

УДК 669.169

А.И. Балакин, ст. преподаватель,**В.Я. Копп, профессор, д-р техн. наук,****О.П. Чуб, доцент, канд. техн. наук***Севастопольский национальный технический университет,**ул. Университетская, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: ps@sevgtu14.sebastopol.ua***МОДЕЛЬ АСИНХРОННОЙ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ЛИНИИ С ВОЗВРАТОМ ПРОДУКЦИИ НА ПОВТОРНОЕ ОБСЛУЖИВАНИЕ**

Рассматривается построение математической модели асинхронной автоматизированной линии с возвратом продукции на повторное обслуживание, с неограниченным и ограниченным количеством повторных обслуживаний. Рассмотрены модели асинхронной линии с возвратом продукции при одинаковой и изменяющейся вероятности выхода годных изделий на выходе технологической ячейки при повторных обслуживаниях.

Ключевые слова: асинхронная автоматизированная линия, эквивалентная замена, полумарковский процесс, возврат продукции на повторное обслуживание.

Во многих случаях структура автоматизированных линий включает в себя контролирующие устройства, которые производят контроль и сортировку изделий после определенных операций. Если обнаруживается исправимый брак, то изделие по обратной связи отправляется на соответствующую ячейку для его исправления. Это позволяет уменьшить количество бракованных изделий на выходе линии.

В этом случае необходимо определить производительность асинхронной автоматизированной линии с учетом возврата продукции на повторное обслуживание. На рисунке 1 изображен пример структурной схемы асинхронной автоматизированной линии с возвратом продукции на повторное обслуживание. Заявка, поступающая по каналу обратной связи, имеет приоритет по сравнению с заявкой, поступающей с накопителя и обслуживается в первую очередь.

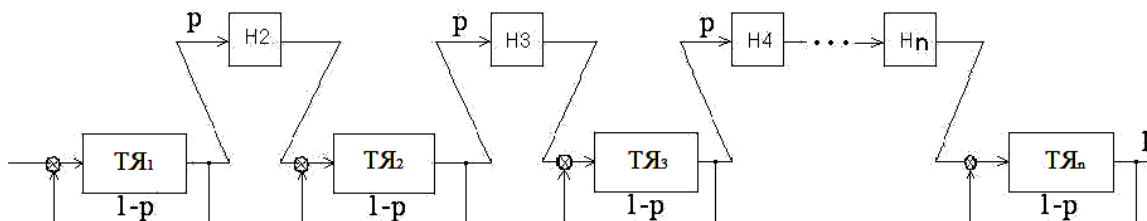


Рисунок 1 – Структурная схема асинхронной автоматизированной линии с возвратом продукции на повторное обслуживание

Предполагалось, что при повторном обслуживании брак исправляется автоматически.

Целью статьи является построение математической модели линии с указанной структурой. Для решения поставленной задачи предлагается следующий подход: ячейка с обратной связью, представленная на рисунке 2, а, эквивалентно, с точки зрения производительности, заменяется ячейкой без обратной связи, представляющей собой простейший элемент с двумя факторными состояниями (рисунок 2, б). Время одного обслуживания на ячейке $ТЯ_m$ с обратной связью – $\bar{t}_m$, а на эквивалентной ячейке $\bar{t}_{mэ}$. Вероятность возврата продукции на вход ячейки – $1-p$. Параметры надежности обеих ячеек одинаковы. Необходимо определить время $\bar{t}_{mэ}$ обслуживания на эквивалентной ячейке.

