

УДК 681.324

В.В. Кирюхин, доцент, канд. физ.-мат. наук

Севастопольский национальный технический университет

ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: kvt@sevgtu.sebastopol.ua

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОВ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПРИ ВЫСОКОНАДЕЖНОЙ ОБРАБОТКЕ ДАННЫХ В ЦИФРОВЫХ УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ

Анализируется эффективность различных методов высоконадежной обработки данных в цифровых управляющих системах по критериям минимума вероятности ошибки и среднего времени на принятие решения. Показано, в частности, что veto-системы могут быть более эффективны, чем традиционные системы с тем же или несколько большим числом компьютеров.

Ключевые слова: *высоконадежная обработка данных, цифровая управляющая система, мажоритарная система, veto-система.*

Постановка проблемы. Благодаря успехам интегральной технологии отказоустойчивость современных электронных средств обработки данных в системах управления во многом удовлетворяет разработчиков и пользователей этих систем. Однако, что касается устойчивости к сбоям, возникающим вследствие внешних по отношению к системам причин, то здесь проблема по-прежнему остается открытой. Сбои приводят к выдаче системой дорогостоящих ошибочных решений; с другой стороны, в подавляющем большинстве случаев схемами контроля и диагностики эти сбои не фиксируются; по существу, «фиксируются» лишь последствия этих сбоев в виде аварий и катастроф, когда что-либо поправить уже невозможно.

Единственным достаточно эффективным средством борьбы с этим явлением многим представляется метод маскирования, или нейтрализации последствий, сбоев. Метод предполагает введение аппаратной и/или временной избыточности в систему.

За эпоху существования компьютерной техники практика маскирования сбоев выработала довольно много способов введения такой избыточности. По существу, все они так или иначе использовали мажоритарный принцип принятия решений в его классическом понимании, когда решением системы, содержащей нечетное число активных модулей (компьютеров), является решение большинства этих модулей, причем решение системы следует на ее выход без задержки, немедленно по появлении выходных сигналов на всех модулях. В случае системы с четным количеством модулей возможность задержки, обусловленной равным количеством решений типа «да» и «нет», устранялась путем специальной организации решающего элемента (например, введением пороговой логики). Классические мажоритарные системы находят применение в системах управления, где одинаково опасны как выдача неверного решения, так и задержка в выдаче решения.

С другой стороны, существует множество производственных систем, в которых ошибки управляющего компьютера так же опасны, но которые могут допускать без особого ущерба для себя задержки в выдаче компьютером управляющих сигналов (например, банковские системы, системы резервирования и продажи билетов на транспорте, автоматические конвейерные линии и т.п.). В этих условиях не лишена практического интереса проблема поиска нетрадиционных архитектур избыточных систем, в которых дальнейшее повышение надежности принятия правильного решения осуществлялась бы, возможно, за счет увеличения времени на процедуру принятия. В свое время [1] нами была предложена схема организации системы из четырех компьютеров, названная QCR (quadruple-computer redundant)-системой. В QCR-системе все компьютеры функционально идентичны, обрабатывают в цикле длительностью t одни и те же данные и затем выдают ответ на входы решающего элемента. Последний либо выдает в качестве решения системы ответ по большинству, либо, в случае неопределенного состояния (равенства голосов «за» и «против») дает команду на повторение обработки тех же данных. Показано [1], что QCR-система работает надежнее, чем мажоритарная из пяти компьютеров, и что аналогичная система из произвольного четного числа n компьютеров работает надежнее, чем мажоритарная система, включающая $n+1$ компьютер. Это повышение надежности достигается за счет некоторого увеличения времени на выдачу решения системой. Естественно поэтому назвать подобные системы с четным числом компьютеров мажоритарными системами с задержкой. Поскольку определяющим признаком последних, а также классических мажоритарных систем является количество компьютеров: $n = 2m$, либо $n = 2m + 1$, где m – некоторое натуральное число, то можно предложить и более компактную идентификацию, назвав классические мажоритарные системы $(2m + 1)$ -системами, а системы с задержкой – $2m$ -системами.

