

УДК 621.833

В.П. Прохоров, профессор, канд. техн. наук**В.А. Щипаков, ст. научный сотрудник**

Александровский филиал Российского нового университета

ул. Советская 25 а, г. Александров, Россия, 601652

E-mail: afrosnou2009@yandex.ru

ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ПЛОСКИХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ ПО КРИТЕРИЮ МОЩНОСТИ ТРЕНИЯ

Рассмотрена плоская задача однокритериальной оптимизации зацеплений с неподвижными осями и постоянным передаточным отношением по критерию мощности трения. Актуальность задачи заключается в возможности снижения энергетических потерь в передаточных механизмах. Приведены алгоритмы решения вариационных и невариационных задач.

Ключевые слова: вариационный метод, мощность трения, оптимизация.

Введение

Работа выполнена в рамках системной концепции проектирования механизмов произвольной структуры [1-5] на базе модели трехзвенных механизмов, изложенной в [6,7].

I. Постановка задачи

Геометрическая модель кинематической пары плоского механизма с неподвижными осями и постоянным передаточным отношением (рисунок 1) описывается системой уравнений:

$$v_j = -a_j \dot{\phi}_j \sin \alpha + r(\dot{\alpha} - \dot{\phi}_j), \quad (1)$$

$$\dot{r} = -a_j \dot{\phi}_j \cos \alpha, \quad (2)$$

$$k_j v_j = (\dot{\alpha} - \dot{\phi}_j), \quad a_1 = a/(1-i_{12}), \quad a_2 = ai_{12}/(1-i_{12}).$$

Здесь (r, α) – полярные координаты точки контакта M_j относительно полюса P ($j=1,2$ – индекс звена), a_j – расстояние от оси O_j j -го звена до полюса, a – межосевое расстояние O_1O_2 , i_{12} – передаточное отношение $i_{12} = a_2/a_1$, $\dot{\phi}_j$ – угловая скорость вращения j -го звена вокруг O_j , v_j – относительная скорость точки контакта M_j , k_j – кривизна контактной линии в этой точке.

Мощность трения задается в виде:

$$N_T = f N v_{12},$$

где N – нормальная сила в контакте, f – коэффициент трения скольжения, $v_{12} = v_1 - v_2$ – скорость скольжения контактных линий.

Выразим силу в контакте через момент сопротивления $M_2 = \text{const}$, приложенный к звену 2 в виде

$$N = \frac{M_2}{a_2 \cos \alpha}.$$

Это соотношение накладывает ограничения на допустимые углы α : при малых косинусах и постоянном моменте могут возникнуть нагрузки N , превышающие предельно допустимые. Выразая v_{12} из (1), получим

$$N_T = -\frac{M_2}{a_2 \cos \alpha} f (\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2) r = C_2 \frac{r}{\cos \alpha} = B_2 \frac{r}{\dot{r}}, \quad (3)$$

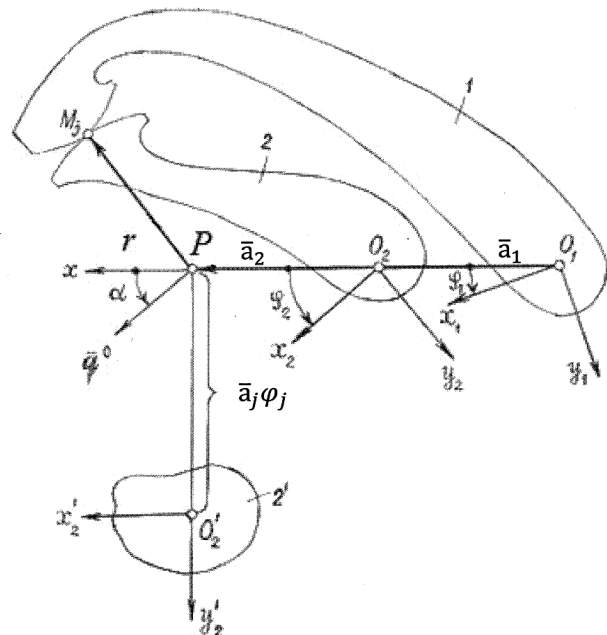


Рисунок 1 – Геометрическая модель плоского трехзвенного механизма с неподвижными осями

где C_2, B_2 – постоянные: $C_2 = -M_2 f(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2) / a_2$; $B_2 = -a_2 \dot{\phi}_2 C_2 = M_2 f(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2) \dot{\phi}_2$.