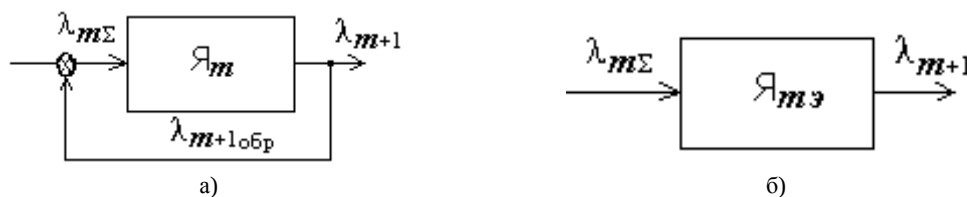


Рисунок 2 – Замена ячейки охваченной обратной связью (а) эквивалентной ячейкой (б)

Таким образом, рассматривается задача: определить среднее время $\bar{t}_{mэ}$ обслуживания детали на $ТЯ_m$ если известно, что с вероятностью p она обслужена правильно и передана далее по технологической цепочке, а с вероятностью $(1-p)$ отправлена на вход этой же $ТЯ_m$ на доработку. Число возвратов на повторное обслуживание не ограничено.

Необходимо определить математическое ожидание дискретной случайной величины принимающей значение $\bar{t}_m, 2\bar{t}_m, 3\bar{t}_m, \dots, k \cdot \bar{t}_m, \dots$ с вероятностями $p, p(1-p), p(1-p)^2, \dots, p(1-p)^{k-1}, \dots$ соответственно. Среднее время $\bar{t}_{mэ}$ обслуживания одной заявки получается из геометрического распределения и определяется выражением:

$$\bar{t}_{mэ} = \frac{\bar{t}_m}{p}.$$

После того, как $\bar{t}_{mэ}$ определено, используется одна из моделей ОАЛ, например, приведенная в [1].

Таким образом, чтобы учесть ОС, которыми охвачены технологические ячейки (ТЯ), достаточно в модели ОАЛ средние значения времен $\bar{t}_{m,(\overline{1,n})}$ обслуживания на $ТЯ_m$ разделить на p .

На следующем этапе рассмотрим случай, когда число повторных обслуживаний на $ТЯ_k$ ограничено и не может превышать числа m , а времена повторных обслуживаний различны и описываются ФР $F_k^g(t)$, где $k = \overline{1,n}$ - номер ТЯ в САЛ, а $g = \overline{1,m}$ - номер повторного обслуживания.

Для того чтобы определить ФР времени затрачиваемого на m повторных обслуживаний, необходимо построить полумарковский процесс в дискретном фазовом пространстве с использованием графа состояний, представленного на рисунке 3.

Считаем, что процесс Марковского восстановления задается двухкомпонентной цепью Маркова $(S_n, \theta_n; n \geq 0)$ с вероятностями переходов [2]:

$$P\{S_{n+1}=r, \theta_{n+1} \leq t / S_n=k\} = Q_{kr}(t).$$

В данном случае компоненты S_n и θ_n условно независимы, то есть выполняется равенство $P\{S_{n+1}=r, \theta_{n+1} \leq t / S_n=k\} = P\{S_{n+1}=r / S_n=k\} \cdot P\{\theta_{n+1} \leq t / S_n=k\}$.

Тогда компоненты полумарковской матрицы для дискретного фазового пространства состояний $E = \overline{1,n}$ равны:

$$Q_{kr}(t) = P_{kr} G_k(t), \quad k, r \in E,$$

где $\sum_{r \in E} Q_{kr}(t) = P\{\theta_{n+1} \leq t / S_n=k\} = G_k(t), k \in E$.

Определим стационарное распределение $\pi = (\pi_k^g; g \in E)$ полумарковского процесса (ПМП) в фазовом пространстве E по формулам, приведенным в [2]:

