестве примера экстремаль с $C \approx -3.23$, были рассчитаны функции профилей F_j j -го звена в координатах

$$x_j = a_j \cos \varphi_j + r \sin(\alpha - \varphi_j), \quad y_j = -a_j \sin \varphi_j - r \cos(\alpha - \varphi_j).$$

Результаты представлены на рисунке 8 для начальной точки M_0 с координатами $r_0 = -20$ мм, $\alpha_0 = 164^\circ$. Точка M на рисунке соответствует пересечению линии нулевого угла давления, P – полюс. Как и было отмечено, профиль 2-ого звена имеет особую точку вблизи точки M , поэтому рабочими участками будут либо M_0M , либо MP .

В то же время, если выбрать начальную точку на линии нулевого угла и использовать эту кривую в качестве линии зацепления, то на ней будет достигаться абсолютный минимум $I = 0$. Профили звеньев для этого случая показаны на рисунке 9.

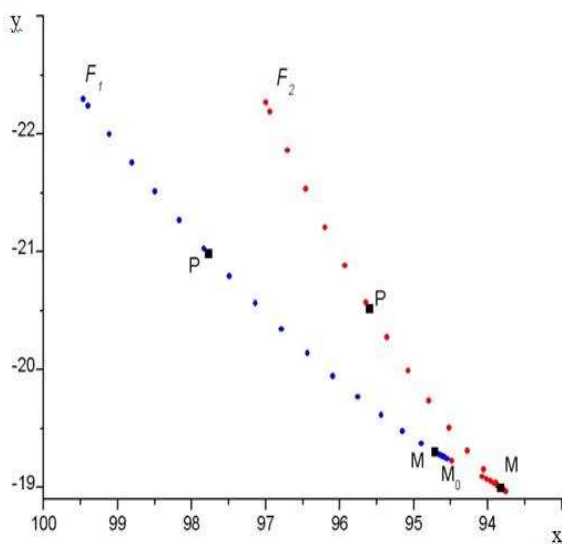


Рисунок 8 – Профили на экстремали ($C = -3,23$)

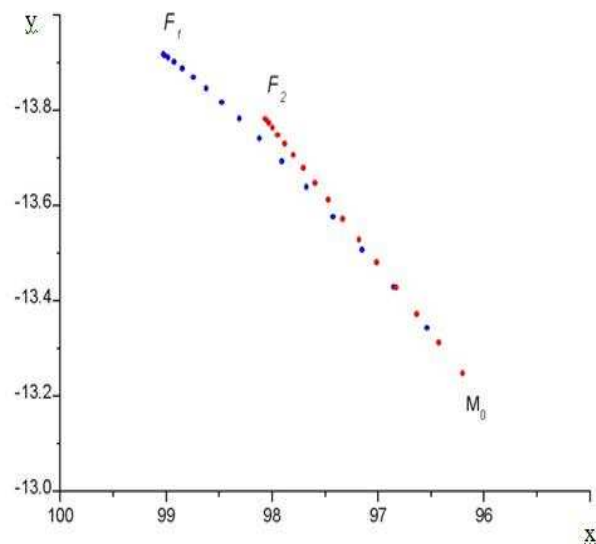


Рисунок 9 – Профили на линии уровня $\theta = 0$

Заключение

Таким образом, в результате сделанного анализа можно заключить:

1. На рабочих участках экстремалей функционал угла давления (11) достигает локального максимума в области D^- или локального минимума в области D^+ (но при этом экстремаль не проходит через полюс).
2. Абсолютный минимум достигается на линии уровня нулевого угла давления.

Библиографический список использованной литературы

1. Фролов К.В. Системная концепция и алгоритмы проектирования механизмов произвольной структуры / К.В. Фролов, В.П. Прохоров // Труды Всемирного Конгресса по ТММ. Оулу, Финляндия. – 1999. — Т. 2. — С. 689–694.
2. Frolov K.V. Structurization of the Basis of Knowledge in the Mechanisms of Machines and the Choice of Optimal Strategies of Research / K.V. Frolov, V.P. Prohorov // Proceedings of the 11th World Congress in Mechanism and Machine Science, Tianjin, China. — 2004. — P. 308–311.
3. Прохоров В.П. Аналитическая модель системы твердых тел произвольной структуры / В.П. Прохоров // Известия АН СССР. Сер.: Механика твердого тела. — 1986. — № 2. — С. 94–98.

4. Prohorov V.P. System conception of gearmechanisms research (The general theory of engagements) / V.P. Prohorov // Tenth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Oulu, Finland. — 1999. — Vol. 7. — P. 2684–2691.

5. Prohorov V.P. Actual Problems, Models and Algorithms of Technological Synthesis of General Type Engagements / V.P. Prohorov // 11th World Congress in Mechanisms and Machine Science, Tianjin, China. — 2004. — P. 289–292.

6. Прохоров В.П. Универсальные модели и алгоритмы синтеза трехзвенных механизмов произвольной структуры / В.П. Прохоров // Труды 2-й Всеросс. научн. конф. Часть 1. Математические модели механики, прочность и надежность конструкций. — Самара, 2005. — С. 248–250.

7. Прохоров В.П. Общая теория зацеплений / В.П. Прохоров // Надежность и долговечность механизмов, элементов конструкций и биомеханических систем: матер. междунар. науч.-техн. конф. — Севастополь: СевНТУ, 2005. — С. 44–54.

Поступила в редакцию 15.06.2011 г.

Прохоров В.П., Щипаков В.А. Синтез і однокритеріальна оптимізація плоских зачеплень по коефіцієнту корисної дії

Робота виконана в рамках загальної теорії плоских триланкових механізмів [1–3] і являється логічним розширенням [4] в області оптимізації. Розглянута актуальна задача однокритеріальної оптимізації зубчастої передачі по коефіцієнту корисної дії (ККД). Задача вирішена варіаційним методом Ейлера.

Ключові слова: триланковий механізм, зубчаста передача, оптимізація, коефіцієнт корисної дії

Prokhorov V.P., Schipakov V.A. Synthesis and one-criterion optimization of plain engagements by the efficiency criterion

This paper deals with the plain problem of one-criterion optimization of engagements with fixed axles and permanent gear ratio by the efficiency criterion. The urgency of this problem lies in potential possibility to improve the efficiency of gears. The algorithm of variational problem solution are is provided hereof.

Keywords: variational method, efficiency, optimization, plain engagements.