

УДК 531.534

А.И. Бохонский, А.Н. Круговой, М.М. Майстришин*Севастопольский национальный технический университет**Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ КОЛЕБАНИЯМИ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА РИТЦА И ГЛАВНЫХ КООРДИНАТ**

Разработан алгоритм оптимального подавления колебаний упругих систем с конечным числом степеней свободы. Колебания, которые обусловлены ненулевыми начальными условиями, устраняются на заданном конечном интервале времени. Использование метода Ритца и главных координат иллюстрируется на примере системы с двумя степенями свободы.

Ключевые слова: упругая система, главные координаты, квадратичный критерий оптимальности, метод Ритца.

Задачам управления колебаниями упругих систем с конечным и бесконечным числом степеней свободы посвящена обширная литература [1–3, 5]. Например, в работе [5] исследованы оптимальные управления переносным движением упругих систем с произвольным числом степеней свободы. Применяемый в теории колебаний линейных систем метод главных координат описан в [4].

Следует отметить, что при использовании вариационного метода теории оптимального управления в случае квадратичного критерия качества задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка, в которой каждое уравнение имеет четвертый порядок. В этом случае возникают определенные трудности в построении общего алгоритма поиска решения в системе аналитических вычислений.

Целью исследований является использование метода главных координат и метода Ритца для поиска управлений колебаниями упругой системы с конечным числом степеней свободы.

Постановка задачи оптимального управления сводится к следующему. Необходимо найти управления как функции времени, которые переводят упругую систему из исходного возмущенного состояния в конечное состояние абсолютного покоя в фиксированный момент времени и при этом достигается минимум смешанного квадратичного критерия качества.

Синтез оптимальных управлений сводится к алгоритму, который реализован в системе аналитических вычислений:

1. Задание полиномов для главных координат, вычисление их производных.
2. Выражение физических координат через главные координаты.
3. Вычисление критерия оптимальности при заданном общем времени движения T с учетом управлений, выраженных через физические координаты (согласно исходным уравнениям управляемого движения упругой системы).
4. Вычисление производных от критерия по части коэффициентов полиномов; подчиненные физические координаты и их скорости крайним условиям.
5. Совместные решения полученной на этапе 4 системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов полиномов и окончательное вычисление управлений (согласно уравнениям движения).

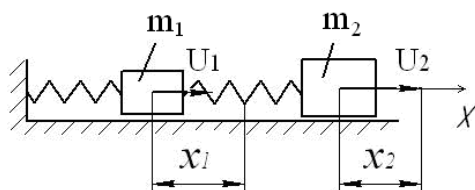


Рисунок 1 – Схема упругой системы

Алгоритм оптимального управления, основанный на использовании методов Ритца и главных координат, иллюстрируется на примере упругой системы с двумя степенями свободы, схема которой изображена на рисунке 1.

Без учета сопротивления движению дифференциальные уравнения управляемого движения выглядят следующим образом:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + (c_1 + c_2)x_1 - c_2 x_2 = U_1(t), \quad m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + c_2 x_2 - c_2 x_1 = U_2(t) \quad (1)$$

где m_1, m_2 – сосредоточенные массы; c_1, c_2 – коэффициенты жесткости, x_1, x_2 – координаты; $U_1(t), U_2(t)$ – управления.

Для однородной системы дифференциальных уравнений после подстановки частных решений получена система алгебраических уравнений

$$(c_1 + c_2 - m_1 \omega^2)A_1 - c_2 A_2 = 0, \quad -c_1 A_1 + (c_2 - m_2 \omega^2)A_2 = 0, \quad (2)$$

у которой при $A_1 \neq 0$ и $A_2 \neq 0$ определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_2 - m_1 \omega^2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Между амплитудами колебаний выполняется соотношение:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{c_1 + c_2 - m_1 \omega^2}{c_2}. \quad (4)$$

В соответствии с методом главных координат [4] амплитудные смещения v_{ik} для i -й массы, где k – номер формы (моды) колебаний, принимаются как

$$v_{11} = 1; \quad v_{12} = 1; \quad v_{21} = \frac{c_1 + c_2 - m_1 \omega_1^2}{c_2}; \quad v_{22} = \frac{c_1 + c_2 - m_1 \omega_2^2}{c_2}. \quad (5)$$

Физические координаты $x_1(t)$ и $x_2(t)$ через главные координаты $q_1(t)$ и $q_2(t)$ выражается следующим образом [4]:

$$x_1(t) = v_{11}q_1(t) + v_{12}q_2(t), \quad x_2(t) = v_{21}q_1(t) + v_{22}q_2(t). \quad (6)$$

Обобщенные координаты согласно методу Ритца задавались в виде полиномов:

$$q_1 = \sum_{s=1}^{n_1} a_s t^s, \quad q_2 = \sum_{s=1}^{n_1} a_s t^s, \quad (7)$$

где a_s , b_s – константы, подлежащие определению; В данной задаче $n_1 = 6$.