$$\pi_k^g = \rho_k^g M_k^g / M; \quad (1)$$

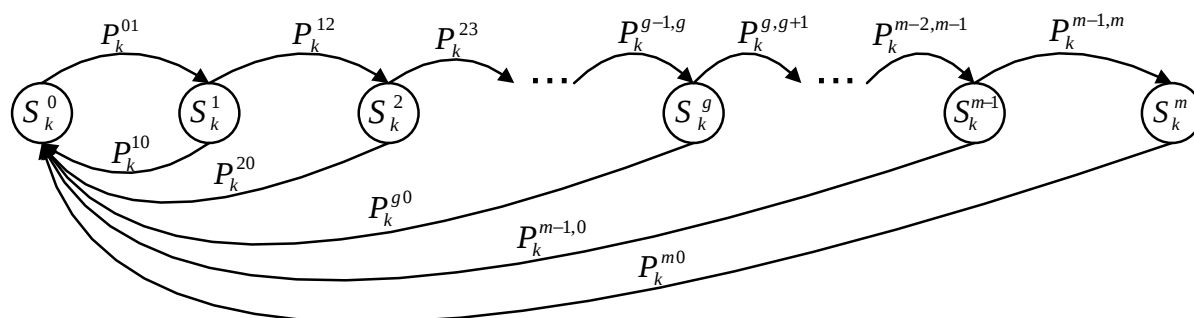
$$M = \sum_{g \in E} \rho_k^g M_k^g, \quad g \in E,$$

где $\rho = (\rho_k^g; g \in E)$ - стационарное распределение вложенной цепи Маркова (ВЦМ); M_k^g - средние времена пребывания в состояниях ПМП.

Величины ρ_k^g определяются из системы уравнений [2]:

$$\rho_k^g = \sum_{r \in E} \rho_r P_{rk}, \quad (2)$$

причем $\sum_g \rho_k^g = 1$.

Рисунок 3 – Граф состояний $ТЯ_k$ при ограниченном числе m повторных обслуживаний

Состояние графа:

S_k^0 – мгновенное состояние, соответствующее моменту окончания обслуживания и выдачи продукции;

S_k^1 – первое обслуживание с функцией распределения $F_k^1(t)$ и математическим ожиданием M_k^1 ;

S_k^2 – второе обслуживание с функцией распределения $F_k^2(t)$ и математическим ожиданием M_k^2 ;

.....

S_k^g – g -ое обслуживание с функцией распределения $F_k^g(t)$ и математическим ожиданием M_k^g .

.....

S_k^m – m -ое обслуживание с функцией распределения $F_k^m(t)$ и математическим ожиданием M_k^m .

Составим на основе (2) систему уравнений для определения ρ_k^g , $g = (0, m)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_k^0 = \rho_k^1 \cdot P_k^{10} + \rho_k^2 \cdot P_k^{20} + \rho_k^3 \cdot P_k^{30} + \dots + \rho_k^g \cdot P_k^{g0} + \dots + \rho_k^m \cdot P_k^{m0} = \sum_{i=1}^m \rho_k^i \cdot P_k^{i0} \\ \rho_k^1 = \rho_k^0 \cdot P_k^{01} \\ \rho_k^2 = \rho_k^1 \cdot P_k^{12} = \rho_k^0 \cdot P_k^{01} \cdot P_k^{12} \\ \rho_k^3 = \rho_k^2 \cdot P_k^{23} = \rho_k^0 \cdot P_k^{01} \cdot P_k^{12} \cdot P_k^{23} \\ \rho_k^g = \rho_k^{g-1} \cdot P_k^{g-1,g} = \rho_k^0 \cdot P_k^{01} \cdot P_k^{12} \cdot \dots \cdot P_k^{g-1,g} \\ \dots \dots \dots \\ \rho_k^m = \rho_k^{m-1} \cdot P_k^{m-1,m} = \rho_k^0 \cdot P_k^{01} \cdot P_k^{12} \cdot P_k^{23} \cdot \dots \cdot P_k^{g-1,g} \cdot \dots \cdot P_k^{m-2,m-1} \cdot P_k^{m-1,m} = \rho_k^0 \prod_{i=1}^m P_k^{i-1,i} \end{array} \right. \quad (3)$$