Дальнейшее повышение надежности избыточных систем при прочих равных условиях может быть достигнуто ужесточением требований к разности чисел противоположных ответов на выходах компьютеров. Так возникает идея об организации работы системы по принципу «вето», когда решающий элемент направляет на выход системы ответ лишь в случае, если он одинаков на выходах всех n компьютеров. Очевидно, при таком способе организации задержка в выдаче ответа возможна при любом n , четном или нечетном. Идентифицируем эту систему синонимами вето-система, n -система, n вето-система

Целью данной статьи является оценка эффективности функционирования вето-системы и сравнительный анализ эффективности n -системы, с одной стороны, и $2m$, $(2m+1)$ -систем, с другой.

Если эффективность классических мажоритарных систем можно было сравнивать по одномерной характеристике – надежности, то в случае вето-систем и систем с задержкой этого показателя уже недостаточно.

В связи с этим эффективность рассматриваемых систем будем оценивать двумерным вектором (Q, T) . Здесь Q – ненадежность системы, определяемая как вероятность выдачи системой неверного решения (ответа); соответственно, величина $P = 1 - Q$ имеет смысл надежности, или вероятности выдачи системой правильного ответа. Далее, T – это время реакции системы, определяемое как среднее время от момента поступления данных на обработку до момента выдачи ответа решающим элементом. Подчеркнем, что $T = \tau$ лишь в случае $(2m+1)$ -систем; в других случаях T больше τ на среднюю задержку, обусловленную возможными повторениями процесса обработки данных.

Естественно считать систему тем эффективнее, чем меньше значения Q и T при прочих равных условиях.

Каждый компьютер в системе охарактеризуем параметром q_i – его ненадежностью, или вероятностью выдачи компьютером i неверного ответа после цикла обработки данных.

Вето-система. Определим n вето-систему как вычислительную систему из n функционально идентичных компьютеров, которые в течение некоторого цикла длительностью τ обрабатывают одинаковые данные и затем выдают решение (ответ) на входы решающего элемента. Последний в качестве ответа системы выдает решение компьютеров в том и только в том случае, когда эти решения одинаковы. В противном случае дается команда на повторение цикла обработки с теми же данными, и т.д.

Оценим эффективность n вето-системы с помощью вектора (Q_n, T_n) , определенного выше. Здесь индекс n указывает на принадлежность оценок к n -системе. Будем считать, что выполняются следующие условия:

- (а) результат обработки данных, т.е. ответ любого компьютера или системы – величина, которая может принять одно из двух альтернативных значений («да» – «нет», «включить» – «выключить» и т.п.);
- (в) ненадежность q_i компьютера i не зависит от времени и от состояния других компьютеров; она также остается постоянной от цикла к циклу обработки данных;
- (с) ненадежность решающего элемента и вносимая им задержка равны нулю (это условие – наиболее легко оправдываемое ввиду того, что сложность решающего элемента на несколько порядков меньше сложности компьютера).

Определим следующие булевы переменные и функции.

$$\text{Пусть } x_i = \begin{cases} 1, & \text{если компьютер } i \text{ выдает правильный ответ,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$Y_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ вето-система выдает неправильный ответ,} \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$Z_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ вето-система выдает какой-либо ответ} \\ & \text{непосредственно после цикла обработки данных,} \\ 0, & \text{если цикл обработки повторяется.} \end{cases}$$

В соответствии с этими определениями можно легко записать через булевы переменные x_i совершенные дизъюнктивные нормальные формы функций Y_n и Z_n :

$$Y_n(x_1, \dots, x_n) = \left(\bigcap_{i=1}^n \bar{x}_i \right), \quad (1)$$

$$Z_n(x_1, \dots, x_n) = \left(\bigcap_{i=1}^n x_i \right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^n \bar{x}_i \right). \quad (2)$$

