

УДК 621.01

А.М. Поляков, доцент, канд. техн. наук*Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: apolyakov.mail@gmail.com***АЛЬТЕРНАТИВНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ГРАСГОФА НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ МЕХАНИЗМА**

Приведен новый алгоритм доказательства теоремы Грасгофа о проворачиваемости шарнирного четырехзвенника. Необходимые условия проворачиваемости получены как необходимые и достаточные условия непрерывности на множестве вещественных чисел тригонометрических функций, аргументом которых является функция положения механизма. Достаточные условия и следствия из теоремы доказаны в процессе анализа кинематических передаточных функций высшего порядка. Алгоритм доказательства теоремы и ее следствий может быть использован для определения сингулярных конфигураций механизма при различных соотношениях между размерами звеньев, а также для оценки проворачиваемости многозвенных шарнирных механизмов с числом звеньев более четырех.

Ключевые слова: шарнирный четырехзвенник, теорема Грасгофа, кинематическая передаточная функция, сингулярная конфигурация.

Введение

В теории механизмов важную роль играют условия Грасгофа (F. Grashof) [1], устанавливающие соотношения между размерами звеньев шарнирного четырехзвенника, при которых обеспечивается полнооборотное движение звеньев (условия проворачиваемости). Несмотря на то, что их формулировка была дана Грасгофом еще в 1883 году, необходимость и достаточность доказана только в 1979 году Полом (B. Poul) [2] на основе неравенства треугольника. Позднее Уильямс (R. Williams) и Рейнольдс (C. Reinholtz) представили новое доказательство, полученное ими на основе анализа полиномиальных дискриминантов [3].

Анализ литературных источников позволяет отметить, что строгое доказательство условий Грасгофа, их необходимости и достаточности для полнооборотного движения звеньев послужило побудительным мотивом для новых исследований в данной области, в том числе и для механизмов с числом звеньев более четырех. Сначала Тинг (K. Ting) обосновал условия Грасгофа для пятизвенных кинематических цепей [4], а затем обобщил их на n -звенные кинематические цепи [5, 6]. Для пространственных четырехзвенников подобные условия были сформулированы Казеронианом (K. Kazerounian) и Солецки (R. Solecki) [7].

Строгое доказательство условий Грасгофа позволило Баркеру (C.R. Barker) классифицировать все множество шарнирных четырехзвенников, представив их в виде четырех классов грасгофова типа (Grashof type), четырех классов неграсгофова типа (non-Grashof type) и шести классов переходного типа (change point type) [8]. Позднее Мюррей (A.P. Murray) и Ларошель (P.M. Larochelle) разработали классификационные схемы плоских, сферических и пространственных шарнирных четырехзвенников [9], а Су (Haijun Su), совместно с коллегами – классификацию механизмов с вращательными и сферическими кинематическими парами [10]. Стационарные и нестационарные конфигурации четырехзвенников различных классов были исследованы Чангом (Wen-Tung Chang) с коллегами [11].

Отметим также, что условия Грасгофа, часто трактуемые в настоящее время как **теорема Грасгофа**, используются в процессе структурного и оптимального синтеза шарнирных механизмов.

Таким образом, краткий обзор, приведенный выше, в котором использован далеко не полный перечень литературных источников, посвященных теореме Грасгофа и ее приложениям, позволяет констатировать, что в настоящее время теорема строго доказана и имеет важное значение в теории механизмов и машин. Но с практической точки зрения определенный интерес представляют также методы и алгоритмы доказательства теоремы и ее следствий. Их подробный критический анализ – тема отдельной статьи, поэтому отметим лишь тот факт, что ни в одном из известных доказательств не использованы свойства кинематических передаточных функций высших порядков (первого и второго), которые определяются с учетом матрицы Якоби механизма. Так как анализ матрицы Якоби позволяет определять не только стационарные, но и сингулярные конфигурации механизма, то алгоритм доказательства теоремы, в котором учитываются ее свойства, можно считать наиболее общим. Кроме того, такой алгоритм является и наиболее естественным, т.к. основывается на классических методах математического анализа вещественных функций вещественного аргумента и лишь отчасти на особенностях механизма как связанной системы абсолютно твердых тел.

Для шарнирного четырехзвенника, кинематическая схема которого приведена на рисунке 1, теорема Грасгофа формулируется следующим образом:

– если сумма длин наибольшего и наименьшего звеньев меньше суммы двух остальных, то механизм является проворачиваемым, т.е. одно- или двухкривошипным.

Следствия из теоремы:

– если размеры звеньев механизма удовлетворяют теореме Грасгофа и стойкой (условно неподвижным звеном) является наименьшее звено, то механизм – двухкривошипный, если же стойкой является звено, образующее кинематическую пару с наименьшим – кривошипно-коромысловый. Во всех остальных случаях механизм – двухкоромысловый (не проворачиваемый).

Целью данной работы является доказательство теоремы Грасгофа и ее следствий одним из наиболее простых и естественных способов.

Исходя из контекста задачи о проворачиваемости шарнирного механизма¹ можно утверждать, что необходимым для проворачиваемости является условие непрерывности функции положения на множестве вещественных чисел R . Но при этом функция положения должна иметь также и непрерывные на R производные до второго порядка включительно – кинематические передаточные функции первого и второго порядка, соответственно. Таким образом, для проворачиваемости шарнирного механизма необходимо и достаточно, чтобы функция положения была непрерывна и имела непрерывные производные первого и второго порядка, определенные на множестве вещественных чисел R .

1. Необходимое условие проворачиваемости

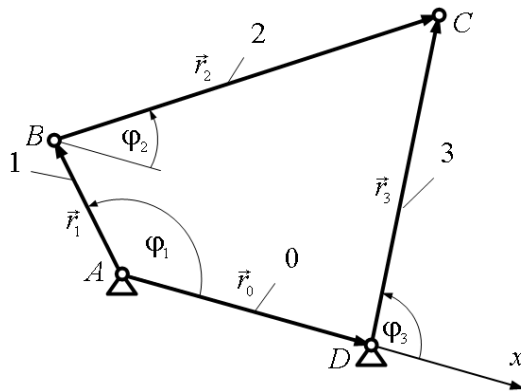


Рисунок 1 – Плоский шарнирный четырехзвенный механизм

Система идеальных связей, накладывающих ограничения на координаты и скорости точек звеньев механизма, показанного на рисунке 1, может быть представлена векторным равенством:

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \vec{r}_0 + \vec{r}_3.$$

Отметим, что это лишь одна из форм представления системы голономных, стационарных, удерживающих связей, свойственных данному механизму.

Обозначим длины звеньев механизма следующим образом: $l_{AD} = l_0$, $l_{AB} = l_1$, $l_{BC} = l_2$, $l_{CD} = l_3$. Поместив начало ортогональной декартовой системы координат в точку A и направив ось абсцисс x вдоль звена AD ², запишем векторное уравнение связей в проекциях на оси системы координат

$$l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 - l_3 \cos \varphi_3 - l_0 = 0, \quad (1)$$

$$l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 - l_3 \sin \varphi_3 = 0. \quad (2)$$

Устраним φ_2 из (1) и (2) и определим $\cos \varphi_3$ и $\sin \varphi_3$ как функции независимой обобщенной координаты φ_1 . Для этого перенесем $l_2 \cos \varphi_2$ и $l_2 \sin \varphi_2$ в правые части уравнений (1) и (2), возведем обе части полученных равенств в квадрат и сложим их почленно. После приведения подобных членов, получим

$$l_0^2 + l_1^2 + l_3^2 - l_2^2 - 2l_0l_1 \cos \varphi_1 - 2l_3(l_1 \cos \varphi_1 - l_0) \cos \varphi_3 = 2l_1l_3 \sin \varphi_1 \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_3}. \quad (3)$$

Обозначим: $A = l_0^2 + l_1^2 + l_3^2 - l_2^2 - 2l_0l_1 \cos \varphi_1$, $B = -2l_3(l_1 \cos \varphi_1 - l_0)$ и $C = -2l_1l_3 \sin \varphi_1$, тогда равенство (3) запишется так:

$$A + B \cos \varphi_3 = -C \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_3}, \quad (4)$$

¹ В этой статье доказываются условия проворачиваемости шарнирного четырехзвенника. Однако, алгоритм доказательства может быть использован и для определения условий проворачиваемости множества шарнирных механизмов с одной степенью свободы с числом звеньев более четырех, не имеющих избыточных связей.

