

УДК 681.5

Д.А. Токарев, ассистент*Севастопольский национальный технический университет,**ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: Tdanis@yandex.ru***ПРИМЕНЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ ВЕРСИИ ЛИНЕАРИЗАЦИОННОГО МЕТОДА
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СТАБИЛИЗАЦИИ
НЕПРЕРЫВНЫМИ ВО ВРЕМЕНИ СИСТЕМАМИ**

Исследована возможность применения линеаризационного метода при решении задачи управления непрерывного во времени объекта с использованием дискретной математической модели.

Ключевые слова: дискретная версия, линеаризационный метод, шаг интегрирования, управление.

В современных системах автоматического управления для решения задачи стабилизации используют цифровые элементы. Если поиск решения не требует значительных вычислительных ресурсов, то в качестве элементной базы для реализации регулятора могут выступать микроконтроллеры. Решение сложных задач с расчетом поведения системы на несколько шагов вперед или определения численных значений частных производных многомерной системы, требует значительных затрат вычислительных ресурсов. Для поиска решения используют численные методы и получают приближенное к точному решение дифференциальных уравнений с некоторым шагом дискретизации.

Если предположить, что синтезируется управление для некоторого реального физического объекта, то его математическая модель будет представлять собой систему дифференциальных уравнений с непрерывным вектором времени. Синтез управления выполняется с применением методов решения дифференциальных уравнений. Назовем полученное таким способ управление непрерывным во времени. Предполагается, что можно определить значение управляющей величины в каждый момент времени (если не возникает неопределенности при решении дифференциальных уравнений и в модели нет разрывов). Далее используем цифровую машину для реализации данного управления, которая сводит непрерывную системы к дискретной. Все измерения в ЭВМ поступают с некоторым интервалом времени, все команды от ЭВМ к объекту управления поступают также с квантованием по времени. Назовем данный вид дискретизации вынужденным.

В современной теории автоматического управления вынужденная дискретизация не учитывается в явном виде. Погрешность, возникающая при переходе в дискретную область описания, также не учитывается при синтезе управления и решении различных задач автоматического управления. Таким образом, можно поставить задачу применения дискретных методов для синтеза управления в непрерывных системах без доработки исходных математических моделей.

Данный подход имеет ряд особенностей. Вынужденная дискретизация не равносильна замене непрерывной модели дискретным аналогом. В дискретной системе имеется запаздывание во времени при передаче воздействия от входа системы к выходу. В непрерывных во времени объектах данного свойства не наблюдается. При вынужденной дискретизации стремимся к тому, чтобы в эквивалентной модели задержка во времени реакции вход–выход системы укладывалась в шаг дискретизации цифрового регулятора. Если при поиске решения необходимо спрогнозировать поведение системы, решив некоторую систему дифференциальных уравнений, то следует обеспечить расчет прогноза за время, не превышающее времени реакции вход–выход эквивалентной системы. Таким образом, применение дискретных методов при решении такого рода задач требует учитывать вышеописанные особенности.

Используем нелинейную математическую модель двигателя постоянного тока (ДПТ) для наглядной демонстрации вышеизложенной теории:

$$0 \frac{d\omega}{dt} = -\frac{k_M}{J_M} \omega + \frac{k_2}{J_M} i_A^2, \quad (1)$$

$$\frac{di_A}{dt} = -\frac{r_A}{L_A} i_A + \frac{k_1}{L_A} i_A \omega + \frac{1}{L_A} u, \quad (2)$$

$$t \in [0, t_f], \quad i_A(0) = 0, \quad \omega(0) = 0, \quad (3)$$

здесь i_A – ток якоря; ω – угловая скорость ротора двигателя; r_A, L_A – сопротивление и индуктивность якорной обмотки; J_M – приведенный к валу двигателя момент инерции; k_1, k_2 – конструктивные

параметры; k_M – коэффициент пропорциональности между угловой скоростью и значением момента нагрузки.

Данная математическая модель достаточно проста, наглядна и в то же время описывает динамику нелинейного объекта. Выходом системы является угловая скорость ротора двигателя ω , а входом системы является напряжение u .

Регулятором в данной системе является некоторая цифровая вычислительная машина с шагом дискретизации h . Данной величиной обозначим время, необходимое регулятору для расчета управления в текущий момент времени. При этом замена непрерывного во времени объекта на дискретный с задержкой реакции выхода на изменение входа не превышающей шага дискретизации h не потребует внесения изменений в программу управления и будет восприниматься регулятором как работа с непрерывным во времени объектом.