Обозначим через $\Pr(a)$ вероятность того, что булева переменная или функция a равна 1. Тогда с учетом ортогональности конъюнкций в выражениях (1) и (2) можно записать:

$$\Pr(Y_n) = \Pr\left(\bigcap_{i=1}^n \bar{x}_i\right) = \prod_{i=1}^n \Pr(\bar{x}_i),$$

или

$$\Pr(Y_n) = \prod_{i=1}^n q_i. \quad (3)$$

Аналогично,

$$\Pr(Z_n) = \prod_{i=1}^n \Pr(x_i) + \prod_{i=1}^n \Pr(\bar{x}_i),$$

то есть

$$\Pr(Z_n) = \prod_{i=1}^n (1 - q_i) + \prod_{i=1}^n q_i. \quad (4)$$

Интересующая нас характеристика Q_n есть условная вероятность $\Pr(Y_n/Z_n)$ того, что вето-система выдаст неверный ответ, при условии, что она вообще выдаст какой-либо ответ.

Эту вероятность можно найти из уравнения

$$\Pr(Y_n) = \Pr(Y_n / Z_n) \Pr(Z_n),$$

откуда

$$\Pr(Y_n / Z_n) = \Pr(Y_n) / \Pr(Z_n),$$

или, с учетом (3) и (4),

$$Q_n = \frac{\prod_{i=1}^n q_i}{\prod_{i=1}^n q_i + \prod_{i=1}^n (1 - q_i)}. \quad (5)$$

Вычислим, далее, среднее время T_n выдачи ответа (время реакции) вето-системы. В наших условиях время выдачи ответа – случайная величина, кратная τ , которая подчиняется закону Бернулли, с вероятностью успеха, равной $\Pr(Z_n)$. Следовательно, ее среднее значение T_n равно

$$T_n = \frac{\tau}{\prod_{i=1}^n q_i + \prod_{i=1}^n (1 - q_i)}. \quad (6)$$

Формулы (5) и (6) дают возможность оценить значения характеристик вето-системы при различных между собой ненадежностях q_i компьютеров. Нас интересует случай, когда величины q_i одинаковы, т.е. $q_i = q$, $i = 1, \dots, n$. При этом выражения (5) и (6) соответственно запишутся в виде:

$$Q_n(q) = \frac{q^n}{q^n + (1 - q)^n}, \quad (7)$$

$$T_n(q) = \frac{\tau}{q^n + (1 - q)^n}. \quad (8)$$

Более удобной для анализа $Q_n(q)$ является формула:

$$Q_n(q) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{q} - 1\right)^n}. \quad (9)$$

Из (9), в частности, следует, что $Q_n(q)$ – возрастающая от 0 до 1 функция, причем на отрезке $0 \leq q \leq 1/2$ она выпукла, в точке $q = 1/2$ ее значение равно $1/2$, и при $q > 1/2$ она вогнута. Последнее

означає, що при $q > 1/2$ вето-система помиляється частіше, ніж будь-який її комп'ютер в окремість, і, відповідно, застосування її в цих умовах повинно бути виключено. Навпаки, при $q \rightarrow 0$, як буде показано нижче, надійність вето-системи більша і зростає швидше, ніж відповідна характеристика будь-якої мажоритарної системи з тим же або навіть з декількома більшим числом комп'ютерів.