² Ось ординат y направлена так, что соответствует правой системе координат. На рисунке 1 не обозначена, так как в дальнейшем нигде не используется.

Возведя левую и правую части (4) в квадрат, получим $(B^2 + C^2)\cos^2 \varphi_3 + 2AB\cos \varphi_3 + A^2 - C^2 = 0$ или $\cos^2 \varphi_3 + 2\frac{AB}{B^2 + C^2}\cos \varphi_3 + \frac{A^2 - C^2}{B^2 + C^2} = 0$, откуда следует, что $\cos \varphi_3 = -\frac{AB}{B^2 + C^2} \pm \sqrt{D_c}$, где $D_c = \frac{A^2 B^2 - (A^2 - C^2)(B^2 + C^2)}{(B^2 + C^2)^2}$.

Вычислим: $B^2 + C^2 = 4l_3^2(l_0^2 - 2l_0 l_1 \cos \varphi_1 + l_1^2)$ и дискриминант d квадратного трехчлена в скобках: $d = 4l_1^2(\cos^2 \varphi_1 - 1)$. Так как $\cos^2 \varphi_1 \leq 1$, то $d_{\max} = 0$ при $\varphi_1 = \pi n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Для всех других значений φ_1 $d < 0$. Следовательно, $B^2 + C^2 = 0$ только в случаях, когда $l_1 = l_0$ и одновременно $\varphi_1 = \pi n$, $n \in \mathbb{N}_0$. На данном этапе исключим из рассмотрения эти особые случаи и, для определенности, примем, например, что $l_0 > l_1$. Тогда $\forall \varphi_1 \in \mathbb{R}$ будем иметь $B^2 + C^2 > 0$ и

$$\cos \varphi_3 = \frac{-AB \pm \sqrt{A^2 B^2 - (A^2 - C^2)(B^2 + C^2)}}{B^2 + C^2} = \frac{-AB \pm C\sqrt{D^*}}{B^2 + C^2}, \quad (5)$$

где $D^* = B^2 + C^2 - A^2$.

Знаки "+" и "-" в выражении (5) соответствуют двум различным вариантам сборки механизма при одном и том же значении φ_1 .

Представим теперь выражение (4) следующим образом: $A + C \sin \varphi_3 = -B\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_3}$. Тогда, преобразуя данное равенство как и (4), запишем: $\sin \varphi_3 = -\frac{AC}{B^2 + C^2} \pm \sqrt{D_s}$, где

$D_s = \frac{A^2 C^2 - (A^2 - B^2)(B^2 + C^2)}{(B^2 + C^2)^2}$. Учитывая снова, что $B^2 + C^2 > 0$, получим:

$$\sin \varphi_3 = \frac{-AC \pm \sqrt{A^2 C^2 - (A^2 - B^2)(B^2 + C^2)}}{B^2 + C^2} = \frac{-AC \pm B\sqrt{D^*}}{B^2 + C^2}. \quad (6)$$

Выражения (5) и (6) представляют собой тригонометрические функции, аргументом которых является функция положения механизма $\varphi_3 = f(\varphi_1)$. Так как звенья 1 и 3 равноправны (в смысле проворачиваемости относительно стойки 0), то, принимая в качестве независимой обобщенной координаты φ_3 , можно получить аналогичные функции, аргументом которых будет функция положения $\varphi_1 = g(\varphi_3)$.

Для доказательства теоремы Грасгофа удобно использовать не саму функцию положения, а именно тригонометрические функции, определенные на $\mathbb{R}$, в которых она присутствует в качестве аргумента.

Очевидно, для того, чтобы функция положения $\varphi_3 = f(\varphi_1)$ была непрерывной, необходимо и достаточно, чтобы при условии $B^2 + C^2 > 0$ выражения (5) и (6) имели смысл и представляли собой непрерывные функции аргумента φ_3 . Другими словами: необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varphi_1 \in \mathbb{R}$ выполнялись неравенства

$$\left| -AB \pm C\sqrt{D^*} \right| \leq B^2 + C^2, \quad \left| -AC \pm B\sqrt{D^*} \right| \leq B^2 + C^2 \quad (7)$$

при условии $D^* \geq 0$.

Можно показать, что $\forall \varphi_1 \in \mathbb{R}$ при $D^* \geq 0$ неравенства (7) выполняются при любых A , B и C .

Пусть, например, $-AB \pm C\sqrt{D^*} < 0$. Тогда $AB \mp C\sqrt{D^*} \leq B^2 + C^2$ или $\mp C\sqrt{B^2 + C^2 - A^2} \leq B^2 + C^2 - AB$. Если левая часть полученного неравенства отрицательна, а правая неотрицательна, то оно выполняется всегда. Если же, например, обе части неравенства неотрицательны, то, возводя их в квадрат, получим $C^2(B^2 + C^2 - A^2) \leq [B^2 + C^2 - AB]^2$. После раскрытия скобок и приведения подобных представим данное неравенство в следующем виде: $(B^2 + C^2)(B - A)^2 \geq 0$. Так как

$B^2 + C^2 > 0$, а $(B - A)^2 \geq 0$, то это неравенство выполняется при любых A , B и C . Аналогично можно рассмотреть и другие случаи и, в результате, доказать, что при условиях $D^* \geq 0$ и $B^2 + C^2 > 0$ неравенства (7) выполняются всегда и, следовательно, выражения (5) и (6) представляют собой непрерывные функции аргумента φ_3 , если только $\forall \varphi_1 \in \mathbb{R} : D^* \geq 0$.

Таким образом, для того, чтобы функция положения механизма была непрерывной, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varphi_1 \in \mathbb{R}$ выполнялось неравенство $D^* \geq 0$ при условии $l_0 \neq l_1$ (ранее мы условно приняли, что $l_0 > l_1$).

Определим соотношения между размерами звеньев механизма, при которых выполняется неравенство $D^* \geq 0$. Переходя от принятых ранее упрощающих обозначений к исходным обозначениям параметров механизма, запишем:

$$D^* = B^2 + C^2 - A^2 = 4l_3^2(l_0^2 - 2l_0l_1 \cos \varphi_1 + l_1^2) - (l_0^2 + l_1^2 + l_3^2 - l_2^2 - 2l_0l_1 \cos \varphi_1)^2 \geq 0. \quad (8)$$

Разложив левую часть неравенства (8) на множители, получим:

$$4l_0^2l_1^2 \left(\cos \varphi_1 - \frac{l_0^2 + l_1^2 - (l_3 - l_2)^2}{2l_0l_1} \right) \cdot \left(\cos \varphi_1 - \frac{l_0^2 + l_1^2 - (l_3 + l_2)^2}{2l_0l_1} \right) \leq 0. \quad (9)$$

Неравенство (9) эквивалентно двум системам неравенств:

$$\begin{cases} \cos \varphi_1 \leq \frac{l_0^2 + l_1^2 - (l_3 - l_2)^2}{2l_0l_1} \\ \cos \varphi_1 \geq \frac{l_0^2 + l_1^2 - (l_3 + l_2)^2}{2l_0l_1} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \cos \varphi_1 \geq \frac{l_0^2 + l_1^2 - (l_3 - l_2)^2}{2l_0l_1} \\ \cos \varphi_1 \leq \frac{l_0^2 + l_1^2 - (l_3 + l_2)^2}{2l_0l_1} \end{cases}.$$