II. Линии уровня и градиента

Из (3) для линий уровня $N_T = \text{const}$ получим

$$r = (N_T / C_2) \cos \alpha = C \cos \alpha, \quad (4)$$

или, в декартовых координатах: $x = a_1 + r \sin \alpha$, $y = -r \cos \alpha$. Они представляют собой окружности: $(x - a_1)^2 + (y + C/2)^2 = C^2/4$, касающиеся оси Ox в полюсе (показаны на рисунке 2 для различных C).

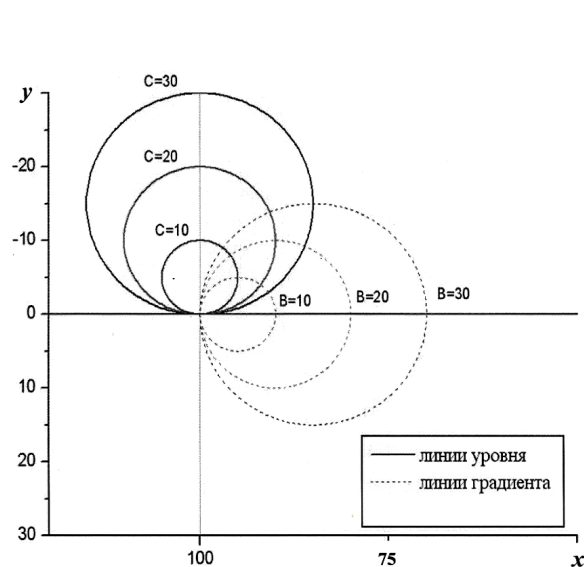


Рисунок 2 – Линии уровня и градиента

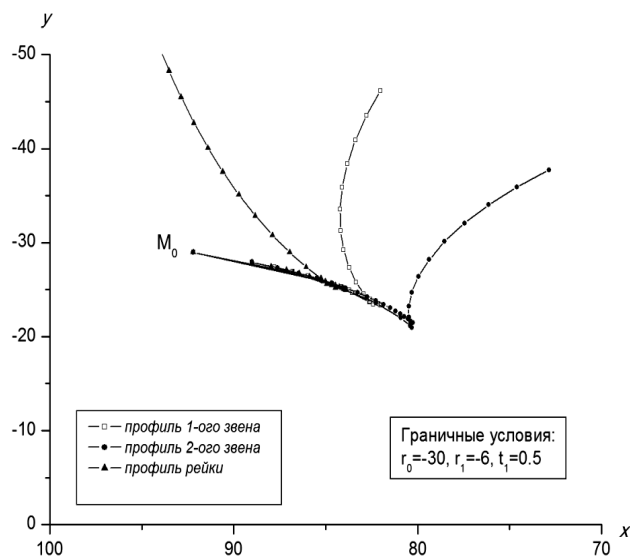


Рисунок 3 – Профили звеньев для экстремальной ЛЗ

Линии градиента мощности трения, рассматриваемой как функция переменных (x, y) , определяются уравнением $r = -B \sin \alpha$. Это окружности $(x - a_1 - B/2)^2 + y^2 = B^2/4$, ортогональные линиям уровня. Они показаны на рисунке 3 для различных B пунктиром. Известно, что линии градиента дают направление наибольшего изменения функции, двигаясь вдоль которых можно достичь ее минимума. Так абсолютный минимум функции N_T находится в полюсе, где $N_T = 0$.

III. Экстремали

Задача оптимизации мощности трения в контакте приводит к отысканию минимума функционала работы силы трения

$$A = \int_0^{t_1} N_T dt = B_2 \int_0^{t_1} \frac{r}{\dot{r}} dt. \quad (5)$$

Экстремали этого функционала удовлетворяют уравнению Эйлера

$$L - \dot{r} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \text{const}, \quad (6)$$

где $L = B_2 \frac{r}{\dot{r}}$; $\text{const} = 2N_T$. Общее решение (6) имеет вид

$$r(t) = r_0 \exp(-c_1 t), \quad (7)$$

где $r_0 = r(t=0)$, c_1 – произвольная константа, значение которой зависит от граничных условий вариационной задачи. Из условия (2) следует: $\cos \alpha = -\dot{r} / (a_j \dot{\phi}_j) = (c_1 r_0 / a_j \dot{\phi}_j) \exp(-c_1 t)$, откуда, сравнивая с (4), получаем

$$r = \dot{a} \cos \alpha, \quad d = (a_j \dot{\phi}_j / c_1) = \text{const}. \quad (8)$$