Условие нормировки

$$\sum_{g=1}^m \rho_k^g = 1. \quad (4)$$

В случае если вероятности выхода годной продукции при повторных обслуживаниях одинаковы то:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_k^{10} = P_k^{20} = P_k^{30} = \dots = P_k^{g0} = \dots = P_k^{m-1,0} = P_k; \\ P_k^{m0} = 1; \\ P_k^{01} = 1; \\ P_k^{12} = P_k^{23} = \dots = P_k^{g-1,g} = \dots = P_k^{m-1,m} = (1 - P_k). \end{array} \right. \quad (5)$$

Подставив все значения для ρ_k^g , $g = (0, m)$ из (3) в условие нормировки (4) получим

$$\rho_k^0 (1 + P_k^{01} + P_k^{01} \cdot P_k^{12} + P_k^{01} \cdot P_k^{12} \cdot P_k^{23} + \dots + P_k^{01} \cdot P_k^{12} \cdot P_k^{23} \cdot \dots \cdot P_k^{g-1,g} + \dots + \prod_{i=1}^m P_k^{i-1,i}) = 1.$$

Откуда

$$\rho_k^0 = (1 + P_k^{01} + P_k^{01} \cdot P_k^{12} + P_k^{01} \cdot P_k^{12} \cdot P_k^{23} + \dots + \prod_{i=1}^m P_k^{i-1,i})^{-1} \quad (6)$$

Подставив выражения (5) в (3), (6) окончательно имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_k^0 = [2 + (1 - p_k) + (1 - p_k)^2 + \dots + (1 - p_k)^{m-1}]^{-1}; \\ \rho_k^1 = \rho_k^0; \\ \rho_k^2 = \rho_k^0 \cdot (1 - p_k); \\ \rho_k^3 = \rho_k^0 \cdot (1 - p_k)^2; \\ \dots\dots\dots \\ \rho_k^g = \rho_k^0 \cdot (1 - p_k)^{g-1}; \\ \dots\dots\dots \\ \rho_k^m = \rho_k^0 \cdot (1 - p_k)^{m-1}. \end{array} \right. \quad (7)$$

На основе (1), (7) определяем стационарное распределение ПМП:

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=0}^m \rho_k^i \cdot M_k^i = \sum_{i=0}^m [\rho_k^0 (1 - p)^{i-1}] \cdot M_k^i + \rho_k^0 \cdot M_k^0; \\ \pi_k^i &= \frac{\rho_k^i \cdot M_k^i}{M}. \end{aligned} \quad (8)$$

Задачу определения ФР времени обслуживания на ячейке с возвратом продукции на повторное обслуживание, как и ранее, будем решать, используя формулу полной вероятности.

Для этого примем следующие гипотезы:

H_1 – выполняется первое обслуживание;

$\vdots$

H_m – Выполняется m -ое обслуживание.

Вероятности этих гипотез с учетом (8) равны:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(H_1) = \pi_k^1 = \frac{\rho_k^1 \cdot M_k^1}{M}; \\ P(H_2) = \pi_k^2 = \frac{\rho_k^2 \cdot M_k^2}{M}; \\ \dots\dots\dots \\ P(H_g) = \pi_k^g = \frac{\rho_k^g \cdot M_k^g}{M}; \\ \dots\dots\dots \\ P(H_m) = \pi_k^m = \frac{\rho_k^m \cdot M_k^m}{M}. \end{array} \right. \quad (9)$$

Введем событие A , под которым будем понимать обслуживание продукции на ячейке. Условные вероятности события A при выполнении гипотез $H_1, \dots, H_n$ равны

$$\left\{ \begin{array}{l} P(A/H_1) = p\{t_1 < t\} = F_{k,1}(t); \\ P(A/H_2) = p\{t_1 + t_2 < t\} = F_{k,2}(t) = F_{k,1,2}^{(*)2}(t); \\ \dots\dots\dots \\ P(A/H_g) = p\left\{\sum_{i=1}^g t_i < t\right\} = F_{k,g}(t) = F_{k,1,\dots,g}^{(*)g}(t); \\ \dots\dots\dots \\ P(A/H_m) = p\left\{\sum_{i=1}^m t_i < t\right\} = F_{k,m}(t) = F_{k,1,\dots,m}^{(*)m}(t), \end{array} \right. \quad (10)$$

где $(*)^m$ – обозначение операции m кратной свертки; $t_i, (i = \overline{1, m})$ – случайные величины, являющиеся временами повторных обслуживаний.