Проанализируем их, учитывая, что $-1 \leq \cos \varphi_1 \leq 1$, а значит, справедливы системы неравенств

$$\begin{cases} 1 \leq \frac{l_0^2 + l_1^2 - (l_3 - l_2)^2}{2l_0l_1} \\ -1 \geq \frac{l_0^2 + l_1^2 - (l_3 + l_2)^2}{2l_0l_1} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} -1 \geq \frac{l_0^2 + l_1^2 - (l_3 - l_2)^2}{2l_0l_1} \\ 1 \leq \frac{l_0^2 + l_1^2 - (l_3 + l_2)^2}{2l_0l_1} \end{cases}.$$

Учитывая, что $2l_0l_1 > 0$, представим их следующим образом:

$$\begin{cases} (l_0 - l_1)^2 \geq (l_3 - l_2)^2 \\ (l_0 + l_1)^2 \leq (l_3 + l_2)^2 \end{cases}, \quad (10)$$

$$\begin{cases} (l_0 + l_1)^2 \leq (l_3 - l_2)^2 \\ (l_0 - l_1)^2 \geq (l_3 + l_2)^2 \end{cases}. \quad (11)$$

Ранее было принято, что $l_0 > l_1$. Пусть также $l_3 \geq l_2$. Тогда

$$\begin{cases} l_0 - l_1 \geq l_3 - l_2 \\ l_0 + l_1 \leq l_3 + l_2 \end{cases}, \quad (12)$$

$$\begin{cases} l_0 + l_1 \leq l_3 - l_2 \\ l_0 - l_1 \geq l_3 + l_2 \end{cases}. \quad (13)$$

Легко заметить, что система (13) не имеет решений.

Умножим левую и правую части первого неравенства системы (12) на -1 : $\begin{cases} l_1 + l_3 \leq l_0 + l_2 \\ l_0 + l_1 \leq l_2 + l_3 \end{cases}$.

Складывая левые и правые части этой системы, получим: $l_1 \leq l_2$. Но, в силу принятого ранее условия, справедливо также следующее неравенство: $l_1 \leq l_3$.

Пусть теперь $l_0 < l_1$ и (как и в предыдущем случае) $l_3 \geq l_2$. Тогда из (10) и (11) получим:

$$\begin{cases} l_0 + l_3 \leq l_1 + l_2 \\ l_0 + l_1 \leq l_2 + l_3 \end{cases}, \quad (14)$$

$$\begin{cases} l_0 + l_1 \leq l_3 - l_2 \\ l_2 + l_3 \leq l_0 - l_1 \end{cases} \quad (15)$$

Система (15) решений не имеет, а из (14) следует, что $l_0 \leq l_2$, а значит и $l_0 \leq l_3$.

Произведем теперь анализ системы (12). В случае $l_0 > l_3$ в левой части второго неравенства стоит сумма длин наибольшего и наименьшего звеньев, а первое неравенство выполняется всегда, т.к. $l_3 - l_2 < l_0 - l_1$. В противоположном случае, т.е. при $l_0 < l_3$, сумма длин наибольшего и наименьшего звеньев стоит в левой части первого неравенства и теперь второе неравенство выполняется всегда, т.к. $l_0 - l_2 < l_3 - l_1$.

Точно также произведем и анализ системы (14). В случае $l_1 < l_3$ в левой части первого неравенства стоит сумма длин наибольшего и наименьшего звеньев, а второе выполняется всегда, т.к. $l_1 - l_2 < l_3 - l_0$. И, наконец, при $l_1 > l_3$ сумма длин наибольшего и наименьшего звеньев стоит в левой части второго неравенства и $l_3 - l_2 < l_1 - l_0$.

Аналогичные результаты получим также в случаях, когда поменяем индексы звеньев 1 и 3, т.к. в системе координат, связанной со звеном AD эти звенья можно считать равноправными (в смысле проворачиваемости). Но точно также можно было бы выбрать и системы координат, связанные со звеньями BC , AB или BD . В результате анализа механизма в этих системах координат мы получили бы те же соотношения, что и выше.

Таким образом, для того, чтобы функция положения была непрерывной на $\mathbb{R}$, необходимо и достаточно, чтобы сумма длин наибольшего и наименьшего звеньев не превышала сумму длин двух других звеньев. Это условие является необходимым для проворачиваемости механизма.

Отметим, что в отличие от условий Грасгофа, сформулированное выше необходимое условие проворачиваемости допускает и равенство сумм длин звеньев: наибольшего и наименьшего и двух других.

В случаях, когда (и только когда) $\varphi_1 = \pi n$, $n \in \mathbb{N}_0$ может выполняться равенство $B^2 + C^2 = 0$ при $l_0 = l_1$. Механизм при этом принимает особые (сингулярные) конфигурации, в которых все его звенья располагаются на одной прямой AD . Если принять систему координат с началом в точке D , т.е. кривошипом считать звено 3, то для существования сингулярных конфигураций необходимо, чтобы имело место равенство $l_0 = l_3$. В сингулярных конфигурациях механизм характеризуется неопределенностью движений звеньев вследствие того, что мгновенно приобретает дополнительную подвижность.

Если же на некоторых интервалах $\varphi_1 \in (a_n, b_n) \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ выполняется неравенство $D^* < 0$, то при заданных размерах звеньев механизм не может быть собран без их деформации. При этом граничные конфигурации при $\varphi_1 = a_n$ и $\varphi_1 = b_n$ также являются сингулярными, в которых механизм мгновенно теряет подвижность.

Обобщая сказанное, отметим, что во всех случаях, когда при $\varphi_1 \in (a_n, b_n) \subseteq [2\pi n, 2\pi(n+1)]$, $n \in \mathbb{N}_0$ функция положения не определена, механизм не может быть собран без деформации звеньев и, следовательно, не является проворачиваемым.

2. Достаточное условие проворачиваемости

Учитывая то, что звенья шарнирного четырехзвенника равноправны, выберем систему координат так же, как и при доказательстве необходимого условия проворачиваемости. В этом случае со стойкой неподвижно связано звено 0 (AD).

Продифференцируем уравнения (1) и (2) по φ_1 :

$$l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 \omega_{q2} - l_3 \sin \varphi_3 \omega_{q3} = 0, \quad (16)$$

$$l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 \omega_{q2} - l_3 \cos \varphi_3 \omega_{q3} = 0 \quad (17)$$

и представим систему (16) – (17) в матричной форме:

$$\mathfrak{Z}\Omega = \Theta, \quad (18)$$

где $\mathfrak{Z} = \begin{pmatrix} l_2 \sin \varphi_2 & -l_3 \sin \varphi_3 \\ l_2 \cos \varphi_2 & -l_3 \cos \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u(\varphi_2, \varphi_3)}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial u(\varphi_2, \varphi_3)}{\partial \varphi_3} \\ \frac{\partial v(\varphi_2, \varphi_3)}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial v(\varphi_2, \varphi_3)}{\partial \varphi_3} \end{pmatrix}$ – матрица Якоби механизма, u и v –

функции, представляющие собой левые части уравнений (1) и (2), соответственно; $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_{q2} \\ \omega_{q3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \\ \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \end{pmatrix}$ –

матрица-столбец кинематических передаточных функций первого порядка; $\Theta = \begin{pmatrix} -l_1 \sin \varphi_1 \\ -l_1 \cos \varphi_1 \end{pmatrix}$ – столбец свободных членов.

Если матрица Якоби неособенная, то ее определитель $\det \mathfrak{Z}$ (якобиан) отличен от нуля и решение уравнения (18) имеет вид:

$$\Omega = \mathfrak{Z}^{-1} \Theta, \quad (19)$$

где $\mathfrak{Z}^{-1}$ – матрица, обратная матрице Якоби. В условиях данной задачи получим:

$$\mathfrak{Z}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{l_3 \cos \varphi_3}{\det \mathfrak{Z}} & \frac{l_3 \sin \varphi_3}{\det \mathfrak{Z}} \\ -\frac{l_2 \cos \varphi_2}{\det \mathfrak{Z}} & \frac{l_2 \sin \varphi_2}{\det \mathfrak{Z}} \end{pmatrix},$$

где $\det \mathfrak{Z} = l_2 l_3 (\sin \varphi_3 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_2 \cos \varphi_3) = l_2 l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)$.

