

УДК 681.5

**Е.А. Байздренко, аспирант,****Е.А. Шушляпин, профессор, д-р техн. наук***Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: tk@sevgtu.sebastopol.ua***ПОСТРОЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ РЕЛЕЙНЫХ УПРАВЛЕНИЙ  
МНОГОМЕРНЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ СИСТЕМАМИ**

*Рассматривается задача получения релейных управлений многомерными линейными нестационарными системами, эквивалентных по достижимым конечным состояниям произвольным ограниченными управлениями.*

**Ключевые слова:** релейное управление, многомерная система, линейная система, нестационарная система, эквивалентное управление.

Существует множество технических объектов, математические модели которых представляют собой системы дифференциальных уравнений высокого порядка. Наиболее широко используемые методы расчета управляющих воздействий имеют непрерывный или смешанный вид, в то время как в ряде приложений, как, например, в задаче управления космическим летательным аппаратом (КЛА) с двигателем постоянной тяги, управляющий сигнал должен быть задан релейным. Итак, можно говорить об актуальности задачи преобразования непрерывного управляющего сигнала в релейный, оказывающий по своему воздействию эквивалентное влияние на конечный результат управления. Впервые подобная задача для линейных стационарных систем была решена А.А. Фельдбаумом [1], результат решения применительно к задаче быстрогодействия известен как «теорема об  $n$  интервалах». В [2] задача построения эквивалентных терминальных релейных управлений решена для линейных нестационарных систем с двумя управляемыми координатами и векторным управлением.

Цель статьи: рассмотрение задачи получения эквивалентных по конечному состоянию управлений многомерными линейными нестационарными системами вида (1), (2) с числом управляемых координат, большим двух.

В [2] доказана следующая теорема:

**Теорема.** Для системы вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = \Phi(t, x(t)) + B(t) \cdot u(t), \quad (1)$$

$$t \in [t_0, t_f], \quad x(t_0) = x^0.$$

$$\Phi(t, x) \equiv A(t) \cdot x + C(t) \cdot f(t) \quad (2)$$

на каждом из интервалов разбиения  $t \in [t_{j-1}, t_j]$ ,  $j = 1, \dots, n$ , где предполагающиеся непрерывными и определяемые

$$x_{ik}(t_f, t_0) = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n W_{ij}(t_f, t) B_{jk}(t) u_k(t) dt \equiv \int_{t_0}^{t_f} h_i(t) \xi(t) dt, \quad (3)$$

$$h_i(t) \equiv \sum_{j=1}^n W_{ij}(t_f, t) B_{jk}(t), \quad \xi(t) \equiv u_k(t)$$

функции  $h_i(t)$ ,  $i = i1, i2$  знакопостоянны, а определяемые

$$\bar{h}_{is}(\theta) = \frac{\bar{h}_i(\theta)}{\bar{h}_s(\theta)}, \quad \bar{h}_s = \bar{h}_{i1} + \bar{h}_{i2} \quad (4)$$

функции  $h_{is}(t)$ ,  $i = i1, i2$  монотонны, любое, ограниченное нулем и единицей, управление может быть заменено эквивалентным релейным управлением с двумя переключениями вида

$$v(t) = \begin{cases} 1, & t \in [\vartheta_1, \vartheta_2], \\ 0, & t \notin [\vartheta_1, \vartheta_2]. \end{cases}$$

Как видно из приведенного определения, эквивалентность по конечному состоянию здесь понимается в смысле достижения любыми двумя координатами с номерами  $i = i_1, i_2$  таких же значений, которые могут быть получены при произвольном, но ограниченном нулем и единицей, управлении (нормированные ограничения на управления в данном случае непринципиальны, поскольку любую задачу с произвольными ограничениями легко свести к задаче с нормированными ограничениями). Как видно из приведенной формулировки, при этом важную роль играют свойства знакопостоянства функций  $h_i$  и монотонности  $\bar{h}_{is}$ , определяемых (3), (4). Выражение (3) представляет собой зависящую от  $k$ -го компонента вектора управления  $i$ -ю составляющую вектора конечного состояния  $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{W}(t_f, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{W}(t_f, t)\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) dt$ .