Использование прогнозирующих методов управления требует наличия математической модели. В большинстве случаев модель представляет собой систему дифференциальных уравнений. Современные системы управления с цифровыми элементами переводят любую математическую модель к дискретной во времени независимо от желания исследователя. Поэтому мы полагаем, что использование дискретных или гибридных (учитывающих как дискретную, так и непрерывную составляющую математической модели объекта) методов управления возможно с любыми объектами управления, если учесть вынужденную дискретизацию.

Данный подход расширяет область применения современных дискретных методов управления линейными и нелинейными системами.

Приведем пример решения задачи стабилизации частоты вращения ДПТ с применением гибридного варианта линеаризационного метода (ЛМ) [1]. Данный метод является расширенной версией дискретного варианта линеаризационного метода А. Исидори [2, 3] (linearization input/output method A. Isidori). Описание оригинальной методики достаточно подробно изложено в [4].

Постановка задачи имеет вид критерия стабилизации

$$J = J(t) \rightarrow J^* \quad (4)$$

с ограничениями в виде дифференциальных уравнений (1–3). Решение данной задачи приводится в [2] в качестве примера применения ЛМ метода. Для нашего случая необходимо выполнить преобразования и изменить данную постановку задачи на эквивалентную с вынужденной дискретизацией. Расчет управления выполняется на ЭВМ со временем опроса датчиков и генерацией управления h . Данное время опроса необходимо отличать от шага интегрирования при решении дифференциального уравнения (в задаче прогнозирования поведения объекта управления) h_d . Запишем эквивалентную (4) постановку задачи

$$J = J(x_k) \rightarrow J^* \quad (5)$$

с ограничениями вида:

$$i_{Ak} = i_{Ak-1} + h_d \cdot \left(-\frac{r_A}{L_A} i_{Ak-1} - \frac{k_1}{L_A} i_{Ak-1} \omega_{k-1} \right) + \frac{1}{L_A} u_k, \quad (6)$$

$$\omega_k = \omega_{k-1} + h_d \cdot \left(-\frac{k_M}{J_M} \omega_{k-1} + \frac{k_2}{J_M} i_{Ak-1}^2 \right), \quad (7)$$

$$i_{A0} = 0, \quad \omega_0 = 0.$$

Предположим, что произошло изменение входа системы u_k в момент времени k . Это приведет к изменению тока якоря i_{k+1} через время h_d . Изменение тока якоря i_{k+1} через время h_d повлияет на величину угловой скорости ротора двигателя ω_{k+2} . Таким образом, реакция выхода системы на изменение входа происходит за два шага интегрирования h_d и справедлива запись

$$h = m \cdot h_d, \quad (8)$$

где m – порядок системы. В нашем случае $m = 2$.

Соблюдение условия (8) является обязательным при замене непрерывной системы (1)–(3) эквивалентной дискретной (6), (7).

Подобное запаздывание наблюдается в требованиях метода к форме математической модели и постановке задачи стабилизации гибридными системами [1, 3]. В методе используется эталонная математическая модель. Запишем (5) с учетом эталонной модели

$$J(x_k) = J_k^3 = A^3 J_{(k-1)}^3 + B^3 u^3, \quad (9)$$

где A^3 – диагональная матрица размерности $(n \times n)$, на главной диагонали которой расположены элементы $1 - E_i$; B^3 – вектор-столбец размерности $(1 \times n)$, состоящий из элементов E_i ; u – вектор строка значений к которым стремятся выходы эталонной системы.

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1-E_1 & 0 \\ 0 & 1-E_2 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}, \quad E_i = \frac{h_d}{T_i},$$

где n – порядок системы, i – порядковый номер уравнения в системе, T_i – параметр, отвечающий за скорость переходного процесса i -го выхода эталонной системы, h_d – текущий шаг дискретизации эталонной системы.

Подставим (6), (7) в (9) и получим выражение для расчета управления:

$$\begin{aligned} J_k &= \begin{pmatrix} 1-E_1 & 0 \\ 0 & 1-E_2 \end{pmatrix} J_{(k-1)} + \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^3 & u_2^3 \end{pmatrix}, \\ J_k &= \begin{pmatrix} 1-E_1 & 0 \\ 0 & 1-E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{Ak-1} \\ \omega_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^3 & u_2^3 \end{pmatrix}; \\ &\begin{pmatrix} i_{Ak-1} + h_d \cdot \left(-\frac{r_A}{L_A} i_{Ak-1} - \frac{k_1}{L_A} i_{Ak-1} \omega_{k-1} \right) + \frac{1}{L_A} u_k \\ \omega_{k-1} + h_d \cdot \left(-\frac{k_M}{J_M} \omega_{k-1} + \frac{k_2}{J_M} i_{Ak-1}^2 \right) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1-E_1 & 0 \\ 0 & 1-E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{Ak-1} \\ \omega_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^3 & u_2^3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Подставим в полученное уравнение известные коэффициенты и запишем только второе уравнение системы:

$$\omega_{k-1} + h_d \cdot \left(-\frac{k_M}{J_M} \omega_{k-1} + \frac{k_2}{J_M} i_{Ak-1}^2 \right) = (1-E_2) \cdot \omega_{k-1} + E_2 \cdot u_2^3.$$

