

УДК 517

А.И. Бохонский, Н.И. Варминская*Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОПТИМАЛЬНОГО ГАШЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО ОБЪЕКТА**

Дан анализ особенностей применения алгоритма аналитического конструирования регулятора при синтезе управления колебаниями упругого объекта, обращено внимание на процедуру решения уравнений Риккати, обсуждается эффективное демпфирование колебаний.

Ключевые слова: упругий объект, аналитическое конструирование регулятора, уравнение Риккати, гашение колебаний.

Активному (управляемому) гашению колебаний посвящены работы [1 - 3].

В [1] с использованием вариационного исчисления исследованы оптимальные процессы колебаний механических систем с конечным числом степеней свободы и систем с распределенными параметрами. Решены задачи: о динамическом нагружении упругой системы с равным единиче динамическим коэффициентом, задачи успокоения колебательных движений, оптимизации формы колеблющихся тел и другие.

В [2] с использованием принципа максимума найдены решения задач оптимального (в смысле быстрогодействия) перемещения колебательных систем с одновременным гашением колебаний: управление колебаниями маятников, оптимальный разгон при ограничении на скорость и ускорение и другие.

В [3,4] излагаются результаты синтеза новых оптимальных управлений переносным движением упругих систем; показано, что за минимальное время возможно переместить упругий объект из исходного в конечное состояние абсолютного либо относительного покоя (с допущением деформирования объекта только в процессе движения).

При решении задач синтеза управлений колебаниями с использованием квадратичных критериев оптимальности появляется процедура решения дифференциальных либо алгебраических уравнений Риккати, которая часто сопряжена с определенными аналитическими трудностями (например, при поиске корней системы нелинейных алгебраических уравнений).

Целью статьи является исследование методических особенностей применения процедуры аналитического конструирования регуляторов (включая и решение уравнений Риккати) для подавления колебаний упругих систем.

Историческая справка

Обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение [5]

$$\frac{dv}{dt} + av^2 = bt^\alpha, \quad (1)$$

где $a, b, \alpha = \text{const}$, впервые исследовалось Я. Риккати (1723). Уравнение (1) может, например, описывать движение объекта в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости.

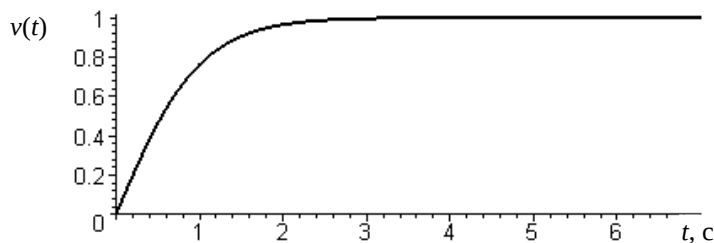
Дальнейшие исследования уравнения (1) связаны с Д. Бернулли (1724) и Ж. Лиувиллем (1841). Д. Бернулли нашел условия, при которых уравнение (1) интегрируется в элементарных функциях. В наиболее общем виде уравнение Риккати записывается

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x), \quad (2)$$

где $P(x), Q(x), R(x)$ – непрерывные функции. Важнейшее свойство решения уравнения Риккати (1) можно проиллюстрировать на простом примере, когда $a = b = \alpha = 1$. В этом случае решение при $v(0) = 0$ имеет вид:

$$v = \tanh(t). \quad (3)$$

В пределах $2\pi \geq t \geq 0$ график функции (3) изображен на рисунке 1. По существу при $t \rightarrow \infty$ производная $\frac{dv}{dt} \rightarrow 0$ и уравнение превращается в алгебраическое.

Рисунок 1 – График $v(t)$, отражающий асимптотическое свойство решения уравнения (1)

Процедура решения уравнений Риккати в общем алгоритме аналитического конструирования регулятора обсуждается на примере упругой системы с одной степенью свободы, приведенной в [6]. Уравнение управляемого движения объекта

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = u, \quad (2)$$

критерий оптимизации

$$J = \int_0^{\infty} (x^2 + ru^2) dt, \quad (3)$$

где u – управление; $r=1$. Матричное алгебраическое уравнение Риккати на языке Maple записывается следующим образом

```
> evalm(evalm(evalm(evalm(P&A)+evalm(transpose(A)&*P))-
  evalm(evalm(P&B)&*evalm(transpose(B)&*P)))+Q)=0;
```

$$\begin{bmatrix} -2p_{12} - p_{12}^2 + 1 & p_{11} - p_{12} - p_{22} - p_{12}p_{22} \\ p_{11} - p_{12} - p_{22} - p_{12}p_{22} & 2p_{12} - 2p_{22} - p_{22}^2 \end{bmatrix} = 0. \quad (4)$$

