

УДК 517.92

В.Г. Козырев, доцент, канд. техн. наук*Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***РАЗНОМАСШТАБНОЕ ТЕРМИНАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
СКОРОСТЬЮ ВРАЩЕНИЯ ВАЛА ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ**

Построен закон терминального управления скоростью вращения вала электродвигателя, учитывающий разномасштабный характер динамики двигателя и упрощающий алгоритм управления скоростью. Моделирование закона показало его эффективность.

Ключевые слова: управление, разномасштабная система, асимптотическое приближение.

Введение. Управление динамическими объектами с быстрыми и медленными (разномасштабными по времени) собственными движениями связано с определенными трудностями. Наличие быстро изменяющихся переменных состояния требует задания мелкой дискретизации вычислений по времени. Вследствие этого возрастает расход ресурсов управляющего компьютера. Подобная особенность известна под названием жесткости систем.

Выход предоставляют специальные численные методы, которые, однако, требуют выполнения громоздких математических операций (например, обращения матриц) на каждом шаге интегрирования. Более предпочтительными являются асимптотические методы. Они позволяют произвести декомпозицию системы на «быструю» и «медленную» части, каждая из которых уже не обладает свойством жесткости. Соединив далее процессы в этих частях в единую комбинацию, мы получаем асимптотическое приближение исходной задачи. Здесь данные методы применяются для построения асимптотического приближения оптимального терминального закона управления простым динамическим объектом, в качестве которого взят электродвигатель (ЭД) постоянного тока.

ЭД представляет собой типичный пример объекта с разномасштабными движениями. Механические процессы в ЭД – вращение вала происходят более инерционно и медленно, чем электрические – протекание тока в якорной обмотке, которые менее инерционны и осуществляются быстро.

Цель исследования. Полученные в [1] асимптотические разномасштабные приближения законов терминального управления не достаточно проверены на моделях реальных объектов. Целью данного исследования является тестирование их на типовом динамическом объекте, каковым является ЭД. Строятся точное и асимптотическое решения задачи. На основании их сравнения делаются выводы о преимуществе асимптотических законов управления.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу терминального управления угловой скоростью вращения вала двигателя постоянного тока, управляемого входным напряжением U . Процессы в ЭД описываются уравнениями:

$$U - E_a - L \frac{dI}{dt} = RI,$$

$$J \frac{d\Omega}{dt} = M_m - C_{fr}\Omega - M_{load}.$$

Здесь U – управляющее напряжение, приложенное к якорной цепи электродвигателя; I – ток в якорной цепи; R и L – ее активное сопротивление и индуктивность; Ω – угловая скорость вращения вала ЭД; $E_a = c_e \Phi \Omega = C_e \Omega$ – эдс реакции якоря, пропорциональная потоку возбуждения Φ и скорости Ω ($C_e = c_e \Phi$ – коэффициент пропорциональности скорости); $M_m = c_m \Phi I = C_m I$ – вращающий магнитный момент, пропорциональный потоку возбуждения и току I ($C_m = c_m \Phi$ – коэффициент пропорциональности току); C_{fr} – коэффициент вязкого трения; M_{load} – момент сопротивления

(нагрузки) на валу. Малые коэффициенты пропорциональности равны $c_e = c_m = \frac{pN \cdot 10^{-8}}{2\pi a}$, где p – число пар полюсов; N – число проводников якоря; a – число пар параллельных ветвей.

Уравнения ЭД в переменных состоянии Ω и I записываются тогда следующим образом:

$$J \frac{d\Omega}{dt} = -C_{fr}\Omega + C_m I - M_{load},$$

$$L \frac{dI}{dt} = -C_e \Omega - RI + U.$$

Значения постоянных параметров ЭД возьмем для определенности из работы [2]: $R=7,9$ Ом, $L=0,0136$ Гн, $J=1,32\cdot 10^{-6}$ кг·м², $C_e=C_m=0,0246$ В·с/рад, $C_{fr}\approx 0$. Так как индуктивность L мала, примем $L=0,0136\lambda$, где $\lambda=1$ – формально введенный малый множитель.

Номинальные значения переменных известны: $\Omega_{nom}=400$ рад/с, $U_{nom}=11,8$ В, $I_{nom}=(U_{nom}-C_e\Omega_{nom})/R=0,25$ А, $M_{load_nom}=C_m I_{nom}=6,1\cdot 10^{-3}$ Н·м.