Це зростання, як і в інших системах з затримкою [1], досягається ціною збільшення часу реакції T_n . Оцінимо діапазон зміни функції $T_n(q)$ на відрізку $0 \leq q \leq 1$. Зпершу всього, зауважимо, що $T_n(0) = T_n(1) = \tau$. Далі, похідна (10) функції $T_n(q)$,

$$T'_n(q) = \frac{n[(1-q)^{n-1} - q^{n-1}]}{[q^n + (1-q)^n]^2}, \quad (10)$$

положителна при $q < 1/2$, рівна нулю при $q = 1/2$ і від'ємна при $q > 1/2$. Відповідно, в точці $q = 1/2$ наявне максимум, і цей максимум рівний

$$T_n(1/2) = 2^{n-1}\tau. \quad (11)$$

Таким чином,

$$\tau \leq T_n(q) \leq 2^{n-1}\tau. \quad (12)$$

Вето-система і одиночний комп'ютер. Оцінимо ступінь підвищення ефективності вето-системи по порівнянню з ефективністю одиночного комп'ютера. Естесвенними мірами різниці являються відносительні зміни характеристик, а зокрема, відносительне зменшення δ_n^1 ненадійності,

$$\delta_n^1 = \frac{Q_1(q) - Q_n(q)}{Q_1(q)}, \quad (13)$$

і відносительне збільшення t_n^1 часу реакції,

$$t_n^1 = \frac{T_n(q) - T_1(q)}{T_1(q)}, \quad (14)$$

де $Q_1(q) = q$ і $T_1(q) = \tau$ – відповідно ненадійність і час реакції одиночного комп'ютера.

Підставляючи в формули (13) і (14) вирази (7) і (8), маємо:

$$\delta_n^1 = 1 - \frac{q^{n-1}}{q^n + (1-q)^n}, \quad (15)$$

$$t_n^1 = \frac{1}{q^n + (1-q)^n} - 1. \quad (16)$$

Оцінки (11), (12), (15) і (16) справедливі при будь-яких значеннях q . Нас в першу чергу цікавить випадок високонадійних комп'ютерів, для яких q не більше, скажемо, 0,01. Розкладемо функції δ_n^1 і t_n^1 в ряд Маклорена і залишивши перші його члени, з (15) і (16) маємо

$$\delta_n^1 \cong 1 - q^{n-1}, \quad (17)$$

$$t_n^1 \cong nq. \quad (18)$$

З оцінок (17) і (18) видно, що відносительне зменшення ненадійності вето-системи по порівнянню з одиночним комп'ютером наближається до 100%, в той час як відносительне збільшення часу реакції становить не більше $n\%$.

Вето-система і класическа мажоритарна система. З загальних міркувань слідує, що оскільки в вето-системі визначені найжорсткіші умови (єдиногласність) прийняття рішення, то при інших рівних умовах ймовірність видачі неверного відпові здесь очікується найменшою, а час реакції системи – найбільшим по порівнянню з іншими методами організації системи. Оцінимо вигоду в надійності і збільшення часової затримки вето-системи відносно мажоритарних $(2m+1)$ -систем.

Найбільш поширена і відома структура, застосовувана при організації високонадійних обчислень – це класическа мажоритарна система, яку ми називаємо $(2m+1)$ -

системой, по числу образующих её компьютеров. Если выполняются условия (а)–(с), то характеристики Q_{2m+1} и T_{2m+1} такой системы в наших обозначениях записываются как

$$Q_{2m+1} = \sum_{i=m+1}^{2m+1} C_{2m+1}^i q^i (1-q)^{2m+1-i}, \quad (19)$$

$$T_{2m+1} = \tau, \quad (20)$$

где C_{2m+1}^i – биномиальный коэффициент. Согласно (20), время реакции системы минимально.

Определим, по аналогии с (13), относительное уменьшение δ_n^{2m+1} ненадёжности n -системы перед $(2m+1)$ -системой как

$$\delta_n^{2m+1} = 1 - Q_n / Q_{2m+1}.$$

Подставив сюда значения Q_n и Q_{2m+1} соответственно из (7) и (19), при $q \leq 0,01$ получим оценку в виде

$$\delta_n^{2m+1} = 1 - q^{n-(m+1)} / C_{2m+1}^{m+1}. \quad (21)$$

Вето-система с n компьютерами будет надёжнее мажоритарной $(2m+1)$ -системы, если $\delta_n^{2m+1} > 0$, или, согласно (21), если