На основании (4) система уравнений в виде, который используется для решения нелинейных алгебраических уравнений в Maple, записывается так:

$$L1 := -2p_{12} - p_{12}^2 + 1 = 0; \quad L2 := p_{11} - p_{12} - p_{22} - p_{12}p_{22} = 0; \quad L3 := 2p_{12} - 2p_{22} - p_{22}^2 = 0; \quad (5)$$

Корни системы (5) найдены с привлечением функции *fsolve*.

```
> fsolve({L1, L2, L3}, {p11, p12, p22});
```

$$\{p_{11} = -2.912290315, p_{12} = 0.4142135624, p_{22} = -2.352193449\}. \quad (6)$$

После подстановки корней (6) в (5) получены погрешности: $\Delta_1 = 0$; $\Delta_2 = 0$; $\Delta_3 = 0,1 \cdot 10^{-8}$. Эти корни удовлетворяют системе (5), но не соответствуют смыслу задачи.

Последовательное исключение неизвестных из системы (5) приводит к другому решению:

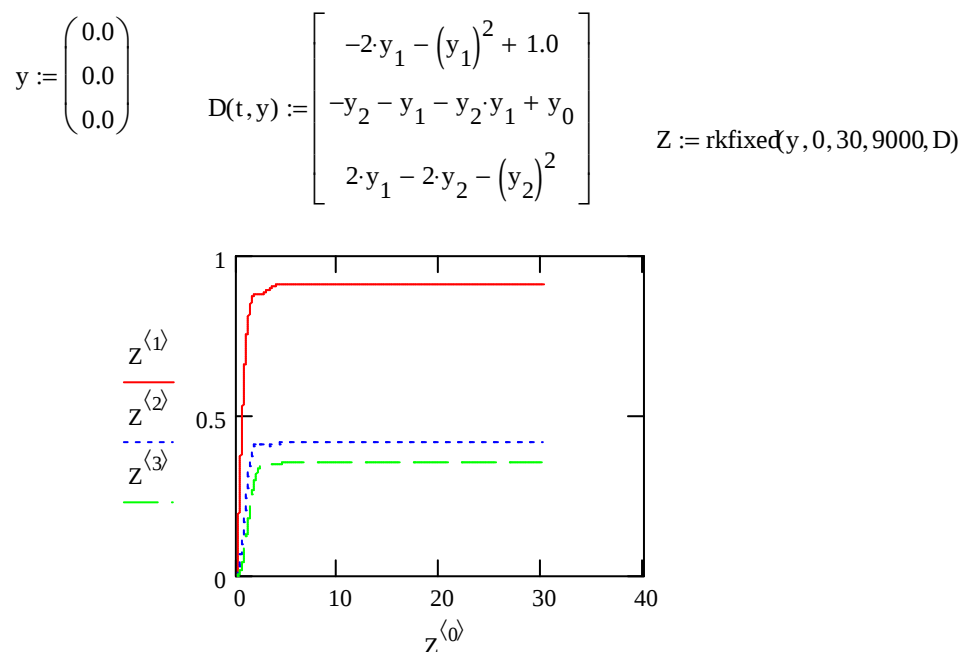
$$p_{11} = 0,9123; \quad p_{12} = 0,4142; \quad p_{22} = 0,3522. \quad (7)$$

Корни (7) не только удовлетворяют системе (5) с приемлемой точностью ($\Delta_1 = 0,00003836$; $\Delta_2 = 0,0000$; $\Delta_3 = 0,0000$), но и смыслу задачи оптимального управления.

Интересно отметить, что алгебраические уравнения Риккати, приведенные для этой задачи в [6], отличаются от уравнений (5). Однако, найденные в этой работе корни путем интегрирования дифференциальных уравнений близки (с точностью до двух цифр после запятой) к корням (7). Можно только предположить, что в [6] интегрировалась следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dp_{11}}{dt} &= -2p_{11} - p_{11}^2 + 1, \\ \frac{dp_{12}}{dt} &= -p_{12}p_{22} - p_{12} - p_{22} + p_{11}, \\ \frac{dp_{22}}{dt} &= 2p_{12} - p_{22}^2 - 2p_{22}. \end{aligned} \quad (8)$$

С целью проверки корней дальше использовалась функция *rkfixed* (в MathCad) численного интегрирования дифференциальных уравнений (8). Результат приведен ниже.



Численное интегрирование уравнений (8) подтвердило правильность корней (7).