Запишем уравнения ЭД в отклонениях от номинального режима при $M_{load}\approx M_{load_nom}$:

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{dt} &= a_1\omega + a_2i + m_{load}, \\ \lambda \frac{di}{dt} &= a_3\omega + a_4i + bu.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь $\omega=\Omega-\Omega_{nom}$, $i=I-I_{nom}$, $u=U-U_{nom}$, $m_{load}=M_{load}-M_{load_nom}\approx 0$ – отклонения переменных состояния и управления от номинальных значений. В данном случае ω – медленная переменная, i – быстрая, а коэффициенты уравнений равны:

$$a_1=-\frac{C_{fr}}{J}, \quad a_2=\frac{C_m}{J}, \quad a_3=-\frac{C_e}{L}, \quad a_4=-\frac{R}{L}, \quad b=\frac{1}{L}.$$

Поставим задачу перевести ЭД в номинальный режим по скорости из состояния с начальной скоростью $\Omega(0)$ за конечное время t_f . В терминах переменной ω это эквивалентно переводу системы из начального состояния $\omega(0)=\Omega(0)-\Omega_{nom}$ в нулевое состояние $\omega=0$. Качество перевода будем оценивать квадратичным функционалом

$$J_f = \frac{1}{2} f \omega^2(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (q_1 \omega^2 + q_2 i^2 + r u^2) dt, \quad (2)$$

где весовые коэффициенты $f>0$, $q_{1,2}\geq 0$, $r>0$ выбираются дополнительно из соображений эффективности управления. Принимаем их

$$f=0,1, \quad q_1=1, \quad q_2=4600, \quad r=300.$$

При достаточно большом весе f терминальная ошибка $\omega(t_f)=\Omega(t_f)-\Omega_{nom}$ может быть сделана сколь угодно малой: $\omega(t_f)\approx 0$ [3].

Время t_f определяется инженерными требованиями к скорости управления.

Закон управления. Введем матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ \lambda^{-1}a_3 & \lambda^{-1}a_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda^{-1}b \end{bmatrix}, \quad S = BR^{-1}B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-2}s \end{bmatrix}, \quad s = b^2r^{-1}, \quad x = \begin{bmatrix} \omega \\ i \end{bmatrix},$$

$$H = [1 \quad 0], \quad \Phi = H'fH = \begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix},$$

и перепишем задачу (1), (2) в матричном виде:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad (3)$$

$$J_f = \frac{1}{2} (x' \Phi x)_{t=t_f} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x' Q x + r u^2) dt \quad (4)$$

(здесь штрих обозначает транспонирование).

Оптимальное управление для задачи (3), (4) определяется формулой [1]:

$$u = -r^{-1}B'K(t)x, \quad (5)$$

где $0 \leq t \leq t_f$, а матрица $K(t)$ удовлетворяет уравнению Риккати

$$\frac{dK}{dt} = -KA - A'K + KSK - Q, \quad K|_{t=T} = \Phi.$$

Согласно [1] матрица K определяется выражением

$$K = P + W'(M + F^{-1})^{-1}W, \quad (6)$$

а матриці K , P , W , M і F мають покомпонентний вид:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & \lambda k_2 \\ \lambda k_2 & \lambda k_3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} p_1 & \lambda p_2 \\ \lambda p_2 & \lambda p_3 \end{bmatrix}, \quad W = [w_1 \quad \lambda w_2], \quad M = m \quad \text{і} \quad F = f \quad - \text{скаляри.}$$

Одільні компоненти задовольняють рівнянням, які запишемо в зміщеному часі $\vartheta = t - t_f$, відраховуваному від кінця проміжку управління $t = t_f$, $-t_f \leq \vartheta \leq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{d\vartheta} &= -2a_1p_1 - 2a_3p_2 + sp_2^2 - q_1, \quad p_1|_{\vartheta=0} = 0, \\ \lambda \frac{dp_2}{d\vartheta} &= -a_2p_1 - a_4p_2 - \lambda a_1p_2 - a_3p_3 + sp_2p_3, \quad p_2|_{\vartheta=0} = 0, \\ \lambda \frac{dp_3}{d\vartheta} &= -2\lambda a_2p_2 - 2a_4p_3 + sp_3^2 - q_2, \quad p_3|_{\vartheta=0} = 0, \\ \frac{dw_1}{d\vartheta} &= -(a_3 - sp_2)w_2, \quad w_1|_{\vartheta=0} = 1, \\ \lambda \frac{dw_2}{d\vartheta} &= -a_2w_1 - (a_4 - sp_3)w_2, \quad w_2|_{\vartheta=0} = 0, \\ \frac{dm}{d\vartheta} &= -sw_2^2, \quad m|_{\vartheta=0} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Асимптотика матриць зворотньої зв'язи P , W і M . Задача (3), (5)-(7) задовольняє умовам теореми про асимптотичне розкладання рішення при малому λ [1]. Запишемо в відповідності з цією теоремою розкладання нульового порядку для компонент матриць P , W і M :