Таким образом,

$$\begin{pmatrix} \omega_{q2} \\ \omega_{q3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-l_1 l_3 \sin \varphi_1 \cos \varphi_3 + l_1 l_3 \cos \varphi_1 \sin \varphi_3}{\det \mathfrak{Z}} \\ \frac{-l_1 l_2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + l_1 l_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2}{\det \mathfrak{Z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)} \\ \frac{l_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}{l_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Продифференцируем теперь (16) и (17) по φ_1 и представим полученную таким образом систему в матричной форме:

$$\mathfrak{Z} E = -\frac{d\Theta}{d\varphi_1} - \frac{d\mathfrak{Z}}{d\varphi_1} \Omega^2, \quad (21)$$

где $E = \begin{pmatrix} \varepsilon_{q2} \\ \varepsilon_{q3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\omega_{q2}}{d\varphi_1} \\ \frac{d\omega_{q3}}{d\varphi_1} \end{pmatrix}$ – матрица-столбец кинематических передаточных функций второго порядка;

$\frac{d\Theta}{d\varphi_1} = \begin{pmatrix} l_1 \cos \varphi_1 \\ l_1 \sin \varphi_1 \end{pmatrix}$; $\frac{d\mathfrak{Z}}{d\varphi_1} = \begin{pmatrix} -l_2 \cos \varphi_2 & l_3 \cos \varphi_3 \\ l_2 \sin \varphi_2 & -l_3 \sin \varphi_3 \end{pmatrix}$; $\Omega^2 = \begin{pmatrix} \omega_{q2}^2 \\ \omega_{q3}^2 \end{pmatrix}$. Если $\det \mathfrak{Z} \neq 0$, будем иметь:

$$E = -\mathfrak{Z}^{-1} \left(\frac{d\Theta}{d\varphi_1} + \frac{d\mathfrak{Z}}{d\varphi_1} \Omega^2 \right). \quad (22)$$

Из (19) и (22) следует, что для непрерывности кинематических передаточных функций первого и второго порядка на множестве вещественных чисел $\mathbb{R}$ необходимо и достаточно, чтобы функция положения механизма была непрерывной (необходимое условие) и матрица Якоби была неособенной (достаточное условие) $\forall \varphi_1 \in \mathbb{R}$. Это условие является достаточным для проворачиваемости механизма.

Необходимо отметить, что достаточное условие, при выполнении которого $\det \mathfrak{Z} \neq 0$, устраняет и все сингулярные конфигурации, возможные в случаях, рассмотренных выше, в том числе и соответствующие частному случаю при $B^2 + C^2 = 0$.

3. Необходимые и достаточные условия существования одно- и двухкривошипного механизма

Для существования полнооборотного однокривошипного механизма необходимо и достаточно, чтобы функция положения была:

- а) непрерывной и имела непрерывные производные первого и второго порядка на $\mathbb{R}$;
- б) периодической с периодом $T = 2\pi$ и на отрезках $[2\pi n, 2\pi(n+1)] \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ имела как минимум два экстремума (один максимум и один минимум) или четное число экстремумов (равное число максимумов и минимумов);

Для существования двухкривошипного механизма необходимо и достаточно, чтобы функция положения была:

- а) непрерывной и имела непрерывные производные первого и второго порядка на $\mathbb{R}$;
- б) монотонной (возрастающей или убывающей) на $\mathbb{R}$.

Принимая во внимание (20) и необходимое условие экстремума $\omega_{q3} = 0$ непрерывной функции, получим:

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 \text{ и } \ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_2 + \pi, \quad (23)$$

где $\dot{\varphi}_1$, $\ddot{\varphi}_1$ – обобщенные координаты, соответствующие экстремумам функции положения $\varphi_3 = f(\varphi_1)$.

Запишем уравнения (1) и (2) с учетом (23):

$$l_1 \cos \dot{\varphi}_1 + l_2 \cos \dot{\varphi}_1 - l_3 \cos \varphi_3 - l_0 = (l_1 + l_2) \cos \dot{\varphi}_1 - l_3 \cos \varphi_3 - l_0 = 0, \quad (24)$$

$$l_1 \sin \dot{\varphi}_1 + l_2 \sin \dot{\varphi}_1 - l_3 \sin \varphi_3 = (l_1 + l_2) \sin \dot{\varphi}_1 - l_3 \sin \varphi_3 = 0, \quad (25)$$

$$l_1 \cos \ddot{\varphi}_1 + l_2 \cos(\ddot{\varphi}_1 - \pi) - l_3 \cos \varphi_3 - l_0 = (l_1 - l_2) \cos \ddot{\varphi}_1 - l_3 \cos \varphi_3 - l_0 = 0, \quad (26)$$

$$l_1 \sin \ddot{\varphi}_1 + l_2 \sin(\ddot{\varphi}_1 - \pi) - l_3 \sin \varphi_3 = (l_1 - l_2) \sin \ddot{\varphi}_1 - l_3 \sin \varphi_3 = 0, \quad (27)$$

Разрешив (24) – (25) и (26) – (27) относительно $\cos \varphi_3$ и $\sin \varphi_3$, получим:

$$\cos \varphi_3 = \frac{(l_1 + l_2)^2 - l_0^2 - l_3^2}{2l_0 l_3}, \quad \sin \varphi_3 = \frac{(l_1 - l_2)^2 - l_0^2 - l_3^2}{2l_0 l_3}.$$

Для того чтобы выполнялось необходимое условие экстремума функции положения, $\forall \dot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_1 \in [0, 2\pi]$ должны одновременно выполняться неравенства

$$-1 \leq \frac{(l_1 + l_2)^2 - l_0^2 - l_3^2}{2l_0 l_3} \leq 1, \quad (28)$$

$$-1 \leq \frac{(l_1 - l_2)^2 - l_0^2 - l_3^2}{2l_0 l_3} \leq 1, \quad (29)$$

которые эквивалентны двум системам неравенств:

$$\begin{cases} (l_1 + l_2)^2 \geq (l_0 - l_3)^2 \\ l_1 + l_2 \leq l_0 + l_3 \end{cases}, \quad (30)$$

$$\begin{cases} (l_1 - l_2)^2 \geq (l_0 - l_3)^2 \\ (l_1 - l_2)^2 \leq (l_0 + l_3)^2 \end{cases}. \quad (31)$$

В этом случае механизм однокривошипный (кривошипом является звено 1).

Предположим, что $l_0 \geq l_3$, тогда систему (30) запишем в следующем виде: $\begin{cases} l_1 + l_2 \geq l_0 - l_3 \\ l_1 + l_2 \leq l_0 + l_3 \end{cases}$. Из второго неравенства получим, что $l_0 - l_1 \geq l_2 - l_3$, и, следовательно, стойка 0 имеет максимальную длину (l_0), а кривошип 1 – минимальную (l_1).

Рассмотрим теперь систему (31), учтя, что $l_2 \geq l_1$. Получим: $\begin{cases} l_2 - l_1 \geq l_0 - l_3 \\ l_2 - l_1 \leq l_0 + l_3 \end{cases}$ или

$$\begin{cases} l_2 + l_3 \geq l_0 + l_1 \\ l_0 - l_1 \geq l_2 - l_3 \end{cases}. \quad (32)$$

Предположив, что $l_3 > l_0$ и $l_2 \geq l_1$ в результате аналогичных рассуждений получим систему:

$$\begin{cases} l_2 + l_0 \geq l_3 + l_1 \\ l_3 - l_1 \geq l_2 - l_0 \end{cases} \quad (33)$$

И, наконец, рассматривая случаи, в которых $l_1 > l_2$, придем к выводу, что системы (30) – (31) оказываются несовместными.