Сравнивая (8) с (4), находим, что экстремаль функционала (5) является также линией постоянной мощности трения. Решением классической вариационной задачи с закрепленными концами

$$r(0) = r_0, \quad r(t_1) = r_1 \quad (9)$$

является экстремаль (7) с константой $c_1 = -\frac{1}{t_1} \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)$. При этом, так как $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{r}^2} = \frac{2B_2 r}{\dot{r}^3} = \frac{2N_T}{\dot{r}^2} > 0$, то, согласно достаточному условию Лагранжа, данная экстремаль доставляет минимум функционалу работы силы трения, равный $A_{\min} = B_2 \left(\ln \frac{r_1}{r_0}\right)^{-1}$, причем величина работы не зависит от времени контакта t_1 и уменьшается при уменьшении r_1 . В пределе при $r_1 \rightarrow 0$ работа силы трения на экстремали стремится к нулю: $A_{\min} \rightarrow 0$. Однако, при этом, как видно из (7), для конечных c_1 , $r_1 \rightarrow 0$ при $t_1 \rightarrow \infty$, т.е. двигаясь по экстремали, точка контакта не достигает полюса за конечный промежуток времени. Более тщательный анализ показывает, что условие (2) накладывает ограничения на параметры t_1, r_1 : $|r_1| \geq |r_0| \exp(-a_j \dot{\phi}_j t_1 / |r_0|)$, и, соответственно, на минимальное значение работы: $A_{\min} \geq C_2 |r_0| / t_1$.

С другой стороны, при $c_1 \rightarrow \infty$ экстремаль вырождается в точку $r \equiv 0$ и не удовлетворяет начальному условию (9) для $r_0 \neq 0$.

Для вариационной задачи с подвижным концом

$$r(0) = r_0, \quad (10)$$

$$r(t_1) = 0, \quad (11)$$

соответствующей линии зацепления, оканчивающейся в полюсе, константа экстремали C_1 определяется из условия трансверсальности, которое в нашем случае имеет вид

$$\left(L - \dot{r} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right)_{t=t_1} = 0,$$

т.е. является уравнением Эйлера для $t = t_1$. Сравнивая с (6), получаем $N_T = 0$, и, соответственно,

$c_1 = -\frac{B_2}{2N_T} = \infty$, а это значение, как мы видели, соответствует вырожденной экстремали $r = 0$. Таким образом, задача (10) – (11) имеет (вырожденное) решение $r \equiv 0$ только при $r_0 = 0$.

Для вариационной задачи со свободным концом, когда r в конечный момент времени не определено, константу c_1 находим из условия $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right)_{t=t_1} = 0$, откуда также следует $c_1 = \infty$, т.е. задача имеет (вырожденное) решение $r \equiv 0$ при $r_0 = 0$.

Таким образом, экстремали функционала (5) дают решение задачи оптимизации в реальном времени только для классической вариационной задачи с закрепленными концами для ЛЗ, не доходящих до полюса.

Координаты профилей звеньев, соответствующих экстремальной ЛЗ, запишем в виде:

$$x_j = a_j \cos \dot{\phi}_j t + \dot{a} \cos \alpha \sin(\alpha - \dot{\phi}_j t), \quad y_j = -a_j \sin \dot{\phi}_j t - d \cos \alpha \cos(\alpha - \dot{\phi}_j t),$$

для реечного зацепления:

$$\dot{x}_2 = d \cos \alpha \sin \alpha, \quad \dot{y}_2 = -a_1 \dot{\phi}_j t - d \cos^2 \alpha.$$

Примеры профилей показаны на рисунке 3 для указанных на нем граничных условий.