Константы a_s , b_s , где $s = 1, \dots, n_1$, определяются из решения системы алгебраических уравнений, которая образуется при подчинении физических координат краевым условиям

$$x_1(0) = x_1^*, \quad x_2(0) = x_2^*, \quad \dot{x}_1(0) = v_1, \quad \dot{x}_2(0) = v_2; \quad x_1(T) = 0, \quad x_2(T) = 0, \quad \dot{x}_1(T) = 0, \quad \dot{x}_2(T) = 0 \quad (8)$$

и из необходимых условий минимума критерия оптимальности $J = \int_0^T [x_1^2 + x_2^2 + r_1 U_1^2 + r_2 U_2^2] dt$, т.е.

$$\frac{dJ}{da_p} = 0, \quad \frac{dJ}{db_p} = 0, \quad \text{где } p = n_1, n_1 - 1, n_1 - 2; \text{ в данной задаче } r_1 = r_2 = 1.$$

После определения констант, управления U_1 и U_2 в соответствии с обратной задачей динамики находятся в результате подстановки физических координат x_1 и x_2 , выраженных через обобщенные согласно (6), в систему уравнений (1).

Пример. Исходные данные: $m_1 = 40$ кг, и $m_2 = 10$ кг, $c_1 = 2000$ Н/м, $c_2 = 1000$ Н/м, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 0,5$ м/с, $\dot{x}_2(0) = -1$ м/с, $v_{11} = 1$, $v_{12} = 1$. Вычисленные величины: частоты собственных колебаний $\omega_1 = 5,9968$ с⁻¹, $\omega_2 = 11,7915$ с⁻¹; периоды колебаний $T_1 = 1,0478$ с, $T_2 = 0,5329$ с; коэффициенты форм колебаний $v_{21} = 1,516$, $v_{22} = -2,5616$. Задано общее время движения $T = 2T_1$.

На рисунке 2, а, б изображены графики физических координат и их производных, а на рисунке 3, а, б изображены графики главных координат и их производных.

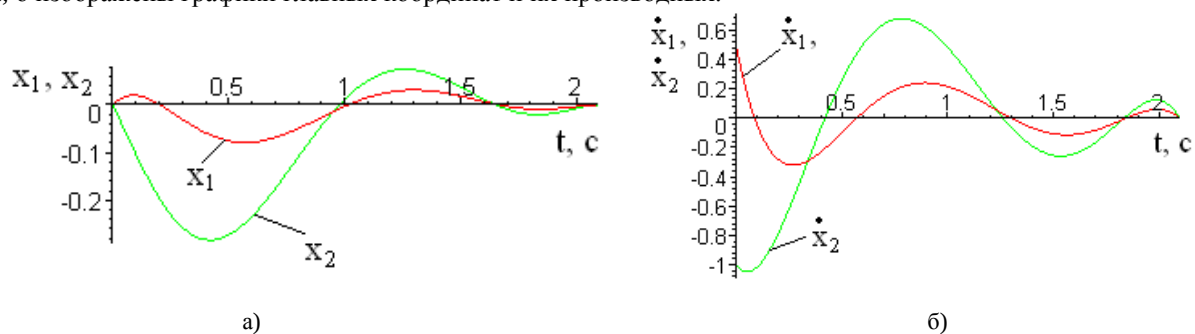
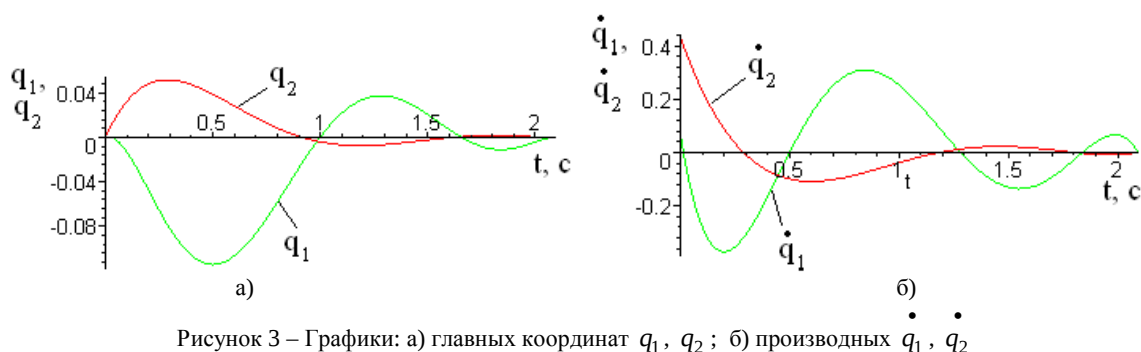
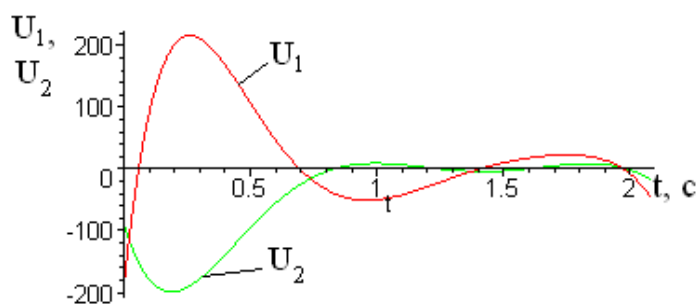