$$\begin{aligned} p_1(\vartheta, \lambda) &= p_{10}(\vartheta) + \lambda O(1), \\ p_i(\vartheta, \lambda) &= p_{i0}(\vartheta) + \Pi_0 p_i(\tau) + \lambda O(1) \quad (i = 2, 3), \\ w_1(\vartheta, \lambda) &= w_{10}(\vartheta) + \lambda O(1), \\ w_2(\vartheta, \lambda) &= w_{20}(\vartheta) + \Pi_0 w_2(\tau) + \lambda O(1), \\ m(\vartheta, \lambda) &= m_0(\vartheta) + \lambda O(1), \end{aligned}$$

де $\tau = (t - t_f)/\lambda$, а $O(1)$ – обмежені при $-t_f \leq \vartheta \leq 0$, $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ функції, λ_0 – деяке додатне число.

Члени розкладання визначаються з рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{dp_{10}}{d\vartheta} &= -2a_1p_{10} - 2a_3p_{20} + sp_{20}^2 - q_1, \quad p_{10}(0) = 0, \\ 0 &= -a_2p_{10} - a_4p_{20} - a_3p_{30} + sp_{20}p_{30}, \\ 0 &= -2a_4p_{30} + sp_{30}^2 - q_2, \\ \frac{dw_{10}}{d\vartheta} &= -(a_3 - sp_{20})w_{20}, \quad w_{10}(0) = 1, \\ 0 &= -a_2w_{10} - (a_4 - sp_{30})w_{20}, \\ \frac{dm_0}{d\vartheta} &= -sw_{20}^2, \quad m_0|_{\vartheta=0} = 0, \\ \frac{d\Pi_0 p_2}{d\tau} &= -\Pi_0 p_2 \cdot [a_4 - sp_{30}(0)] - [a_3 - sp_{20}(0)] \cdot \Pi_0 p_3 + s \cdot \Pi_0 p_2 \cdot \Pi_0 p_3, \\ \Pi_0 p_2(0) &= -p_{20}(0), \\ \frac{d\Pi_0 p_3}{d\tau} &= -2(a_4 - sp_{30}(0)) \cdot \Pi_0 p_3 + s \cdot (\Pi_0 p_3)^2, \quad \Pi_0 p_3(0) = -p_{30}(0), \\ \frac{d\Pi_0 w_2}{d\tau} &= -[a_4 - sp_{30}(0) - s\Pi_0 p_3] \cdot \Pi_0 w_2 + sw_{20}(0) \cdot \Pi_0 p_3, \quad \Pi_0 w_2(0) = -w_{20}(0). \end{aligned} \quad (8)$$

Уточним, что выражения вида $X(0)$ означают здесь значения функций $X(\vartheta)$ при $\vartheta = 0$, т.е. при $t = t_f$.

Так как $p_{30}(\vartheta)$ – постоянная, то $p_{30}(\vartheta) = p_{30}(0) = p_{30}|_{t=t_f}$.

Асимптотика матрицы K и асимптотика закона управления. Используя асимптотические приближения матриц P , W и M , запишем асимптотическое приближение всей матрицы Риккати K [1]:

$$\tilde{K} = \tilde{P} + \tilde{W}\tilde{W}(\tilde{m} + f^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{p}_{10} & \lambda\tilde{p}_2 \\ \lambda\tilde{p}_2 & \lambda\tilde{p}_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{\tilde{m} + f^{-1}} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \lambda\tilde{w}_2 \end{bmatrix} \cdot [\tilde{w}_1 \quad \lambda\tilde{w}_2] = \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & \lambda\tilde{k}_2 \\ \lambda\tilde{k}_2 & \lambda\tilde{k}_3 \end{bmatrix},$$

где $\tilde{p}_1 = p_{10}(\vartheta)$,

$$\tilde{p}_i = p_{i0}(\vartheta) + \Pi_0 p_i(\tau) \quad (i = 2, 3),$$

$$\tilde{w}_1 = w_{10}(\vartheta),$$

$$\tilde{w}_2 = w_{20}(\vartheta) + \Pi_0 w_2(\tau),$$

$$\tilde{m} = m_0(\vartheta).$$

Асимптотический закон управления имеет тогда вид:

$$\tilde{u} = -r^{-1}B'\tilde{K}\tilde{x}. \quad (9)$$

Для нахождения матрицы $\tilde{K}$ надо решить уравнения (8). С этой целью необходимо выразить члены p_{30} , p_{20} и w_{20} через константы и члены p_{10} , w_{10} из алгебраических уравнений системы (8), подставить их в оставшиеся дифференциальные уравнения и проинтегрировать последние.