$$1 - q^{n-(m+1)} / C_{2m+1}^{m+1} > 0. \quad (22)$$

Разрешая неравенство (22) относительно n , получим:

$$n > f(m), \quad (23)$$

где

$$f(m) = m+1 - \ln C_{2m+1}^{m+1} / |\ln q|.$$

Здесь $m+1$ – порог большинства компьютеров в $(2m+1)$ -системе. Полагая, например, $m=1$, получим известную схему *TMR* (*Triple Modular Redundancy*), для которой, при $q \leq 0,01$, $f(1) = 2 - \ln 3 / (2 \ln 10) < 2$.

Но тогда неравенство (23) удовлетворяется при $n=2$ и $m=1$, т.е. двухкомпьютерная veto-система надёжнее трёхкомпьютерной схемы *TMR*, используемой сейчас в кластерах высокой доступности [2].

Анализируя неравенство (23) при больших m и n , приходим к следующему заключению:

При четном n , $n > 2$, veto-система надёжнее мажоритарной системы с $n+1$ или $n+3$ компьютерами. При нечетном n veto-система надёжнее мажоритарной системы с n или $n+2$ компьютерами.

Численно относительный выигрыш в надёжности при этом оценивается формулой (21).

Этот выигрыш достигается ценой некоторого относительного увеличения t_n^{2m+1} времени реакции veto-системы по сравнению с таковым для мажоритарных систем. Поскольку время реакции любой классической мажоритарной системы равно τ , то t_n^{2m+1} совпадает с оценкой t_n^1 и, следовательно, определяется формулой (16), а при малых q – формулой (18).

Вето-система и мажоритарная система с задержкой. По определению, *NCR*-система [1], отождествляемая здесь с $2m$ -системой, или мажоритарной системой с задержкой – это система из четного числа $2m$ компьютеров, в которой обработка повторяется лишь в случае равенства числа m компьютеров противоположных ответов на выходе компьютерной системы.

В [1] при соблюдении условий (а)–(с) получены оценки компонентов вектора (Q_{2m}, T_{2m}) эффективности *NCR*-системы, которые в установленных здесь обозначениях записываются как

$$Q_{2m} = R(m, q) / (1 - W(m, q)), \quad (24)$$

$$T_{2m} = \tau / (1 - W(m, q)), \quad (25)$$

где

$$R(m, q) = \sum_{i=m+1}^{2m} C_{2m}^i q^i (1-q)^{2m-i}, \quad (26)$$

$$W(m, q) = C_{2m}^m q^m (1-q^m). \quad (27)$$

Сравним эффективности n veto-системы и $2m$ -системы с помощью относительных разностей

$$\delta_n^{2m} = 1 - Q_n / Q_{2m}, \quad (28)$$

$$t_n^{2m} = T_n / T_{2m} - 1. \quad (29)$$

Подставив в (28) выражения Q_n и Q_{2m} соответственно из (7) и (24), а в (29) – выражения (8) и (25), можно получить явные формулы для δ_n^{2m} и t_n^{2m} через параметры m , n и q . Эти формулы ввиду их громоздкости здесь не приводятся. Нас по-прежнему интересует случай $q \leq 0,01$. При этом, как показано в [1], функции (24) и (25) аппроксимируются следующими:

$$Q_{2m} \approx R(m, q)(1 + W(m, q)), \quad (30)$$

$$T_{2m} \approx \tau(1 + W(m, q)). \quad (31)$$

Здесь, в свою очередь, функция $R(m, q)$ может быть заменена ее приближенным выражением

$$R(m, q) \approx C_{2m}^{m+1} q^{m+1} (1 - q)^{m-1}, \quad (32)$$

так как при малых q в представлении (26) значение $R(m, q)$ определяется слагаемым с q в наименьшей степени. С учетом (30), (32) и (18) оценка (28) принимает вид