Существование решения с двумя моментами переключений в задаче с двумя управляемыми координатами неудивительно, поскольку это следует из теоремы Л.В. Канторовича [3] о существовании корней систем нелинейных уравнений в методе Ньютона.

Применительно к задаче построения эквивалентного по конечному состоянию нормированного релейного управления можно записать следующую систему нелинейных уравнений относительно моментов переключений  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_m$

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} h_i(t) dt + \int_{\vartheta_3}^{\vartheta_4} h_i(t) dt + \dots + \int_{\vartheta_{m-1}}^{\vartheta_m} h_i(t) dt = \int_{t_0}^{t_f} h_i(t) \xi(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Здесь правые части отображают реакцию конечного состояния на произвольный, но ограниченный нулем и единицей,  $k$ -й компонент вектора управления, что видно из (3).

С помощью компьютерных экспериментов проверялись несколько гипотез, связанных с возможными обобщениями подхода, положенного в основу доказательства теоремы, на случай многих (больше двух) управляемых координат. В частности, для случая  $n = 3$  строились множества (отрезки), которым принадлежат моменты переключений при управлении первой и второй, второй и третьей, первой и третьей координатами при двух моментах переключений. Если бы оказалось, что каждая из троек множеств для первого и второго моментов переключений имела непустое пересечение, подтверждалась бы гипотеза о возможности с помощью двух переключений управлять тремя и более координатами с помощью пары переключений на каждом из участков, где выполняются условия теоремы.

Однако анализ полученных результатов выявил, что указанные непустые пересечения и разрешимость системы вида (5) имеют место на достаточно малых интервалах одновременных знакопостоянства  $h_i$  и монотонности  $\bar{h}_{is}$ , причем величина указанных интервалов зависит от задаваемой точности решения уравнений.

Это позволило выдвинуть гипотезу о том, что в случае строго линейных  $h_i$  возможна эквивалентная по конечному состоянию замена произвольного нормировано-ограниченного управления нормированным релейным управлением с двумя переключениями для случая сколь угодно большого  $n$ , т.е. числа управляемых координат.

Покажем, что для случая строго линейных функций  $h_i$  вида

$$h_i(t) = a_{i0} + a_{i1}t \quad (6)$$

можно найти такие моменты переключений  $\vartheta_1, \vartheta_2$ , что все  $n$  координат вектора конечного состояния

$$\mathbf{x}(t_f) \text{ приобретут значения } \mathbf{x}^* = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{h}(t) \xi(t) dt, \quad \mathbf{x}^* = \{\mathbf{x}_i^*\}, \quad \mathbf{h}(t) = \{h_i(t)\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Согласно (5) и (6), система уравнений при этом приобретет вид:

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} (a_{i0} + a_{i1}t) dt = \mathbf{x}_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Вычислив определенный интеграл, получим систему уравнений относительно  $\vartheta_1, \vartheta_2$ :

$$2a_{i0}(\vartheta_2 - \vartheta_1) + a_{i1}(\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2) = 2\mathbf{x}_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Покажем, что система (7) для всех  $n > 2$  линейно зависима. Обозначив  $i$ -е уравнение (7)  $f_i$ , запишем условие линейной независимости:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0, \quad \lambda_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

После приведения подобных в (7) из (8) получаем:

$$2 \left( \sum_{i=1}^n a_{i0} \lambda_i \right) (\vartheta_2 - \vartheta_1) + \left( \sum_{i=1}^n a_{i1} \lambda_i \right) (\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2) - 2 \left( \sum_{i=1}^n x_i^* \lambda_i \right) = 0. \quad (9)$$

Поскольку в общем случае моменты переключения не совпадают, условие (9) превращается в совокупность условий в виде системы уравнений:

$$\left( \sum_{i=1}^n a_{i0} \lambda_i \right) = 0, \quad \left( \sum_{i=1}^n a_{i1} \lambda_i \right) = 0, \quad \left( \sum_{i=1}^n x_i^* \lambda_i \right) = 0. \quad (10)$$