Полученное уравнение вырождено по управлению u_k . В оригинальной методике вырожденность проявлялась несколько в иной форме [4], но имеет аналогичную природу возникновения. Для разрешения данного затруднения предлагается подставить значение i_{Ak-1} из (6). Тогда получаем:

$$\begin{cases} \omega_{k-1} + h_d \cdot \left(-\frac{k_M}{J_M} \omega_{k-1} + \frac{k_2}{J_M} i_{Ak-1}^2 \right) = (1-E_2) \cdot \omega_{k-1} + E_2 \cdot u_2^3, \\ i_{Ak-1} = i_{Ak-2} + h_d \cdot \left(-\frac{r_A}{L_A} i_{Ak-2} - \frac{k_1}{L_A} i_{Ak-2} \omega_{k-2} \right) + \frac{1}{L_A} u_{k-1}. \end{cases} \quad (10)$$

Получена система уравнений (10), решением которой является искомое управление u_k , переводящее выход системы из состояния ω_k в ω_{k+2} . Данный переход осуществлен за два шага h_d или согласно (8) за один шаг h .

Для поиска управления из системы (10) целесообразным представляется использовать функцию `lsqNonlin` пакета `Matlab`. Выбор обусловлен высокой надежностью данного программного продукта, а также удобством проведения различных экспериментов и исследований. Ниже приведены результаты моделирования при различных значениях $u_2^{[2]}$. На рисунках 1–3 изображено изменение частоты вращения во времени и управление, рассчитанное путем решения системы (10). Шаг дискретизации $h = 0,01$.

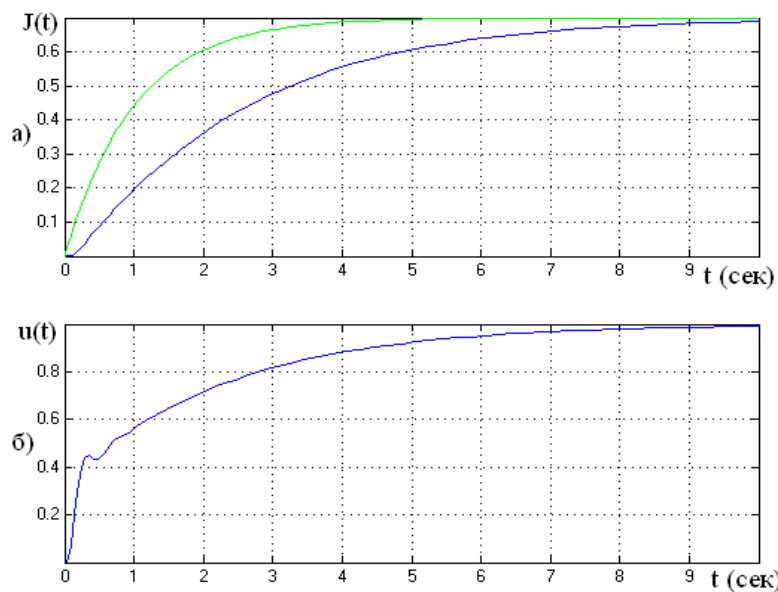


Рисунок 1 – Поведение системы во времени при $u_g = 0,7$: а – частота вращения; б – управление