$$\delta_n^{2m} = 1 - q^{n-m-1} / (C_{2m}^{m+1} (1 - q)^{n-m+1}). \quad (33)$$

Вето-система с n компьютерами будет надежнее $2m$ -системы, если выполняется неравенство $\delta_n^{2m} > 0$. Разрешая, с учетом (33), это неравенство относительно n , при $q \leq 0,01$ получаем:

$$n > m + 1 - \frac{1}{4} \ln C_{2m}^{m+1}. \quad (34)$$

Из (34) непосредственно заключаем, что при любом $n \geq 3$ veto-система надежнее n -компьютерной мажоритарной системы с задержкой, если n – четное, и надежнее таковой с $(n + 1)$ компьютером, если n – нечетное.

Более того, при $n > 3$ veto-система становится надежнее мажоритарной системы с задержкой, соответственно, с $n + 2$ и $n + 3$ компьютерами.

Оценим, далее, относительное увеличение времени реакции n veto-системы с таковым для $2m$ -системы по формуле (29). Для малых q , используя выражения $T_n = \tau + nq\tau$ и (31), получаем:

$$t_n^{2m} \approx nq - C_{2m}^m q^m (1 - q)^m. \quad (35)$$

Из (35) видно, что это увеличение при q порядка 0,01 составляет не более $n\%$.

Выводы. В работе для повышения надёжности обработки данных в компьютерных системах предложено использовать принцип вето, в соответствии с которым система из n компьютеров, решающих одну и ту же задачу, выдаёт ответ лишь в случае его совпадения на выходах всех компьютеров. Эффективность veto-системы оценена по двум характеристикам: вероятности выдачи ошибочного ответа (ненадежности) и среднего времени обработки данных до выдачи ответа (времени реакции). Показано, в частности, что при достаточно надежных компьютерах ненадежность veto-системы ниже ненадежности классических мажоритарных систем с тем же или даже большим числом компьютеров. Это возрастание надежности достигается ценой увеличения времени реакции системы, хотя оно в вышеуказанных условиях и незначительно, порядка нескольких процентов.

Благодаря предположениям о двоичном характере ответа и постоянстве надежности компьютеров во времени удалось получить относительно простые выражения для оценок характеристик систем. Эти результаты могут рассматриваться как предварительные относительно возможных применений в реальных системах типа цифровых управляющих систем, кластеров высокой доступности и т.п. Следующим этапом исследований является оценивание свойств veto-систем с недвоичным (многозначным) выходом и зависящей от времени надежностью.

Библиографический список использованной литературы

1. Kiryukhin V.V. A quadruple-computer redundant type fault-tolerant system / V.V. Kiryukhin, A.M. Chernykh // Proc. 3rd USA-Japan Computer Conference, San-Francisco. — 1978. — P. 374–377.
2. Кластеры, практическое руководство по параллельным вычислениям [Электронный ресурс]. — Электрон. текстовые данные. — Режим доступа: <http://cluster.linux-ekb.info>.

Поступила в редакцию 25.07.2011 г.

Кірюхін В.В. Порівняльний аналіз ефективності методів прийняття рішень у разі високонадійної обробки даних у цифрових керуючих системах

Аналізується ефективність різних методів високонадійної обробки даних у цифрових керуючих системах за критеріями мінімуму ймовірності помилки і середнього часу на прийняття рішення. Показано, зокрема, що вето-системи можуть бути більш ефективні, ніж традиційних системи з тим же або трохи більшим числом комп'ютерів.

Ключові слова: високонадійна обробка даних, цифрова керуюча система, мажоритарна система, вето-система.

Kiryukhin V.V. Comparative analysis of decision making in the highly reliable data processing for digital control systems

The paper analyses the effectiveness of different methods of the highly reliable data processing in digital control systems according to the criteria of minimum error probability and the average solving time. It is shown that the veto-system can be more effective than the traditional system with the same or slightly larger number of computers.

Keywords: highly reliable data processing, digital control system, majority system, veto-system.