С учетом соотношений  $x_i^* = a_{i0}k_1 + a_{i1}k_2$ ,  $k_1 = \int_{t_0}^{t_f} \xi(t) dt$ ,  $k_2 = \int_{t_0}^{t_f} t \xi(t) dt$ , следующих из приведенного выше определения  $x_i^*$ , получаем следующую матрицу линейной системы (10):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{10} & a_{20} & \cdots & a_{n0} \\ a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{10}k_1 + a_{11}k_2 & a_{20}k_1 + a_{21}k_2 & \cdots & a_{n0}k_1 + a_{n1}k_2 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Из (11) видно, что  $A_3 = k_1 A_1 + k_2 A_2$ , где  $A_i$  обозначена  $i$ -я строка матрицы  $\mathbf{A}$ , т.е. третья строка является линейной комбинацией первых двух строк. Это означает, что ранг матрицы  $\mathbf{A}$  не больше двух. Таким образом, вместо прямоугольной системы с линейно зависимыми строками (11) имеем матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{10} & a_{20} & \cdots & a_{n0} \\ a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \end{pmatrix},$$

относительно которой можно сказать, что чаще всего эта матрица имеет ранг 2 (основной случай). При некоторых сочетаниях параметров может оказаться, что  $\text{rank } \mathbf{A} = 1$  (особый случай).

В основном случае при  $n > 2$  имеем прямоугольную систему  $\mathbf{A}\lambda = 0$  с бесчисленным множеством решений. При этом  $n-2$  компонентам назначаются произвольные значения, в том числе ненулевые, а оставшиеся два компонента, соответствующие выбранному базису, определяются из квадратной системы. Таким образом, вектор  $\lambda$  в данном случае может быть ненулевым, т.е. условие линейной независимости (8) не выполняется, что и требовалось доказать.

В случае же  $n = 2$  имеем квадратную систему с неособенной (в основном случае) матрицей и нулевой правой частью, решением которой является  $\lambda = 0$ . В этом случае нелинейная система (7) линейно независима и ее разрешимость уже зависит от совместности уравнений и существования решений в допустимой области  $\vartheta_1 \geq t_0$ ,  $\vartheta_2 > \vartheta_1$ ,  $\vartheta_2 \leq t_f$ .

Повторяя приведенные рассуждения для нелинейного случая, можно показать, что для нелинейных  $h_i(t)$  система вида (10) будет несовместной, что означает невозможность построения эквивалентного управления с двумя переключениями. Так, для случая  $n = 3$  и  $h_i(t) = a_{i0} + a_{i1}t + a_{i2}t^2$  система вида (11) приобретет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{10} & a_{20} & a_{30} \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{10}k_1 + a_{11}k_2 + a_{12}k_3 & a_{20}k_1 + a_{21}k_2 + a_{22}k_3 & a_{30}k_1 + a_{31}k_2 + a_{32}k_3 \end{pmatrix},$$

где  $k_1, k_2$  определены выше, а  $k_3 = \int_{t_0}^{t_f} t^2 \xi(t) dt$ .

При этом  $A_4 = k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3$  и после исключения последней строки получим квадратную систему  $A\lambda = 0$  с неособенной матрицей, имеющей нулевое решение. А это означает, что система уравнений (7) с двумя неизвестными имеет три линейно независимых уравнения, т.е. переопределенную систему, решение которой не существует. Данные рассуждения имеют место в основном случае. В особых случаях, когда сочетание коэффициентов  $a_{ij}, i=1,2,3, j=0,1,2$  порождает линейно зависимые уравнения для  $\lambda$ , будем иметь случай линейно зависимых уравнений (7). Тогда останется система двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными, решение которой в принципе возможно.

С учетом сказанного, для решения уравнений (7) нужно выбрать любые два из них. Выберем для определенности систему из первых двух уравнений и найдем ее решение:

$$\begin{aligned} 2a_{10}(\vartheta_2 - \vartheta_1) + a_{11}(\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2) &= 2(a_{10}k_1 + a_{11}k_2), \\ 2a_{20}(\vartheta_2 - \vartheta_1) + a_{21}(\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2) &= 2(a_{20}k_1 + a_{21}k_2). \end{aligned} \quad (12)$$

Введем в (12) переменные

$$y_1 = \vartheta_2 - \vartheta_1, \quad y_2 = \vartheta_2^2 - \vartheta_1^2 \quad (13)$$