Итак, алгебраические уравнения Риккати, приведенные в [6] на стр. 266, ошибочны. Для окончательной проверки корректности решения задачи была использована процедура *lqr* проектирования линейно-квадратичного оптимального регулятора (в MathLAB) для поиска коэффициентов усиления в обратной связи [7], обеспечивающих минимум квадратичного критерия и устойчивость замкнутой системы. Результат применения *lqr* приведен ниже.

```
>> [K,S,E]=lqr(A,B,Q,R,N)
```

```
K =
    0.4142    0.3522

S =
    0.9123    0.4142
    0.4142    0.3522
```

Итак, оптимальное управление колебаниями в виде обратной связи принимает вид

$$u = -0,4142x - 0,3522\dot{x}. \quad (9)$$

Эффективность управления (9) дополнительно проверена в Simulink [8] с использованием структурной схемы, изображенной на рисунке 2.

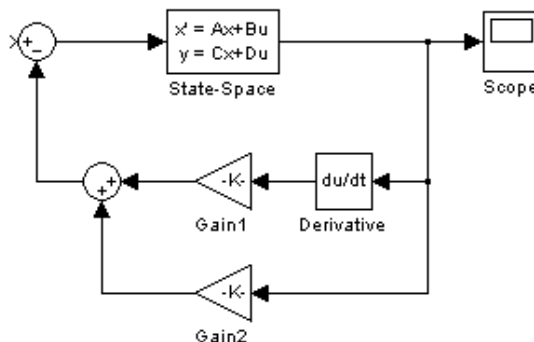
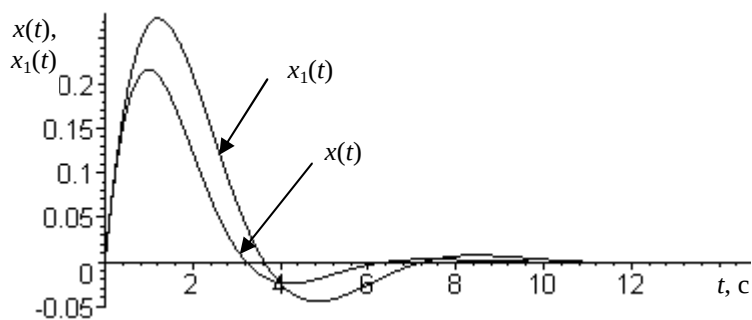


Рисунок 2 – Структурная схема замкнутой системы (в Simulink)

Структурная схема позволила осуществить варьирование в широких пределах коэффициентов усиления.

Графики перемещения системы без управления $x_1(t)$ и с управлением (с начальными условиями $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0,5$ м/с) удобно строить в Maple (рисунок 3).

Рисунок 3 – Графики движения системы: $x_1(t)$ – без управления; $x(t)$ – с управлением

Из графиков следует, что для исходной системы с линейно-вязким сопротивлением оптимальное управление преимущественно усиливает демпфирование, которое снижает колебания и уменьшает время затухания колебательного процесса.

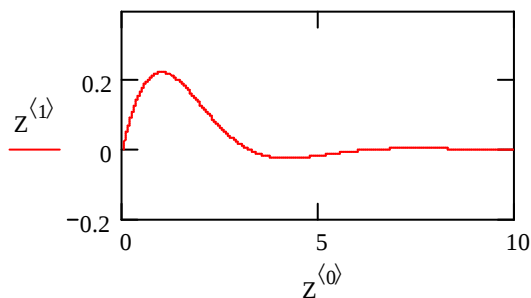
Без потери точности определения управления возможно следующее приближенное аналитическое решение дифференциальных уравнений Риккати:

$$p_{11}(t) = p^*_{11}(1 - e^{-S_1 t}), \quad p_{12}(t) = p^*_{12}(1 - e^{-S_2 t}), \quad p_{22}(t) = p^*_{22}(1 - e^{-S_3 t}).$$

В данной задаче для численного решения принято: $p^*_{11} = 0,9123$, $p^*_{12} = 0,4142$, $p^*_{22} = 0,3522$; $S_1 = S_2 = S_3 = 10$. Численный эксперимент с использованием *rkfixed*, выполненный в MathCad, приведен ниже.

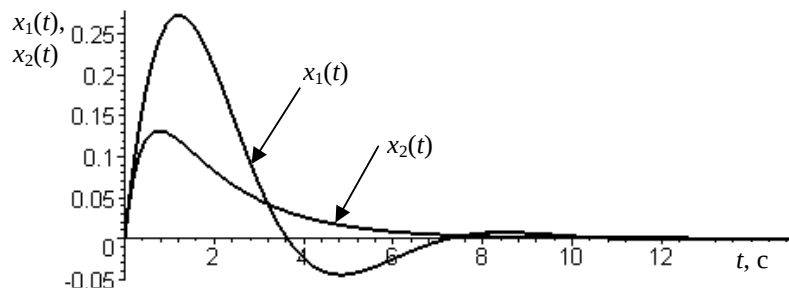
$$x := \begin{pmatrix} 0.0 \\ 0.5 \end{pmatrix} \quad D(t, x) := \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_0 - 0.4142x_0 \cdot (1 - e^{-10 \cdot t}) - x_1 - 0.3522x_1 \cdot (1 - e^{-10 \cdot t}) \end{bmatrix}$$

$$Z := \text{rkfixed}(x, 0, 10, 10000, D)$$



Сопоставление графиков движения показывают, что учет в управлении коэффициентов $p_{12}(t)$ и $p_{22}(t)$ как функций времени в данном примере не оказывает существенного влияния на характер движения системы.