Таким образом, системы (32) и (33) совместно представляют собой необходимое условие существования однокривошипного механизма, которое не противоречит ранее сформулированному необходимому и достаточному условию проворачиваемости. Кроме того установлено, что *для существования однокривошипного механизма необходимо, чтобы наименьшим было звено, образующее кинематическую пару со стойкой.*

Кривошипом может быть как звено 1, так и звено 3. В этом можно легко убедиться, выбрав на начальном этапе доказательства систему координат, связанную с точкой D , а в качестве обобщенной координаты φ_3 – угол поворота звена 3.

Для доказательства достаточности существования однокривошипного механизма произведем анализ кинематической передаточной функции второго порядка $\varepsilon_{q3} = \frac{d\omega_{q3}}{d\varphi_1}$ при одном из условий (23),

например при $\dot{\varphi}_1 = \varphi_2$. Достаточным для того, чтобы непрерывная функция $\varphi_3 = f(\varphi_1)$ принимала экстремальное значение, является условие $\varepsilon_{q3} = \frac{d\omega_{q3}}{d\varphi_1} = \frac{d^2\varphi_3}{d\varphi_1^2} \neq 0$. Если это условие выполняется при $\dot{\varphi}_1 = \varphi_2$, оно должно обязательно выполняться и при $\ddot{\varphi}_1 = \varphi_2 + \pi$.

Продифференцируем вторую строку из (20) по φ_1 :

$$\varepsilon_{q3} = \frac{1}{l_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)} \cdot \left(-l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{l_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_3)}{l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)} + \frac{l_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) \cos(\varphi_2 - \varphi_3)}{l_3 \sin^2(\varphi_2 - \varphi_3)} \right).$$

После подстановки $\varphi_1 = \varphi_2$, получим: $\varepsilon_{q3} = \frac{l_1(l_1 + l_2)}{l_2^2 \sin(\varphi_3 - \varphi_1)} \neq 0$.

Отметим, что равенство $\sin(\varphi_3 - \varphi_1) = 0$ возможно только в случаях $l_1 + l_2 = l_0 + l_3$ или $l_3 + l_2 = l_0 + l_1$, т.е. если сумма длин наибольшего и наименьшего звеньев равна сумме длин двух других звеньев. Такие соотношения между размерами звеньев соответствуют сингулярным конфигурациям, в которых звенья механизма располагаются на одной линии, совпадающей со стойкой 0.

Таким образом, *для того чтобы механизм был однокривошипным необходимо и достаточно, чтобы сумма длин наибольшего и наименьшего звеньев была меньше суммы длин двух других звеньев и стойкой являлось звено, образующее кинематическую пару с наименьшим звеном.*

В случаях, когда механизм двухкривошипный, непрерывная функция положения $\varphi_3 = f(\varphi_1)$ должна быть монотонной на отрезке $\varphi_1 \in [0, 2\pi]$, и, следовательно, не иметь экстремумов. Тогда, если кинематическая передаточная функция первого порядка $\omega_{q3} = \omega_{q3}(\varphi_1)$ не равна нулю, то $\forall \varphi_1 \in [0, 2\pi]$ должны выполняться одновременно два неравенства

$$\frac{(l_1 + l_2)^2 - l_0^2 - l_3^2}{2l_0l_3} > 1 \quad \text{и} \quad \frac{(l_1 - l_2)^2 - l_0^2 - l_3^2}{2l_0l_3} < -1,$$

которые эквивалентны системе неравенств

$$\begin{cases} l_1 + l_2 > l_0 + l_3 \\ (l_1 - l_2)^2 < (l_0 - l_3)^2 \end{cases} \quad (34)$$

Из первого неравенства системы (33) следует, что $l_3 > l_0$, так как в противном случае, как было показано выше – механизм однокривошипный.

Второе неравенство рассмотрим для двух вариантов: при $l_1 \geq l_2$ и $l_2 > l_1$. В первом случае получим: $l_1 - l_2 < l_3 - l_0$ или $l_1 + l_0 < l_3 + l_2$. Таким образом, звено 1 – наибольшее, а звено 0 – наименьшее. Во втором случае имеем: $l_2 - l_1 < l_3 - l_0$ или $l_2 + l_0 < l_3 + l_1$. Следовательно, звено 2 – наибольшее, а звено

0 – наименьшее. И, наконец, в случае, когда наибольшим является звено 3, получим: $|l_1 - l_2| < l_3 - l_0$ и, таким образом, звено 0, как и в первых двух случаях, наименьшее.

Систематизируя вышеизложенное, запишем три системы неравенств:

$$\begin{cases} l_1 + l_0 < l_3 + l_2 \\ l_1 - l_0 > |l_3 - l_2| \end{cases}, \begin{cases} l_2 + l_0 < l_3 + l_1 \\ l_2 - l_0 > |l_3 - l_1| \end{cases}, \begin{cases} l_3 + l_0 < l_1 + l_2 \\ l_3 - l_0 > |l_1 - l_2| \end{cases}. \quad (35)$$

Системы (35) представляют собой достаточное условие существования двухкривошипного механизма, которое не противоречит необходимому и достаточному условию проворачиваемости, но усиливает его. То есть для того, чтобы механизм был двухкривошипным необходимо и достаточно, чтобы сумма длин наибольшего и наименьшего звеньев была бы меньше суммы длин двух других звеньев и при этом наименьшим звеном была бы стойка.

4. Обсуждение результатов

В качестве иллюстраций на рисунках 2 – 5 приведены планы положений и кинематические передаточные функции шарнирных четырехзвенников при двух возможных вариантах сборки и различных соотношениями между размерами звеньев. Их элементарный анализ свидетельствует о том, что как абсолютные значения размеров, так и соотношения между ними оказывают существенное влияние на кинематику механизмов. Следовательно, условия Грасгофа могут быть использованы наряду с другими условиями при синтезе механизмов с желаемыми свойствами.

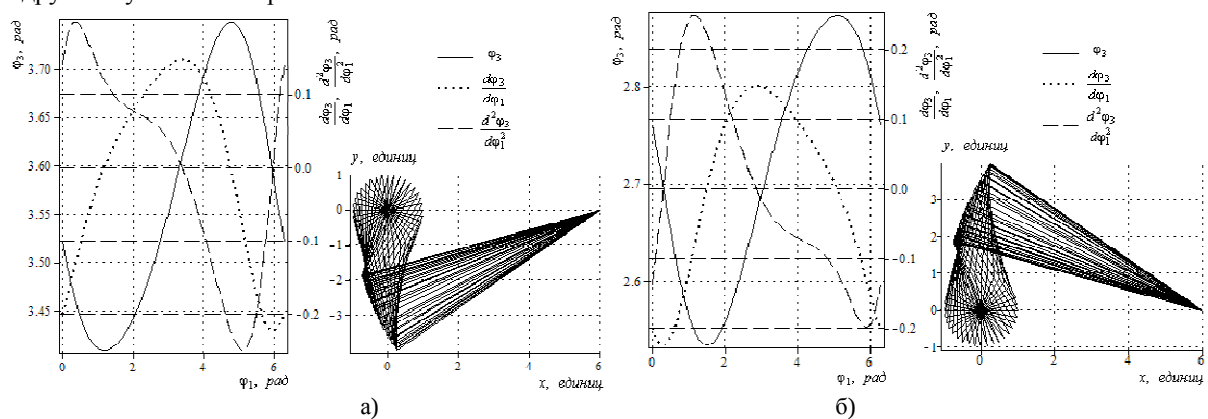


Рисунок 2 – Кинематические передаточные функции и планы положений однокривошипного механизма.