и найдем решение линейной системы

$$2a_{10}y_1 + a_{11}y_2 = 2(a_{10}k_1 + a_{11}k_2), \quad 2a_{20}y_1 + a_{21}y_2 = 2(a_{20}k_1 + a_{21}k_2).$$

Указанное решение имеет вид:

$$y_1 = k_1, \quad y_2 = 2k_2. \quad (14)$$

Из (13), (14) следует:

$$\vartheta_1 = \frac{k_2}{k_1} - \frac{k_1}{2}, \quad \vartheta_2 = \frac{k_2}{k_1} + \frac{k_1}{2}. \quad (15)$$

Решение (15) обладает крайне важным свойством – независимостью от параметров  $a_{ij}$ . Другими словами, значения моментов переключений эквивалентного релейного управления зависят только от вида «эталонного» управления  $\xi(t)$  и не зависят от параметров управляемой системы. При этом предполагается линейность переходных функций  $h_i(t)$ , которые на самом деле близки к линейным лишь на достаточно малых временных отрезках.

Рассмотрим общий случай полиномиальной аппроксимации функций  $h_i(t)$ . Для этого определим

$$h_i(t) = \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} t^j$$

и запишем аналогичную (7) систему уравнений с количеством моментов переключений, равным  $m$ . При этом, если количество переключений определено чётным числом  $m$ , то получим:

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} t^j dt + \int_{\vartheta_3}^{\vartheta_4} \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} t^j dt + \dots + \int_{\vartheta_{m-1}}^{\vartheta_m} \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} t^j dt = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} t^j \cdot \xi(t) dt.$$

После интегрирования получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} \frac{\vartheta_2^{j+1} - \vartheta_1^{j+1}}{j+1} + \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} \frac{\vartheta_4^{j+1} - \vartheta_3^{j+1}}{j+1} + \dots + \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} \frac{\vartheta_m^{j+1} - \vartheta_{m-1}^{j+1}}{j+1} &= \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} k_{j+1}, \\ k_{j+1} &= \int_{t_0}^{t_f} t^j \xi(t) dt, \quad j = 0, 1, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (16)$$

Приводя подобные, получаем вначале уравнения

$$a_{i0}(\vartheta_2 - \vartheta_1 + \vartheta_4 - \vartheta_3 + \dots + \vartheta_m - \vartheta_{m-1}) + a_{i1} \frac{(\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2 + \vartheta_4^2 - \vartheta_3^2 + \dots + \vartheta_m^2 - \vartheta_{m-1}^2)}{2} + \dots \\ \dots + a_{i(m-1)} \frac{(\vartheta_2^m - \vartheta_1^m + \vartheta_4^m - \vartheta_3^m + \dots + \vartheta_m^m - \vartheta_{m-1}^m)}{m} = a_{i0}k_1 + a_{i1}k_2 + \dots + a_{i(m-1)}k_m, i = 1, 2, \dots, n,$$

а затем, приравнявая коэффициенты при одинаковых  $a_{ij}$  в левой и правой частях  $i$ -го уравнения, получаем:

$$\begin{cases} \vartheta_2 - \vartheta_1 + \vartheta_4 - \vartheta_3 + \dots + \vartheta_m - \vartheta_{m-1} = k_1, \\ \vartheta_2^2 - \vartheta_1^2 + \vartheta_4^2 - \vartheta_3^2 + \dots + \vartheta_m^2 - \vartheta_{m-1}^2 = 2 \cdot k_2, \\ \dots \\ \vartheta_2^m - \vartheta_1^m + \vartheta_4^m - \vartheta_3^m + \dots + \vartheta_m^m - \vartheta_{m-1}^m = m \cdot k_m. \end{cases} \quad (17)$$

Система (17) должна быть дополнена неравенствами:

$$t_0 \leq \vartheta_1 \leq \vartheta_2 \leq \dots \leq \vartheta_m \leq t_f. \quad (18)$$

Если же количество переключений определено нечётным числом  $m$ , то получим:

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} t^j dt + \int_{\vartheta_3}^{\vartheta_4} \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} t^j dt + \dots + \int_{\vartheta_m}^{t_f} \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} t^j dt = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} t^j \cdot \xi(t) dt.$$

После интегрирования получаем:

$$\sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} \frac{\vartheta_2^{j+1} - \vartheta_1^{j+1}}{j+1} + \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} \frac{\vartheta_4^{j+1} - \vartheta_3^{j+1}}{j+1} + \dots + \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} \frac{t_f^{j+1} - \vartheta_m^{j+1}}{j+1} = \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} k_{j+1},$$

где  $k_{j+1}$  определено в (16).