Именно, из алгебраических уравнений (8) получаем:

$$p_{30} = \frac{1}{s} \left(a_4 + \sqrt{a_4^2 + sq_2} \right) = \text{const},$$

$$p_{20} = \frac{1}{\sqrt{a_4^2 + sq_2}} (a_2 p_{10} + a_3 p_{30}),$$

$$p_{20}(0) = \frac{1}{\sqrt{a_4^2 + sq_2}} (a_2 p_{10}(0) + a_3 p_{30}) = \frac{1}{\sqrt{a_4^2 + sq_2}} a_3 p_{30},$$

$$w_{20} = \frac{1}{\sqrt{a_4^2 + sq_2}} a_2 w_{10},$$

$$w_{20}(0) = \frac{1}{\sqrt{a_4^2 + sq_2}} a_2 w_{10}(0) = \frac{a_2}{\sqrt{a_4^2 + sq_2}}.$$

Теперь искомые дифференциальные уравнения для оставшихся компонент приобретают вид:

$$\frac{dp_{10}}{d\vartheta} = -2a_1 p_{10} - 2a_3 p_{20} + sp_{20}^2 - q_1, \quad p_{10}(0) = 0,$$

$$\frac{dw_{10}}{d\vartheta} = -(a_3 - sp_{20})w_{20}, \quad w_{10}(0) = 1, \quad (10)$$

$$\frac{dm_0}{d\vartheta} = -sw_{20}^2, \quad m_0|_{\vartheta=0} = 0,$$

$$\frac{d\Pi_0 p_2}{d\tau} = -\Pi_0 p_2 \cdot (a_4 - sp_{30}(0)) - (a_3 - sp_{20}(0)) \cdot \Pi_0 p_3 + s \cdot \Pi_0 p_2 \cdot \Pi_0 p_3,$$

$$\Pi_0 p_2(0) = -p_{20}(0),$$

$$\frac{d\Pi_0 p_3}{d\tau} = -2(a_4 - sp_{30}(0)) \cdot \Pi_0 p_3 + s \cdot (\Pi_0 p_3)^2, \quad \Pi_0 p_3(0) = -p_{30}(0), \quad (11)$$

$$\frac{d\Pi_0 w_2}{d\tau} = -[a_4 - sp_{30}(0) - s\Pi_0 p_3] \cdot \Pi_0 w_2 + sw_{20}(0) \cdot \Pi_0 p_3, \quad \Pi_0 w_2(0) = -w_{20}(0).$$

Інтегруючи окремо рівняння (10) і (11) в медленному і швидкому часі відповідно, легко розрахувати матрицю $\tilde{K}$ в функції поточного часу, а також асимптотично оптимальне управління $\tilde{u}$ по формулі (9) і формуються їм процеси в об'єкті $\tilde{\omega}$ і $\tilde{i}$. Для знаходження точних оптимальних процесів u , ω і i необхідно розв'язати відповідно систему рівнянь (7).

Повні значення процесів виражаються через номінальні значення і знайдені відхилення: $U = U_{nom} + u$, $\Omega = \Omega_{nom} + \omega$, $I = I_{nom} + i$ – точні оптимальні процеси; $\tilde{U} = U_{nom} + \tilde{u}$, $\tilde{\Omega} = \Omega_{nom} + \tilde{\omega}$, $\tilde{I} = I_{nom} + \tilde{i}$ – їх асимптотики.

Результати розрахунків матриці Риккати і процесів управління показані на рисунках 1 – 3. Оптимальні (точні) компоненти матриці Риккати позначені на графіках іменами $K11 = k_1$, $K12 = \lambda k_2$, $K22 = \lambda k_3$. Їх асимптотичні наближення – $KAs11 = \tilde{k}_1$, $KAs12 = \tilde{\lambda k}_2$, $KAs22 = \tilde{\lambda k}_3$. Аналогічним образом позначені і процеси: U , Ω і I – відповідно оптимальне керуюче напруження, кутова швидкість і струм в обмотці; $UAs = \tilde{U}$, $\Omega As = \tilde{\Omega}$ і $IAs = \tilde{I}$ – їх асимптотичні наближення.