На рисунке 4 приведены графики движения системы с так называемым «волевым» управлением, которое показывает, что увеличение p_{22} приводит к типичному апериодическому движению упругой системы.

Рисунок 4 – Графики движения системы: $x_1(t)$ – без управления; $x_2(t)$ – с «волевым» управлением

По поводу решения уравнений Риккати приведем характерный пример. В [3], например, алгоритм активного гашения колебаний манипулятора с системой виброизоляции включает процедуру решения 10 алгебраических уравнений с выбором из 16-ти корней 4-х, которые обеспечивают устойчивость объекта согласно критерию Сильвестра и доставляют минимум интегральному квадратичному критерию оптимальности.

Выводы

1. Численное интегрирование нелинейных уравнений Риккати предпочтительно при определении корней по сравнению с процедурой поиска решения нелинейных алгебраических уравнений. Функция *lqr* в MathLAB существенно облегчает получение корней, обеспечивающих минимум квадратичного критерия и асимптотическую устойчивость замкнутой системы.

2. Оптимальное подавление колебаний практически происходит за малый промежуток времени и поэтому естественна замена несобственного интеграла в квадратичном критерии оптимальности на определенный интеграл.

«Волевое» назначение коэффициентов усиления в оптимальном управлении с обратной связью должно проверяться путем численного эксперимента в Simulink.

Дальнейшие исследования предполагают сравнение эффективности применения других методов для поиска управлений колебаний (например, метода моментов [9]) с методом аналитического конструирования результатов и поиск управлений колебаниями систем с конечным числом степеней свободы.

Библиографический список использованной литературы

1. Троицкий В.А. Оптимальные процессы колебаний механических систем / В.А. Троицкий. — Л.: Машиностроение, 1976. — 248 с.
2. Черноусько Ф.Л. Управление колебаниями / Ф.Л. Черноусько, П.Д. Акуленко, Б.Н. Соколов. — М.: Наука, 1980. — 384 с.
3. Бохонский А.И. Оптимальное управление переносным движением деформируемых объектов: теория и технические приложения / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская, М.И. Мозолевский. — Севастополь: СевНТУ, 2007. — 296 с.
4. Бохонский А.И. Поиск управлений колебаниями упругих объектов в системе аналитических вычислений / А.И. Бохонский, А.В. Исаев // Оптимизация производственных процессов. — Севастополь: СевНТУ, 2007. — Вып. 10. — С. 48–51.
5. Математический энциклопедический словарь / Глав. ред. Ю.В. Прохоров. — М.: Советская энциклопедия, 1988. — С. 527.
6. Солодовников В.В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования: учеб. пособие для вузов / В.В. Солодовников, В.Н. Плотников, А.В. Яковлев. — М.: Машиностроение, 1985. — 536 с.
7. Лазарев Ю.Ф. MathLAB 5.x / Ю.Ф. Лазарев. — К.: Издательская группа BHV, 2000. — 384 с.
8. Черных И.В. SIMULINK: среда создания инженерных приложений / И.В. Черных. — М.: ДИАЛОГ- МИФИ, 2003. — 496 с.
9. Карновский И.А. Методы оптимального управления колебаниями деформируемых систем / И.А. Карновский, Ю.М. Почтман. — К.: Высш. шк., 1982. — 116 с.

Поступила в редакцию 25.06.2011 г.

Bohonsky O.I., Varminskaya N.I. Effectiveness of optimum damping of resilient object fluctuations

Аналізуються особливості використання алгоритму аналітичного конструювання оптимального регулятора при синтезі управління коливаннями пружного об'єкту, звернуто увагу на процедуру вирішення рівнянь Риккати, обговорюється підсилення демпфування коливань.

Ключові слова: пружний об'єкт, аналітичне конструювання регулятора, рівняння Риккати, гасіння коливань.

Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I. Efficiency of optimum suppression of resilient object fluctuations

The analysis of application features of the regulator analytical designing algorithm is given at synthesis of management by resilient object fluctuations, the attention to procedure of the decision of the Rikkati equations is paid, the effective damping of fluctuations is discussed.

Keywords: resilient object, analytical designing of a regulator, the Rikkati equation, suppression of fluctuations.