Приводя подобные, получаем вначале уравнения

$$a_{i0}(\vartheta_2 - \vartheta_1 + \vartheta_4 - \vartheta_3 + \dots + t_f - \vartheta_m) + a_{i1} \frac{(\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2 + \vartheta_4^2 - \vartheta_3^2 + \dots + t_f^2 - \vartheta_m^2)}{2} + \dots \\ \dots + a_{i(m-1)} \frac{(\vartheta_2^m - \vartheta_1^m + \vartheta_4^m - \vartheta_3^m + \dots + t_f^m - \vartheta_m^m)}{m} = a_{i0}k_1 + a_{i1}k_2 + \dots + a_{i(m-1)}k_m, i = 1, 2, \dots, n,$$

а затем, приравнявая коэффициенты при одинаковых  $a_{ij}$  в левой и правой частях  $i$ -го уравнения, получаем:

$$\begin{cases} \vartheta_2 - \vartheta_1 + \vartheta_4 - \vartheta_3 + \dots + t_f - \vartheta_m = k_1, \\ \vartheta_2^2 - \vartheta_1^2 + \vartheta_4^2 - \vartheta_3^2 + \dots + t_f^2 - \vartheta_m^2 = 2 \cdot k_2, \\ \dots \\ \vartheta_2^m - \vartheta_1^m + \vartheta_4^m - \vartheta_3^m + \dots + t_f^m - \vartheta_m^m = m \cdot k_m. \end{cases} \quad (19)$$

Система (19) также должна быть дополнена неравенствами (18).

В отличие от случая линейной аппроксимации  $h_i(t)$ , для которого получено простое аналитическое решение (15) системы (17)–(18) или (18)–(19) такого простого решения не имеют.

Полученные результаты для случая линейной аппроксимации  $h_i(t)$  могут быть использованы практически путем разбиения исходного интервала  $[t_0, t_f]$  на участки  $[t_{j-1}, t_j]$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ ,  $t_N \equiv t_f$ , где  $h_i(t)$  близки к линейным. Если таких участков  $N$ , то общее количество моментов переключений при этом равно  $2N$ . В случае же разбиения  $h_i(t)$  на нелинейные участки могут быть получены управления с более чем двумя переключениями на каждом из участков, количество которых определяется порядком принятого полинома для  $h_i(t)$ .

Полученные результаты имеют широкие перспективы для задач управления техническими объектами, так как управления, заданные в релейной форме, не требуют дорогостоящих средств реализации управляющих воздействий, что может составить предмет дальнейших исследований.

**Библиографический список использованной литературы**

1. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы: учеб. пособие / Д.П. Ким. — М.: Физматлит, 2004. — 464 с.
2. Шушляпин Е.А. Модели конечного состояния и их применение в задачах анализа и синтеза систем управления: дис... д-ра техн. наук: 05.13.03: защищ. 03.10.02: утв. 09.04.03 / Шушляпин Евгений Андреевич. — Севастополь, 2003. — 323 с. — Инв. номер 0408U002219.
3. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. — М.: Наука, 1966. — 664 с.

*Поступила в редакцию 04.03.2011 г.*

**Байздренко К.О., Шушляпин Е.А. Побудова еквівалентних релейних управлінь багатовимірними лінійними нестационарними системами**

Розглядається завдання одержання релейних управлінь багатовимірними лінійними нестационарними системами, еквівалентних досяжним кінцевим станам довільним обмеженням управлінням.

**Ключові слова:** релейне управління, багатовимірна система, лінійна система, нестационарна система, еквівалентне управління.

**Baizdrenko K.A., Shushlyapin E.A. Construction of the equivalent relay control to multidimensional linear non-stationary systems**

The problem of formulation of relay control of multidimensional linear non-stationary systems, which are equivalent to any limited controls for achievable final conditions, is considered.

**Keywords:** relay control, multidimensional system, linear system, non-stationary system, equivalent management.