ФР времени между заявками в прореженном потоке событий определяется по формуле полной вероятности с учетом (9), (10):

$$K_k(t) = P(A) = \sum_{g=1}^m P(H_g) P(A/H_g) = \sum_{g=1}^m \pi_k^g \cdot F_{k,1,\dots,g}^{(*)g}(t). \quad (11)$$

В модели нужно учесть, что какая-то доля продукции после m обслуживаний остается бракованной и покидает систему. Вероятность того, что продукция после m обслуживаний будет годная, определяется выражением:

$$p_k^{zod} = p \sum_{g=1}^m (1-p)^{g-1} = 1 - (1-p)^m. \quad (12)$$

Соответственно вероятность брака определяется из выражения:

$$p_k^{\delta p} = 1 - p_k^{zod} = (1-p)^m.$$

Далее необходимо осуществить разрежение потока продукции, выходящего с $ТЯ_k$, что позволит окончательно получить ФР $K_k^\Sigma(t)$ времени между событиями в потоке годной продукции, выходящей с k -ой ячейки, охваченной обратной связью. Для этого необходимо в формулу

$$G_2(t) = p\varphi(t) + p \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^n \varphi^{*(n)}(t), \quad (13)$$

полученную в [3] подставить $K_k(t)$ и p_k^{zod} из выражений (11), (12):

$$K_k^\Sigma(t) = p_k^{zod} K_k(t) + p_k^{zod} \sum_{i=1}^{\infty} (1 - p_k^{zod})^m K_k^{(*)i}(t) \quad (14)$$

где $\varphi(t)$ – функция распределения времени между событиями в непрореженном потоке; p – вероятность, с которой заявка остается в прореженном потоке событий; $^{*}(n)$ – обозначение операции свертки порядка n .

Выражение (14), позволяя ячейку, охваченную обратной связью заменять эквивалентной ячейкой, представляющей собой простейший элемент с двумя факторными состояниями: отказовое и рабочее.

В случае если изменяется вероятность выхода годной продукции при повторном обслуживании на $ТЯ_i$, то дискретной случайной величины принимает значения $\bar{t}_i, 2\bar{t}_i, 3\bar{t}_i, \dots, k \cdot \bar{t}_i, \dots, m \cdot \bar{t}_i$, которым соответствуют вероятности $p_1, p_2(1-p_1), p_3(1-p_1)(1-p_2), \dots, p_k \prod_{k=1}^m (1-p_{k-1})$. В данном выражении

$p_0 = 0$ то есть случай, когда обслуживание не производится здесь не рассматривается.

Граф состояний данной системы соответствует графу, представленному на рисунке 3. Система уравнений для определения $p_k^g, g = \overline{0, m}$ и условие нормировки аналогичны (3) и (4) соответственно.

Для данного случая вероятности переходов равны:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_k^{10} = p_1 \\ P_k^{20} = p_2 \\ P_k^{g0} = p_g \\ P_k^{m-1,0} = p_{m-1}; \\ P_k^{m0} = 1; \\ P_k^{01} = 1; \\ P_k^{12} = (1-p_1) \\ P_k^{23} = (1-p_2) \\ P_k^{g-1,g} = (1-p_{g-1}) \\ P_k^{m-1,m} = (1-p_{m-1}). \end{array} \right. \quad (15)$$

Подставляя выражения для вероятностей переходов из (15) в (3) и решая полученную систему, определяем стационарное распределение ВЦМ ρ_k^g , $g = (\overline{0, m})$. Ввиду громоздкости данные выражения не приводятся.