$l_{\max} = l_3 = 7$; $l_{\min} = l_1 = 1$; $l_{m1} = l_0 = 6$; $l_{m2} = l_2 = 3$: а) вариант сборки 1; б) вариант сборки 2

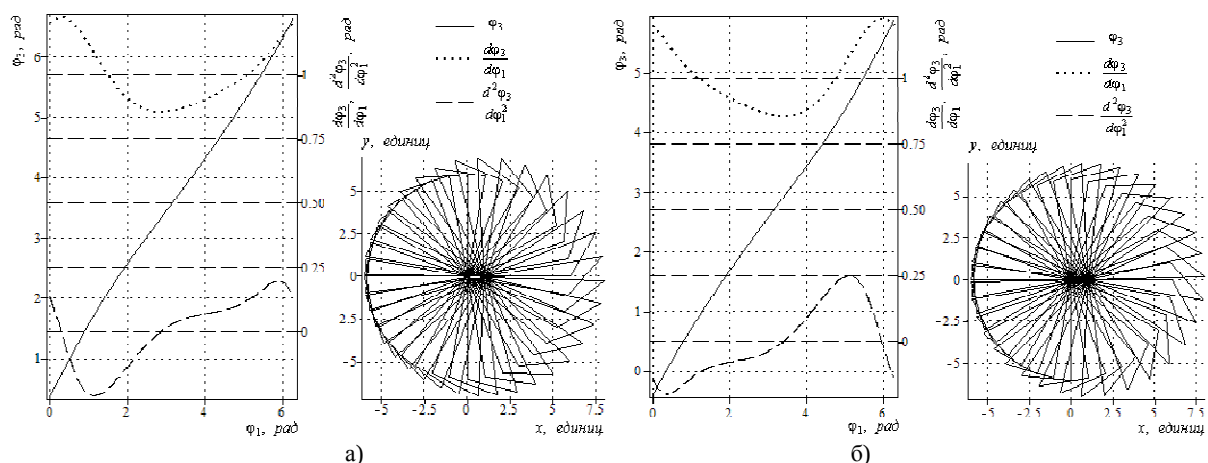


Рисунок 3 – Кинематические передаточные функции и планы положений двухкривошипного механизма.

$l_{\max} = l_3 = 7$; $l_{\min} = l_0 = 1$; $l_{m1} = l_1 = 6$; $l_{m2} = l_2 = 3$: а) вариант сборки 1; б) вариант сборки 2

Из представленного доказательства теоремы Грасгофа следует, что необходимые и достаточные условия проворачиваемости шарнирного четырехзвенника могут быть записаны так: $\forall \varphi_1 \in \mathbb{R} : D^* \geq 0$, $\det \mathfrak{Z} \neq 0$. Проиллюстрируем эти условия на примерах механизмов, у которых сумма длин наибольшего $l_{\max}$ и наименьшего $l_{\min}$ звеньев больше, равна или меньше суммы длин l_{m1} и l_{m2} двух других звеньев.

На рисунке 6а показано, что кривая $D^* = D^*(\varphi_1)$ при длинах звеньев, удовлетворяющих условию

проворачиваемости $l_{\max} + l_{\min} < l_{m1} + l_{m2}$, располагается выше двух других, и нигде не пересекает линию $D^* = 0$, в отличие от кривой, построенной при длинах звеньев, соответствующих условию $l_{\max} + l_{\min} > l_{m1} + l_{m2}$, часть которой находится в области невозможной сборки механизма.

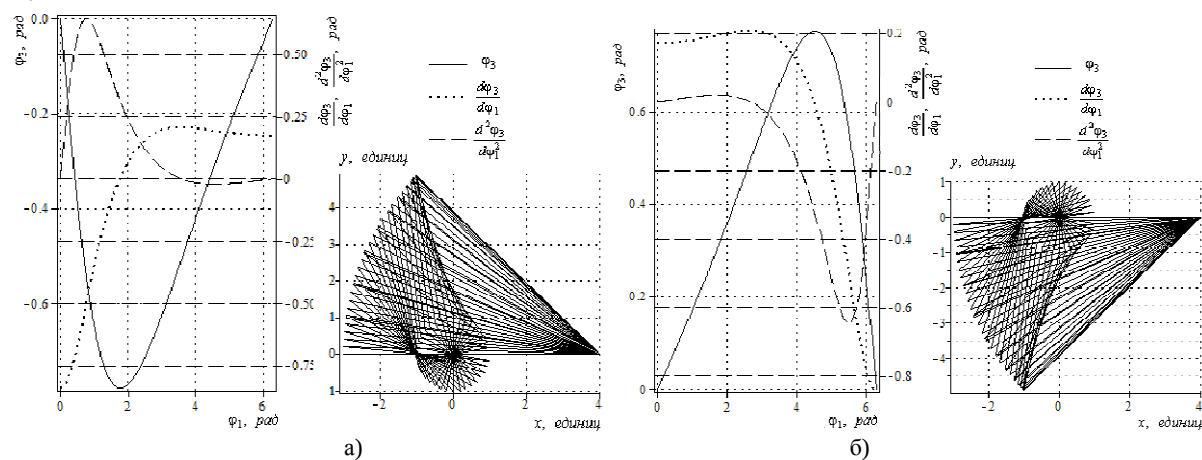


Рисунок 4 – Кинематические передаточные функции и планы положений механизма с неопределенностью движений звеньев. $l_{\max} = l_3 = 7$; $l_{\min} = l_1 = 1$; $l_{m1} = l_0 = 4$; $l_{m2} = l_2 = 4$: а) вариант сборки 1; б) вариант сборки 2

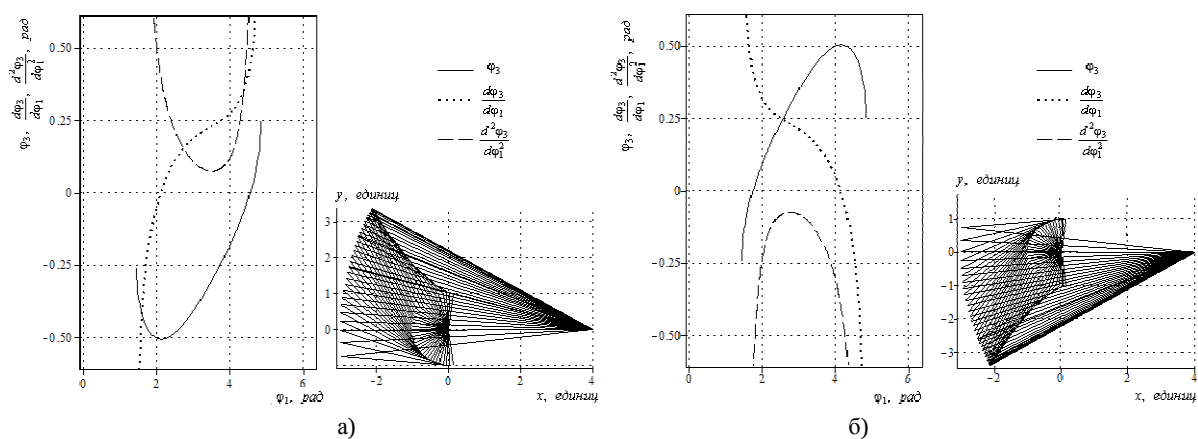


Рисунок 5 – Кинематические передаточные функции и планы положений непроворачиваемого механизма. $l_{\max} = l_3 = 7$; $l_{\min} = l_1 = 1$; $l_{m1} = l_0 = 4$; $l_{m2} = l_2 = 3$: а) вариант сборки 1; б) вариант сборки 2