Из рисунка видно, что все профили имеют особую точку, соответствующую $v_j = 0$. Подставляя (8) в (1) с учетом $\dot{\alpha} = c_1 \operatorname{ctg} \alpha$, получим $v_j = \frac{a_j \dot{\phi}_j}{\sin \alpha} (\cos 2\alpha - u_{0j} \sin 2\alpha)$, где $u_{0j} = \frac{\dot{\phi}_j}{2c_1}$. Отсюда $v_j = 0$ при $\operatorname{ctg} 2\alpha = u_{0j}$, и далее можно получить, что $v_j = 0$ при

$$\bar{t}_j = -\frac{1}{c_1} \ln \frac{r_j}{r_0} = -\frac{1}{c_1} \ln \left(\frac{d \cos \alpha_j}{r_0} \right), \quad \cos \alpha = -\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$$

или $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} 2\alpha \pm \sqrt{\operatorname{ctg}^2 (2\alpha + 1)} = u_{0j} \pm \sqrt{u_{0j}^2 + 1}$.

Исходя из этих соотношений, можно выбрать граничные условия так, чтобы профили звеньев не содержали особых точек, как показано на рисунке 4.

IV. Невариационный метод минимизации работы силы трения

Как было показано, вариационный метод дает решение задачи минимизации функционала работы

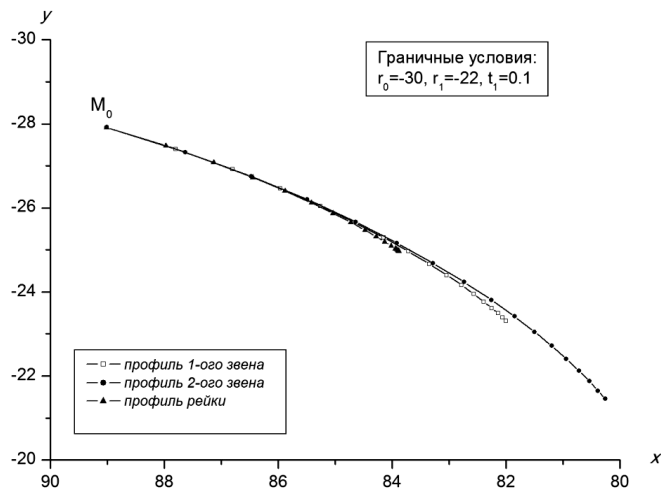


Рисунок 4 – Профили звеньев для экстремальной ЛЗ

силы трения только для граничных условий с закрепленными концами. При этом экстремали не проходят через полюс. Это означает, что для другого типа краевых задач работа силы трения на допустимых траекториях $r(t)$ не имеет локальных экстремумов. В этом случае поставим задачу нахождения оптимальных траекторий следующим образом. При условии, что существует оценка снизу для интеграла (5): $A > A_{\min}$, найти траектории $r(t)$ из определенного семейства, на которых $|A - A_{\min}| \leq \delta$.

Для получения оценки (5) заметим, что по условию (2) $|\dot{r}(t)| \leq |a_j \dot{\phi}_j|$.

Отсюда

$$|A| \geq \frac{|B_2|}{|a_j \dot{\phi}_j|} \int_0^{t_1} |\dot{r}(t)| dt.$$

Полагая $\dot{r} < 0$, получим оценку: $|r(t)| \geq |r_0| - |a_j \dot{\phi}_j| t$. Подставляя в $|A|$ и интегрируя, получаем:

$$|A| \geq \frac{|B_2|}{|a_j \dot{\phi}_j|} \int_0^{t_1} (|r_0| - |a_j \dot{\phi}_j| t) dt = |B_2| \left(\frac{|r_0| t_1}{|a_j \dot{\phi}_j|} - \frac{t_1^2}{2} \right). \quad (12)$$

В частности, при $r(t_1) = 0$ имеем $t_1 = |r_0| / (a_j \dot{\phi}_j)$ и $A \geq A_0 = \frac{|B_2|}{2} \left(\frac{r_0}{a_j \dot{\phi}_j} \right)^2$.

V. Линии зацепления (ЛЗ), заканчивающиеся в полюсе

Рассмотрим класс ЛЗ, начинающиеся в фиксированной точке $M_0(r_0, \alpha_0)$ и заканчивающиеся в полюсе $P(r = 0)$.