Рисунок 2 – Графики: а) координат x_1 , x_2 б) производных $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$

Рисунок 3 – Графики: а) главных координат q_1, q_2 ; б) производных $\dot{q}_1, \dot{q}_2$

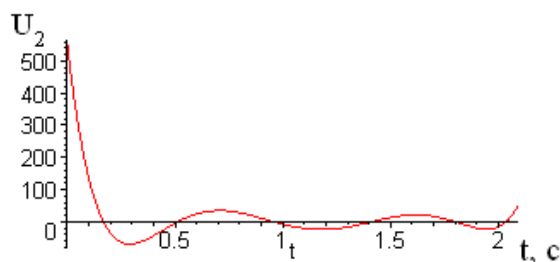
Характерно, что при $t = T$ физические координаты, их производные, главные координаты и их производные равны нулю, что является одной из очевидных проверок алгоритма и свидетельствует о достижении покоя системы (подавления колебаний) к концу движения с использованием управления, график которого дан на рисунке 4.

Рисунок 4 – Графики управлений U_1, U_2

Если *непосредственно* использовать метод Ритца и выбирать для физических координат полиномы, то качественный характер поведения упругой управляемой системы остается похожим на предыдущий, но численно перемещения и управления отличаются на 25 – 40 %.

Для смешанного критерия $\int_0^T (\dot{x}_1^2 + rU_2^2) dt = \min$, который может быть использован для синтеза

управления динамическим гасителем колебаний (m_1 – масса объекта, m_2 – масса гасителя), график управления (с прежними исходными данными) изображен на рисунке 5. Управление динамических гасителей обеспечивает подавление колебаний объекта за время T .

Рисунок 5 – Графики управления U_2

Выводы

1. Применение методов Ритца совместно с методом главных координат упрощает алгоритм синтеза управлений колебаниями упругой системы с конечным числом степеней свободы по сравнению с вариационным методом, который приводит к необходимости решения системы дифференциальных уравнений высокого порядка, причем каждое уравнение в такой системе имеет четвертый порядок.

2. Критерий $\int_0^T \left[\ddot{x}_1^2 + \ddot{x}_2^2 + r(U_1^2 + U_1^2) \right] dt$ дает весьма близкие результаты по сравнению с критерием

$\int_0^T \left[\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + r(U_1^2 + U_1^2) \right] dt$, а некоторое отклонение от нуля управлений в момент времени T зависит от степени полинома.

3. Разработанный алгоритм может использоваться для решения многих задач управления колебаниями (гашения колебаний) объектов современной техники.

Дальнейшие исследования связаны с учетом линейно-вязкого сопротивления и распространением разработанного алгоритма на системы с большим числом степеней свободы при использовании различных критериев оптимальности и ограничений. Для нелинейно упругих механических систем при поиске оптимального управления предполагается использовать асимптотические методы нелинейной механики.

Библіографічний список використаної літератури

1. Черноусько Ф.Л. Управление колебаниями/ Ф.Л. Черноусько, Л.Д. Акуленко, Б.Н. Соколов. — М.: Наука, 1980. — 284 с.
2. Троицкий В.А. Оптимальные процессы колебаний механических систем / В.А. Троицкий. — Л.: Машиностроение, 1976. — 248 с.
3. Бохонский А.И. Оптимальное управление переносным движением деформируемых объектов: теория и технические приложения / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская, М.Н. Мозолевский. — Севастополь: СевНТУ, 2007. — 296 с.
4. Бидерман В.Л. Прикладная теория колебаний / В.Л. Бидерман. — М.: Высш. школа, 1972. — 416 с.
5. Бохонский А.И. Моделирование оптимального переносного движения упругих систем / А.И. Бохонский, А.К. Васильченко // Вестник СевНТУ. Автоматизация процессов и управление: сб. науч. тр. — Севастополь: СевНТУ, 2010. — Вып. 106. — С. 29–33.

Поступила в редакцию 26.06.2011 г.

Бохонський О.І., Круговий О.М., Майстрішин М.М. Синтез оптимальних управлінь коливаннями пружної системи з використанням методу Рітца і головних координат

Розроблено алгоритм оптимального знищення коливань пружної системи з кінцевим числом ступенів свободи. Коливання, які обумовлені ненульовими початковими умовами, ліквідуються на заданому кінцевому інтервалі часу. Використання методу Рітца і головних координат ілюструється на прикладі системи з двома ступенями свободи.

Ключеві слова: пружна система, головні координати, квадратичний критерій оптимальності, метод Рітца.

Bokhonsky A.I., Krugovoy A.N., Maystrishin M.M. Synthesis of optimal controls by fluctuations of the elastic system using the Ritz method and the main coordinates

An algorithm for optimal suppression of vibrations of elastic systems with a finite number of degrees of freedom is developed. Fluctuations which are caused by nonzero initial conditions are eliminated on a given finite time interval. Use of the Ritz method and of the main coordinates is illustrated by then example systems with two degrees of freedom.

Keywords: elastic system, the main coordinates, square-law criterion of an optimality, method Ritz.