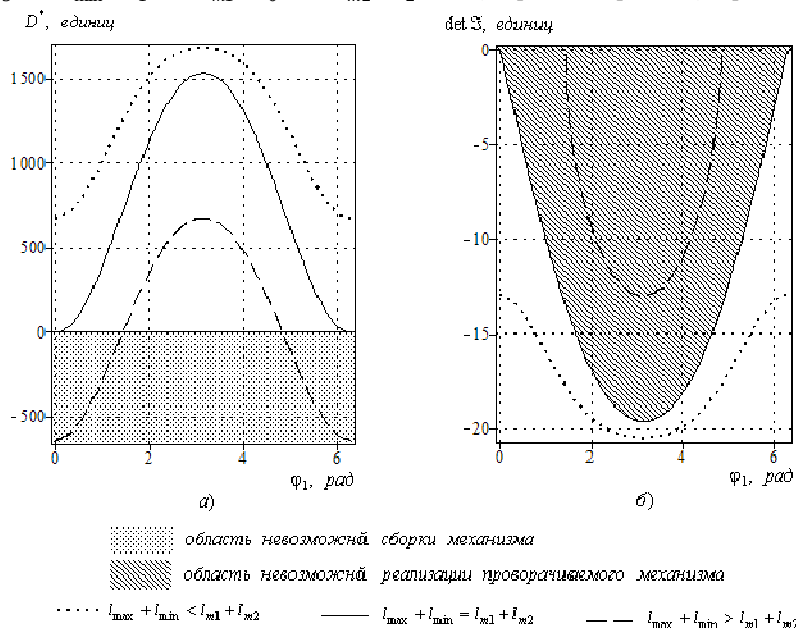


Рисунок 6 – Графики функций $D^* = D^*(\phi_1)$ (а) и $\det Z = \det Z(\phi_1)$ (б) на отрезке $[0, 2\pi]$ при различных соотношениях длин звеньев

Следует отметить, что при соотношениях длин звеньев, усиливающих неравенство $l_{\max} + l_{\min} < l_{m1} + l_{m2}$, кривая $D^* = D^*(\varphi_1)$ удаляется от линии $D^* = 0$ и если сумма длин звеньев фиксирована и равна $l_{\min} + l_{m1} + l_{m2} + l_{\max} = L$, то при некоторых соотношениях длин занимает наивысшее положение. Наоборот, при соотношениях длин звеньев, усиливающих неравенство $l_{\max} + l_{\min} > l_{m1} + l_{m2}$, все большая часть кривой $D^* = D^*(\varphi_1)$ располагается в области невозможной сборки механизма, а при некоторых соотношениях может полностью находиться в этой области. При этом, очевидно, механизм вообще не может быть собран без деформации звеньев и его конфигурационное пространство представляет собой пустое множество.

При длинах звеньев, удовлетворяющих условию $l_{\max} + l_{\min} = l_{m1} + l_{m2}$, кривая $D^* = D^*(\varphi_1)$ касается линии $D^* = 0$ при $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_1 = 2\pi$. В особом случае, когда $l_0 = l_1$ (или $l_0 = l_3$), она касается линии $D^* = 0$ еще и при $\varphi_1 = \pi$. Как было отмечено выше, механизм при этом принимает сингулярные конфигурации и характеризуется мгновенной неопределенностью движений звеньев, приобретая мгновенно дополнительную подвижность. Отметим, что при изменении соотношений между длинами звеньев, удовлетворяющих условию $l_{\max} + l_{\min} = l_{m1} + l_{m2}$ кривая $D^* = D^*(\varphi_1)$ лишь деформируется и касается линии $D^* = 0$ в точках, отмеченных выше.

На рисунке 6б показано, что кривая $\det \mathcal{Z} = \det \mathcal{Z}(\varphi_1)$ при длинах звеньев, соответствующих условию $l_{\max} + l_{\min} < l_{m1} + l_{m2}$ наиболее удалена от линии $\det \mathcal{Z} = 0$ и не касается ее в отличие от двух других. Кривая $\det \mathcal{Z} = \det \mathcal{Z}(\varphi_1)$, соответствующая условию $l_{\max} + l_{\min} = l_{m1} + l_{m2}$, касается линии $\det \mathcal{Z} = 0$ при $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_1 = 2\pi$.

Анализируя (20), заметим, что $\det \mathcal{Z} = 0$ при $\sin(\varphi_3 - \varphi_2) = 0$. В этом случае механизм мгновенно теряет подвижность и приобретает сингулярные конфигурации. Если к тому же $\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ и $\sin(\varphi_1 - \varphi_3) = 0$, то имеет место неопределенность движения звеньев. При этом все звенья механизма располагаются на одной линии AD , механизм мгновенно приобретает дополнительную подвижность и также принимает сингулярные конфигурации. Но эти два вида сингулярности следует различать друг от друга. Первая из них может иметь место только при определенных соотношениях размеров звеньев и при выполнении обобщенного условия $l_{\max} + l_{\min} \geq l_{m1} + l_{m2}$. Такая сингулярность может быть названа граничной. Вторая же реализуется всегда при условии $l_{\max} + l_{\min} = l_{m1} + l_{m2}$ при $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_1 = 2\pi$.

Кривая $\det \mathcal{Z} = \det \mathcal{Z}(\varphi_1)$ при длинах звеньев, соответствующих условию $l_{\max} + l_{\min} = l_{m1} + l_{m2}$ ограничивает область невозможной реализации проворачиваемого механизма. Внутри этой области находится кривая, соответствующая условию $l_{\max} + l_{\min} > l_{m1} + l_{m2}$. При изменении соотношений между длинами звеньев так, что неравенство усиливается, область определения этой кривой все более уменьшается и, наоборот.

Отмеченные выше свойства дискриминанта D^* и якобиана $\det \mathcal{Z}$ механизма могут быть использованы при оптимальном синтезе шарнирных механизмов, в том числе и многозвенных. Так, например, учитывая характер расположения кривой $\det \mathcal{Z} = \det \mathcal{Z}(\varphi_1)$ по отношению к линии $\det \mathcal{Z} = 0$, можно обоснованно предполагать, что «наилучшими» с точки зрения проворачиваемости механизма являются соотношения между звеньями, при которых норма якобиана $\|\det \mathcal{Z}\| = \int_0^{2\pi} \det \mathcal{Z}^2 d\varphi_1$ максимальна.

При этом могут быть учтены и другие критерии качества, характеризующие условия работы механизма.

5. Заключение

Доказательство теоремы Грасгофа представлено на основе анализа кинематических передаточных функций шарнирного четырехзвенника. Необходимое условие проворачиваемости получено в результате анализа функции положения и условий ее непрерывности на множестве вещественных чисел, достаточное условие – из условий непрерывности на множестве вещественных чисел кинематических передаточных функций первого и второго порядка. Следствия теоремы получены из достаточного условия проворачиваемости с учетом того, что функция положения однокривошипного механизма периодическая, а двухкривошипного – монотонная (возрастающая или убывающая) на множестве вещественных чисел.

Использованная при доказательстве функция положения получена из уравнений связей, накладывающих ограничения на положения и скорости точек звеньев механизма. Поскольку такой подход является наиболее общим для шарнирных механизмов, то аналогичным образом могут быть

получены и исследованы функции положения многозвенных механизмов с числом звеньев более четырех и, в том числе, пространственных. Следовательно, алгоритм доказательства может быть использован для получения условий, аналогичных условиям Грасгофа, для механизмов с более сложной структурой и, в связи с этим, представляется наиболее простым и естественным. При этом единственная особенность алгоритма, в отличие от использованного при решении данной задачи, будет заключаться в анализе систем более двух нелинейных уравнений связей. Ясно, что аналитический анализ таких систем может быть достаточно сложным, невозможным или, по крайней мере, не желательным с практической точки зрения, т.к. математические выражения, подлежащие анализу, могут быть весьма громоздкими. В связи с этим *актуальными являются задачи, связанные с определением условий проворачиваемости многозвенных шарнирных механизмов численными или численно-аналитическими методами.* При этом алгоритмы решения таких задач должны предусматривать возможность получения всего множества решений.