A. Линии постоянного угла $\alpha = \alpha_0 = \text{const}$.

Линии постоянного угла, удовлетворяющие условию взаимоогибания (2), представляют собой прямолинейные траектории (эвольвентное зацепление)

$$r(t) = r_0 - a_j \dot{\phi}_j \cos \alpha_0 t. \quad (13)$$

Из условия $r(t_1) = 0$ следует: $t_1 = \frac{r_0}{a_j \dot{\phi}_j \cos \alpha_0}$. Тогда работа силы трения:

$$A = -B_2 \frac{r_0^2}{2(a_j \dot{\phi}_j \cos \alpha_0)^2} = \frac{A_0}{\cos^2 \alpha_0}. \quad (14)$$

Относительное отклонение от минимального значения A_0 составляет $\varepsilon = \frac{|A - A_0|}{A_0} = \tan^2 \alpha_0$, что является малой величиной при малых $\tan \alpha_0$ и становится равным нулю при $\alpha = \pi k$, $k = 0, 1, \dots$

B. Дуги окружностей.

Дуги окружностей, проходящих через M_0 и P , задаются уравнениями: $r = 2x_c \sin \alpha - 2y_c \cos \alpha$, где (x_c, y_c) – координаты центра окружности, $R = \sqrt{x_c^2 + y_c^2}$ – ее радиус. Координаты центра связаны соотношением, вытекающим из начального условия $y_c = \frac{r_0}{2 \cos \alpha_0} \tan \alpha_0 x_c - \frac{r_0}{2 \cos \alpha_0}$.

С учетом $\dot{r} = (2x_c \cos \alpha + 2y_c \sin \alpha)\dot{\alpha} = -\alpha_j \dot{\phi}_j \cos \alpha$, для работы силы трения получим

$$A = \int_0^{t_1} B_2 \frac{r}{\dot{r}} dt = - \int_{\alpha_0}^{\alpha_P} B_2 \frac{r}{a_j \dot{\phi}_j \cos \alpha} d\alpha = \int_{\alpha_0}^{\alpha_P} B_2 (c_x \operatorname{tg} \alpha - c_y) (c_x + c_y \operatorname{tg} \alpha) d\alpha, \quad (15)$$

где $r(\alpha_P) = 0$, $\operatorname{tg} \alpha_P = \frac{y_c}{x_c}$, $c_x = \frac{2x_c}{a_j \dot{\phi}_j}$, $y_x = \frac{2y_c}{a_j \dot{\phi}_j}$. Интеграл (15) вычисляется в элементарных функциях

$$A = F(\alpha_P) - F(\alpha_0), \quad F(\alpha) = B_2 \left\{ - (c_x^2 - c_y^2) \ln |\cos \alpha| + c_x c_y (\operatorname{tg} \alpha - 2\alpha) \right\}. \quad (16)$$

Работа (16) является функцией параметра x_c . Минимальное значение соответствует параметру, являющемуся корнем уравнения $\frac{dA}{dx_c} = 0$.

Результаты численных расчетов оптимальных значений работы сил трения приведены в таблице 1.

Таблица 1

r_0	α_0	x_c	y_c	R	$A_{\min}$	A_0	ε (%)
-30	120	-12.99	-7.5	15	0.0114	0.009	21
-30	135	-10.61	-10.61	15	0.0103	0.009	12
-30	150	-15.00	-8.66	17.32	0.0098	0.009	7.8
-30	165	-28.98	-7.76	30	0.0092	0.009	2.2
-15	120	-6.50	-3.75	7.5	0.00286	0.00225	21
-15	135	-5.30	-5.30	7.5	0.00257	0.00225	12
-15	150	-7.50	-4.33	8.66	0.00244	0.00225	7.8
-15	165	-14.49	-3.88	15	0.00230	0.00225	2.2

Линии зацепления и профили звеньев для оптимальных дуг окружностей представлены на рисунках 5, 6.