Далее, как и ранее, по формуле (1) определяем стационарное распределение ПМП.

Задачу определения ФР времени обслуживания на ячейке с возвратом продукции на повторное обслуживание, как и ранее, будем решать, используя формулу полной вероятности. Гипотезы такие же, как и в предыдущем случае, а их вероятности вычисляются по формуле (9). Условные события A под которым понимается обслуживание продукции на ячейке определяются из выражения (10).

ФР времени между заявками в прореженном потоке событий определяется по формуле полной вероятности (11) с учетом (9), (10).

Как и в предыдущем случае в модели нужно учесть, что какая-то доля продукции после m обслуживаний остается бракованной и покидает систему. Вероятность того, что продукция после m обслуживаний будет годная p_k^{zod} равна сумме первых m членов ряда $p_1, p_2(1-p_1), p_3(1-p_1)(1-p_2), \dots, p_k \prod_{k=1}^m (1-p_{k-1})$.

$$p_k^{zod} = \sum_{k=1}^m p_k \prod_{k=1}^m (1-p_{k-1}).$$

Далее как и в предыдущей модели необходимо осуществить с вероятностью p_k^{zod} разрежение потока продукции выходящего с $ТЯ_k$, и определить ФР $K_k^\Sigma(t)$ времени между событиями в потоке годной продукции, выходящей с k -ой ячейки, охваченной обратной связью используя выражение (13).

Подставляя полученные ФР в модель асинхронной автоматизированной линии приведенной в [4] получим производительность линии с возвратом продукции на повторное обслуживание.

При моделировании случайные величины $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, соответствующие временам обслуживания на $ТЯ_1, ТЯ_2, ТЯ_3$, считались распределенными по обобщенным законам Эрланга второго порядка с ФР $F_1(t), F_2(t), F_3(t)$ и математическими ожиданиями $m\alpha_1, m\alpha_2, m\alpha_3$ соответственно. Функции распределения времени наработки на отказ и времени восстановления считались распределенными по экспоненциальному закону с математическими ожиданиями равными соответственно $m\beta_k, m\gamma_k$.

Результаты моделирования ААЛ, содержащей три ТЯ представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты моделирования 3-х фазной асинхронной АЛ

p	$m\gamma_k$, ч	$m\beta_k$, ч	$m\alpha_1$, ч	$m\alpha_2$, ч	$m\alpha_3$, ч	m_k	K_z	$\Pi_{\text{лин}}$, дет/ч	L_2 , дет	L_3 , дет
0,9	0,25	5	0,0167	0,018	0,019	20	0,906	43,099	14,665	11,042
		4	0,0167	0,018	0,019	20	0,885	42,106	15,725	11,155
		3	0,0167	0,018	0,019	20	0,851	40,496	14,994	10,796
	0,5	5	0,0167	0,018	0,019	20	0,808	38,408	15,365	10,160
		4	0,0167	0,018	0,019	20	0,768	36,522	15,579	9,789
		3	0,0167	0,018	0,019	20	0,708	33,672	15,871	9,302
0,8	0,25	5	0,0167	0,018	0,019	20	0,907	37,093	14,646	11,397
		4	0,0167	0,018	0,019	20	0,886	36,232	15,691	10,877
		3	0,0167	0,018	0,019	20	0,853	34,876	14,956	10,817
	0,5	5	0,0167	0,018	0,019	20	0,813	33,216	15,311	10,270
		4	0,0167	0,018	0,019	20	0,774	31,628	15,518	9,849
		3	0,0167	0,018	0,019	20	0,715	29,212	15,789	9,244