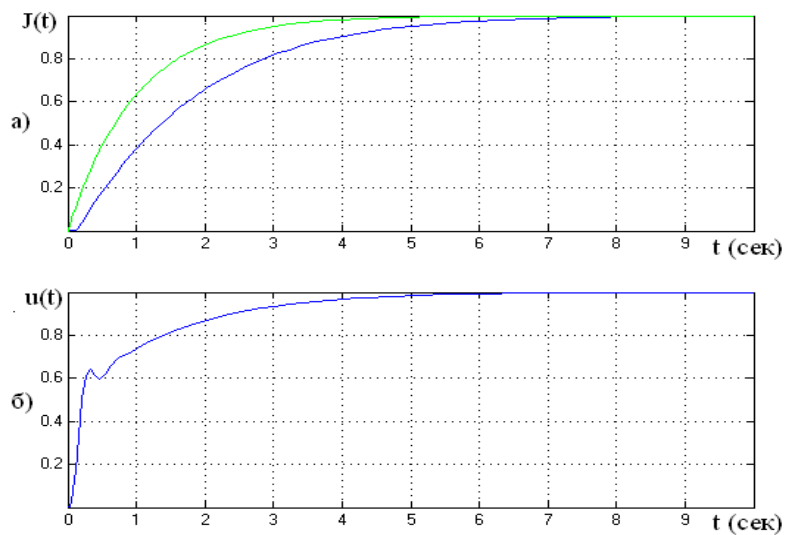


Рисунок 2 – Поведение системы во времени при $u_g = 1$: а – частота вращения; б – управление

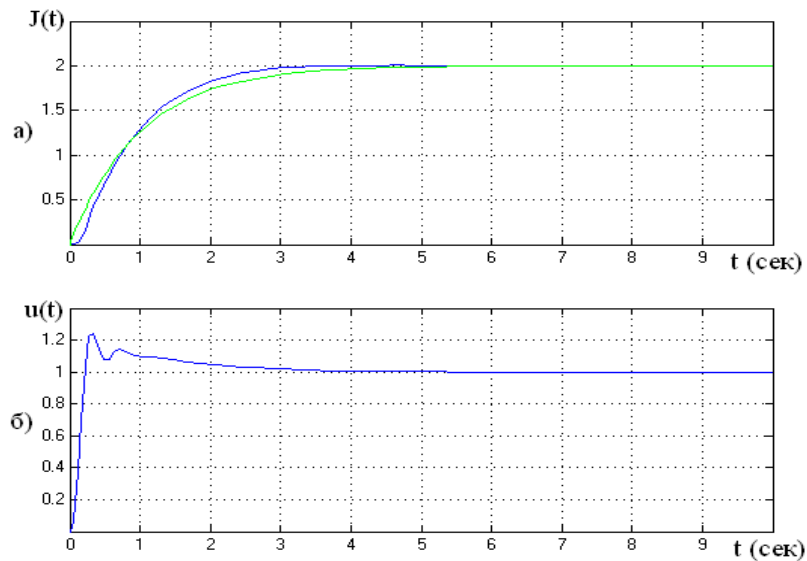


Рисунок 3 – Поведение системы во времени при $u_g = 2$: а – частота вращения; б – управление

Полученные результаты позволяют сделать вывод о работоспособности метода и возможности решать задачу управления нелинейной непрерывной во времени системой с использованием дискретной математической модели этой системы.

Перспективой дальнейших исследований в данном направлении можно считать переход к более сложным объектам и соответственно более сложным математическим моделям. Необходимо исследовать возможности метода при сигнальной самонастройке с использованием данного подхода к синтезу управления.

Библиографический список использованной литературы

1. Токарев Д.А. Обобщение линеаризационного метода на гибридные системы / Д.А. Токарев // Автоматика, управление и информационные технологии: сб. науч. тр. — Варна, 2010. — Вып. 10. — С. 107–112.
2. Шушляпин Е.А. Управление нелинейными дискретными системами линеаризационным по входу–выходу методом / Е.А. Шушляпин, Д.А. Токарев // SICPRO 09: сб. науч. тр. — М., 2009. — Вып. 9. — С. 216–222.
3. Шушляпин Е.А. Управляемый разгон двигателя постоянного тока дискретным линеаризационным методом / Е.А. Шушляпин, Д.А. Токарев // Автоматика-2008: сб. докл. XV междунар. конф. по автоматическому управлению, Одесса, 23 – 26 сентября 2008 г. — Одесса, 2008. — С. 671–674.
4. Шушляпин Е.А. Сравнительная характеристика двух методов управления нелинейными системами / Е.А. Шушляпин // Вестник СевГТУ. Сер. Автоматизация процессов и управление: сб. науч. тр. — Севастополь, 2007. — Вып. 83. — С. 27–33.

Поступила в редакцию 18.07.2011 г.

Токарев Д.О. Застосування дискретних версій лінеаризаційного методу для розв'язання задачі стабілізації неперервними у часі системами

Досліджено можливість застосування лінеаризаційного методу під час розв'язання задачі управління безперервного у часі об'єкта з використанням дискретної математичної моделі об'єкта.

Ключові слова: дискретна версія, лінеаризаційний метод, крок інтегрування, управління

Tokarev D.A. Application of the discrete version linearization methods for solving time-continuous stabilization systems

The possibility of using linearization method for solving the control problem of continuous time object using discrete mathematical model of the object is researched.

Keywords: discrete version, linearization method, the integration step, control.