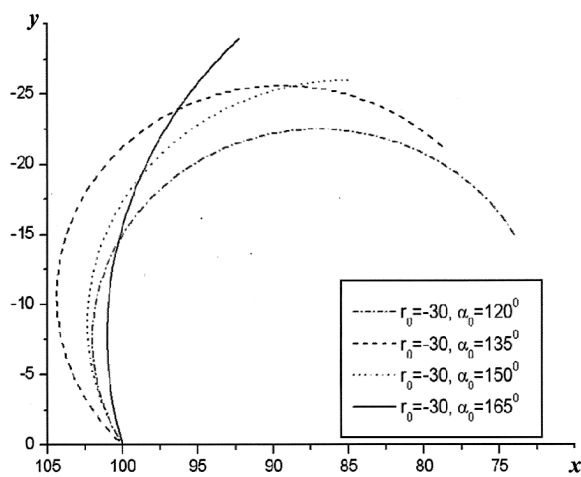


Рисунок 5 – Оптимальные ЛЗ – дуги окружностей $\gamma^\pm$

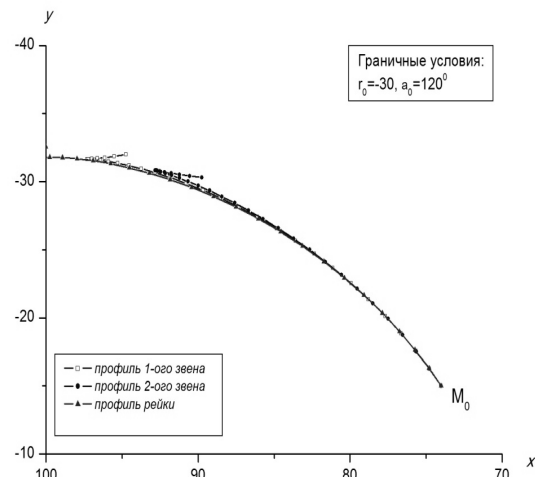


Рисунок 6 – Профили звеньев для оптимальных дуг окружностей $\gamma^\pm$

Следует отметить, что величина работы силы трения на дугах окружностей меньше, чем на соответствующих линиях постоянного угла зацепления.

VI. Линии зацепления со свободным концом

Рассмотрим теперь задачу со свободным концом, когда фиксированы только начальная точка $M_0(r_0, \alpha_0)$ и промежуток времени t_1 . В данном случае для работы силы трения имеет место оценка (12).

A. Линии постоянного угла $\alpha = \alpha_0 = \text{const}$.

Для линии постоянного угла (13) интеграл работы силы трения имеет вид

$$A = -B_2 \left(\frac{r_0 t_1}{a_j \dot{\phi}_j \cos \alpha_0} - \frac{t_1^2}{2} \right).$$

Эта величина достигает минимума (12) при $\alpha_0 = \pi$, а при фиксированном угле имеет минимум (14) в $t_1: r(t_1) = 0$. Действительно, необходимое условие экстремума $\frac{\partial A}{\partial t_1} = 0$ выполняется при

$$t_1 = \frac{r_0}{a_j \varphi_j \cos \alpha_0}, \text{ для которого } r(t_1) = 0.$$

В. Дуги окружностей.

Рассмотрим работу силы трения на дугах окружностей $\gamma^\pm$, проходящих через начальную точку $M_0(x_0, y_0)$

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2, \quad (17)$$

где $R = \sqrt{(x_0 - x_c)^2 + (y_0 - y_c)^2}$. Таким образом, семейство окружностей имеет два параметра – координаты центра (x_c, y_c) . Запишем (17) в параметрическом виде: $x(t) = x_c + R \cos(\varphi_0 \pm \varphi(t))$, $y(t) = y_c + R \sin(\varphi_0 \pm \varphi(t))$, где $\tan \varphi_0 = \frac{y_0 - y_c}{x_0 - x_c}$, а знак $\pm$ относится к дугам $\gamma^\pm$, отсчитываемым от начальной точки против или по часовой стрелке соответственно. В координатах

$$x = r \sin \alpha, \quad y = r \cos \alpha, \quad (18)$$

производная радиус-вектора по времени

$$\dot{r} = \frac{x\ddot{x} + y\ddot{y}}{r} = \left(-\frac{x}{r} \sin(\varphi_0 \pm \varphi) + \frac{y}{r} \cos(\varphi_0 \pm \varphi) \right) (\pm \dot{\varphi}) R = \mp R \dot{\varphi} [\sin \alpha \sin(\varphi_0 \pm \varphi) + \cos \alpha \cos(\varphi_0 \pm \varphi)],$$

а с учетом (2) получим

$$\pm (R/a_j) [tg \alpha \sin(\varphi_0 \pm \varphi) + \cos(\varphi_0 \pm \varphi)] d\varphi = \dot{\varphi}_j dt. \quad (19)$$

Выражение для (3) в координатах (18) принимает вид

$$N_T = C_2 \frac{r^2}{r \cos \alpha} = -C_2 \frac{x^2 + y^2}{y}.$$

В результате имеем:

$$A = -C_2 \int_0^{t_1} \frac{x^2 + y^2}{y} dt = -C_2 \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{x^2 + y^2}{y} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^{-1} d\varphi.$$