При построении модели асинхронной автоматизированной линии с возвратом продукции на повторное обслуживание с их ограниченным числом, оперирующей с ФР экспоненциального вида предлагается найти математические ожидания времени затрачиваемого на m повторных обслуживаний, построив полумарковский процесс в дискретном фазовом пространстве. Для этого на основании стационарного распределения ПМП определяем вероятности соответствующих обслуживаний. Предполагается, что в общем случае математические ожидания каждого из повторных обслуживаний известны и отличаются друг от друга. Тогда математические ожидания времени затрачиваемого на m повторных обслуживаний определяются из выражения:

$$\bar{t}_{k\varnothing} = \sum_{i=1}^m \pi_k^i \cdot M_k^i,$$

где $\bar{t}_{k\varnothing}$ – математические ожидания времени затрачиваемого на m повторных обслуживаний k -ой ячейкой; π_k^i – вероятности определяемые на основании формулы (8); M_k^i – математическое ожидание i -го обслуживания.

Так как после m обслуживаний какая-то доля продукции остается бракованной и покидает систему, необходимо разрядить поток, выходящий с ТЯ. Вероятность того, что продукция после m обслуживаний будет годная, определяется формулой (12). Поэтому в модель ААЛ приведенную в [1] для использования ее при моделировании асинхронной автоматизированной линии с возвратом продукции на повторное обслуживание с их ограниченным числом необходимо внести следующие изменения: в качестве времени обслуживания на ТЯ использовать полученные математические ожидания времени затрачиваемого на m повторных обслуживаний; выражение для определения λ_k с учетом разряжения потока определяется выражением

$$\lambda_k = \frac{1}{t_{k-1\max}} \frac{\mu_{k-1,20}}{\mu_{k-1,20} + \lambda_{k-1,02}} \cdot (1 - (1-p)^m) \cdot \prod_{j=2}^{k-1} \bar{P}_j$$

В остальном модель остается без изменений.

В дальнейшем предполагается распространить данный подход на другие структуры автоматизированного производства с возвратом продукции на повторное обслуживание.

Бібліографічний список використаної літератури

1. Пашков Е.В. Транспортно-накопительные и загрузочные системы в сборочном производстве: учеб. пособ. / Е.В. Пашков, В.Я. Копп, А.Г. Карлов. — К.: Изд-во УМК ВО, 1992. — 536 с.
2. Королюк В.С. Стохастические модели систем / В.С. Королюк / Отв. ред. А.Ф. Турбин. — Киев: Наук. думка, 1989. — 208 с.
3. Балакин А.И. Построение полумарковской модели автоматизированного участка с возвратом продукции / А.И. Балакин, В.Я. Копп, О.В. Филипович, А.М. Кукушкин // Системні технології. — Дніпропетровськ: Изд-во Національної металургійної академії України, 2009. — Вип. 5 (64). — С. 101–111.
4. Копп В.Я. Моделирование автоматизированных линий: монография. / В.Я. Копп, Ю.Е. Обжерин, А.И. Песчанский. — Севастополь: СевНТУ, 2006. — 240 с.

Поступила в редакцию 01.04.2012 г.

Балакін А.І., Копп В.Я., Чуб О.П. Модель асинхронної автоматизованої лінії з поверненням продукції на повторне обслуговування

Розглядається побудова математичної моделі асинхронної автоматизованої лінії з поверненням продукції на повторне обслуговування, з необмеженою і обмеженою кількістю повторних обслуговувань. Розглянуто моделі асинхронної лінії з поверненням продукції за однакової та змінній ймовірності виходу придатних виробів на виході технологічної комірки під час повторних циклах обслуговування.

Ключові слова: асинхронна автоматизована лінія, еквівалентна заміна, полумарківський процес, повернення продукції на повторне обслуговування.

Balakin A.I., Kopp V.Ya., Chub O.P. Model of the asynchronous automated line with the return of products for re-servicing

The construction of the mathematical model of asynchronous automated line with the return of products for re-servicing with unlimited and limited number of repeated services is considered. Can be used the constant probability of product output and changing probability of product output of the technological cells with repeated services in such mathematical model.

Keywords: asynchronous automated line, the equivalent replacement, semi-marcovian random process, return of products for re-servicing.