Следует отметить, что необходимое условие проворачиваемости включает в себя и случаи, при которых механизм принимает сингулярные конфигурации и движения его звеньев однозначно не определены. Это происходит вследствие того, что механизм мгновенно приобретает дополнительную подвижность и, следовательно, в данных конфигурациях имеет не одну, а две степени свободы. Достаточное условие проворачиваемости исключает все сингулярные конфигурации, несмотря на то, что, в принципе, механизм в этих конфигурациях является проворачиваемым, но при выходе из них может принять одну из двух бесконечно близких равновозможных конфигураций. Теорема Грасгофа не определяет однозначность движений звеньев при переходе от сингулярных конфигураций к бесконечно близким к ним и механизмы с возможными сингулярными конфигурациями исключаются из множества проворачиваемых. С точки зрения геометрии (кинематики) задача выхода механизма из сингулярных конфигураций не может быть решена. Однако ее решение возможно с точки зрения динамики, если мгновенно возникающая дополнительная подвижность определяется с учетом действующих на звенья механизма сил.

В разделе 4 показано, что необходимые и достаточные условия проворачиваемости шарнирного четырехзвенника: $\forall \varphi_1 \in R : D^* \geq 0, \det Z \neq 0$. Однако эти же условия справедливы и для непроворачиваемых механизмов, если задать их на некоторой области определения $\varphi_1 \in (c_n, d_n), n \in N_0$, где $(c_n, d_n) \subset [2\pi n, 2\pi(n+1)] \subseteq R$. Существует множество шарнирных механизмов, которые в процессе работы не совершают полнооборотных движений. Это механизмы землеройных и подъемно-транспортных машин, захватных и манипуляционных систем роботов, приводов питателей и др. При их синтезе условия проворачиваемости в заданном областью определения функции положения интервале имеют важное значение.

Например, в последнее время шарнирный четырехзвенник используется в качестве основного механизма искусственного коленного сустава в протезах нижней конечности человека при трансформальной ампутации. По функциональному назначению этот механизм неполнооборотный, а одним из основных критериев его качества является расположение и форма центроиды в относительном движении стойки и шатуна (и, наоборот). В заданном диапазоне движений он должен быть проворачиваемым и удовлетворять другим критериям качества, например, ограниченным углам давления в кинематических парах. В задачах оптимального синтеза этого механизма с учетом множества критериев качества, критерий максимальной нормы якобиана на отрезке $[c_0, d_0] \in [0, 2\pi]$ может оказаться достаточно значимым.

Тот факт, что теорема Грасгофа может трактоваться как формулировка условий, обеспечивающих непрерывность функции положения шарнирного четырехзвенника и ее первых двух производных на множестве вещественных чисел, позволяет сформулировать обобщенное условие проворачиваемости шарнирных механизмов. А именно:

– *многозвенный шарнирный механизм с вращающимся входным звеном является проворачиваемым, если его функция положения, первая и вторая производные непрерывны и дифференцируемы³ на множестве вещественных чисел R .*

Использование этого условия позволяет решать задачи синтеза проворачиваемых механизмов не только с регулярными, но и с избыточными связями. При этом, если при произвольных значениях кинематических параметров, которые могут быть заданы в общем случае, механизм с избыточными связями согласно формуле Сомова-Малышева обладает, например, отрицательным числом степеней свободы, то для частных случаев могут быть найдены такие соотношения между этими параметрами при

³ Условие дифференцируемости функции положения и ее первой производной определяется невырожденностью матрицы Якоби и выполняется для проворачиваемых механизмов. Случаи, когда функция положения непрерывна, но не дифференцируема характерны для механизмов с сингулярностями при которых механизм мгновенно приобретает дополнительную подвижность.

которых функция положения и ее первые производные будут представлять собой непрерывные и дифференцируемые на множестве вещественных чисел функции. В таких частных случаях механизм будет проворачиваемым. В качестве примеров таких механизмов можно привести множество пространственных механизмов Беннета, которые, как показано в [13] имеют три избыточных связи и, соответственно, число степеней свободы $W = -2$, но являются проворачиваемыми.

Бібліографічний список використаної літератури

1. Grashof F. Theoretische Maschinenlehre / F. Grashof. — Leipzig: 1883. — P. 113–118.
2. Paul B. A Reassessment of Grashof's Criterion / B. Paul // Journal of Mechanical Design. — 1979. — Vol. 101, № 3. — P. 515–518.
3. Williams R.L. Proof of Grashof's Law Using Polynomial Discriminants / R.L. Williams, C.F. Reinholtz // ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design. — 1986. — Vol. 108, №4. — P. 562–564.
4. Ting K.L. Five-bar Grashof Criteria / K.L. Ting // ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design. — 1986. — Vol. 108, №4. — P. 533–537.
5. Ting K.L. Mobility Criteria of Single-loop N-Bar Linkages / K.L. Ting // ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design. — 1989. — Vol. 111, № 4. — P. 504–507.
6. Ting K.L. Rotatability Laws for N-Bar Kinematic Chains and Their Proof / K.L. Ting, Y.W. Liu // ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design. — 1991. — Vol. 113, № 1. — P. 32–39.
7. Kazerounian K. Mobility Analysis of General Bi-Modal Four-Bar Linkages Based on Their Transmission Angle/ K. Kazerounian, R. Sulecki // Mechanism and Machine Theory. — 1993. — Vol. 28, № 3. — P. 437–445.
8. Barker C.R. A Complete Classification of Planar Four-Bar Linkages / C.R. Barker // Mechanism and Machine Theory. — 1985. — Vol. 20, № 6. — P. 535–554.
9. Murray A.P. A classification scheme for planar 4R, spherical 4R, and spatial RCCC linkages to facilitate computer animation / A.P. Murray, P.M. Larochelle // Proceedings of the 1998 ASME Design Engineering Technical Conferences: Mechanisms Conference. — Atlanta, 1998.
10. Su H. Classification of RRSS linkages / H. Su, C.L. Collins, J.M. McCarthy // Mechanism and Machine Theory. — 2002. — Vol. 37, № 11. — P. 1413–1433.
11. Chang W.-T. A note on Grashof's theorem / W.-T. Chang, C.-C. Lin, L.-I. Wu // Journal of Marine Science and Technology. — 2005. — Vol. 13, № 4. — P. 239–248.
12. Диментберг Ф.М. Теория пространственных шарнирных механизмов / Ф.М. Диментберг. — М.: Наука, 1982. — 336 с.

Поступила в редакцию 28.02.2011 г.

Поляков О.М. Альтернативний доказ теореми Грасгофа на основі аналізу кінематичних передавальних функцій механізму

Наведено новий алгоритм доказу теореми Грасгофа про повнообертовий рух шарнірного чотириланника. Необхідні умови повного обертання отримані як необхідні та достатні умови безперервності функції на множині дійсних тригонометричних функцій, для яких аргументом є функція положення механізму. Достатні умови та наслідки теореми доведені у процесі аналізу кінематичних передавальних функцій вищого порядку. Алгоритм доказу теореми та її наслідків може бути використаний для визначення сингулярних конфігурацій механізму з різними співвідношеннями між розмірами ланок, а також для оцінки повнообертового руху багатоланкових шарнірних механізмів з числом ланок більше чотирьох.

Ключові слова: шарнірний чотириланковий механізм, теорема Грасгофа, кінематична передавальна функція, сингулярна конфігурація.

Polyakov A.M. Alternative proof of the Grashof's theorem based on the analysis of kinematic transfer functions of mechanism

A new proof algorithm of the Grashof's theorem with respect to the full turn of a four bar linkages is presented. Necessary conditions of the full turn are obtained as a continuity condition of the mechanism position function. Sufficient conditions and consequences of the theorem proved in the process of analyzing the kinematic transfer functions of higher order. The algorithm of proof of the theorem and its consequences can be used to determine singular mechanism configurations at different ratios between the sizes of links and also to assess the full turn of multilink mechanism's having more four links.

Keywords: four-bar linkage, Grashof theorem, kinematic transfer function, singular configuration.