Производная $\dot{\varphi}$ определяется из (19), а верхний предел φ_1 из уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_j t_1 &= \pm \frac{R}{a_j} \int_0^{\varphi_1} \left[-\frac{x}{y} \sin(\varphi_0 \pm \varphi) + \cos(\varphi_0 \pm \varphi) \right] \cdot \int_0^{\varphi_1} \frac{y_c \cos(\varphi_0 \pm \varphi) - x_c \sin(\varphi_0 \pm \varphi)}{y_c + R \sin(\varphi_0 \pm \varphi)} d\varphi = \\ &= \frac{R}{a_j} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 \pm \varphi_1} \frac{y_c \cos \varphi' - x_c \sin \varphi'}{y_c + R \sin \varphi'} d\varphi' \end{aligned}$$

Результаты расчетов для $t_1 = 0.1$ с представлены в таблице 2. В качестве A_0 взято значение для работы на линии постоянного угла $\alpha = \pi$.

Заключение

Экстремали функционала работы силы трения дают решение задачи оптимизации зацепления в реальном времени только для классической вариационной задачи с закрепленными концами линий зацепления, не доходящих до полюса. Это означает, что для другого типа краевых задач работа силы трения на допустимых траекториях не имеет локальных экстремумов.

Для линий зацеплений с постоянным углом, начинающихся в фиксированной точке и заканчивающихся в полюсе, работа сил трения принимает минимальные значения при малых углах зацеплений. Для линий зацеплений – дуг окружностей, проходящих через эти же точки, работа сил трения существенно меньше, чем на прямых линиях.

Библиографический список использованной литературы

1. Фролов К.В. Системная концепция и алгоритмы проектирования механизмов произвольной структуры / К.В. Фролов, В.П. Прохоров // Труды Всемирного Конгресса по ТММ, Оулу, Финляндия. — 1999. — Т. 2. — С. 689–694.
2. Frolov K.V. Structurization of the Basis of Knowledge in the Mechanisms of Machines and the Choice of Optimal Strategies of Research / K.V. Frolov, V.P. Prohorov // Proceedings of the 11th World Congress in Mechanism and Machine Science, Tianjin, China. — 2004. — P. 308–311.
3. Прохоров В.П. Аналитическая модель системы твердых тел произвольной структуры / В.П. Прохоров // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1986. — № 2. — С. 94–98.
4. Prohorov V.P. System conception of gearmechanisms research (The general theory of engagements) / V.P. Prohorov // Tenth World Congress on the Theory of Machines and Machines and Mechanisms, Oulu, Finland. — 1999. — Vol. 7. — P. 2684–2691.
5. Prohorov V.P. Actual Problems, Models and Algorithms of Technological Synthesis of General Type Engagements / V.P. Prohorov // 11th World Congress in Mechanisms and Machine Science, Tianjin, China. — 2004. — P. 289–292.
6. Ленский М.Ф. Инвариантная теория плоских кинематических пар с точечным касанием / М.Ф. Ленский // Машиноведение. — 1967. — № 5.
7. Прохоров В.П. Алгоритмы решения задач оптимизации плоских трехзвенных механизмов с постоянным передаточным отношением по некоторым функционалам качества / В.П. Прохоров // Надежность и долговечность механизмов, элементов конструкций и биомеханических систем: материалы междунар. науч.-техн. конф. — Севастополь: СевНТУ, 2005. — С. 60–65.

Поступила в редакцию 29.06.2011 г.

Прохоров В.П., Щипаков В.А. Варіаційна задача оптимізації плоских зачеплень по критерію потужності тертя

Розглянута плоска задача однокритеріальної оптимізації зчеплення з нерухомими осями і постійним передавальним відношенням за критерієм потужності тертя. Актуальність задачі полягає в потенційній можливості зниження енергетичних втрат в передавальних механізмах. Наведено алгоритми рішення варіаційних і неваріаційних задач.

Ключові слова: варіаційний метод, потужність тертя, оптимізація.

Prohorov V.P., Schipakov V.A. Variational problem of optimization of plain engagements by the friction power criterion

This paper deals with the plain problem of one-criterion optimization of engagements with fixed axles and permanent gear ratio by the friction power criterion. The vitality of this problem lies in potential possibility to reduce power losses of gears. The algorithms of both variational and non-variational problems solution are provided herein.

Keywords: variational method, friction power, optimization, power losses of gears.