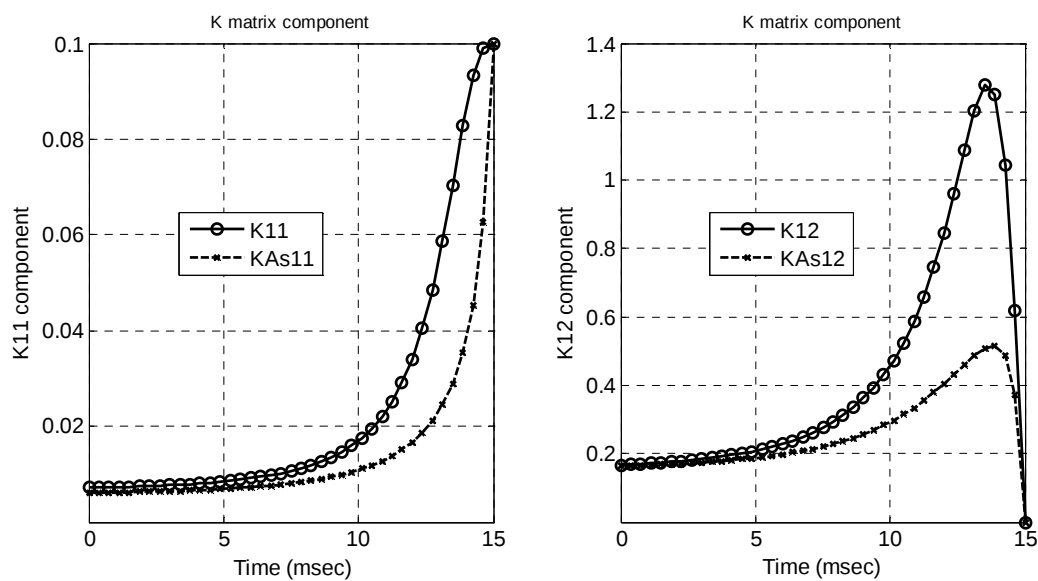


Рисунок 1 – Елементи матриці Риккати: $K11 = k_1$ і $K12 = \lambda k_2$ – точні;

$KAs11 = \tilde{k}_1$ і $KAs12 = \tilde{\lambda k}_2$ – асимптотично наближені

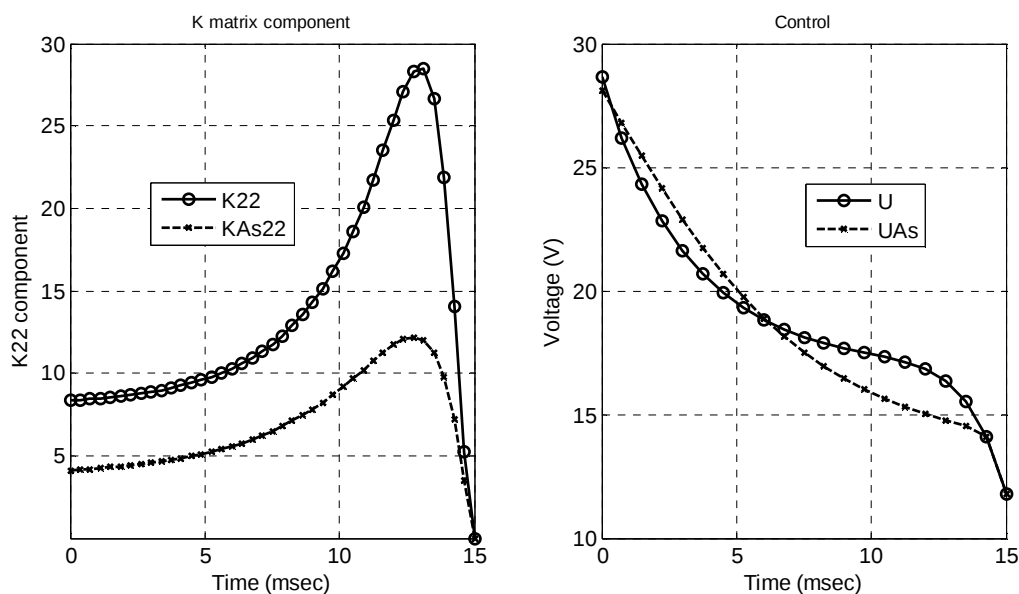


Рисунок 2 – Елемент матриці Риккати: $K22 = \lambda k_3$ – точний; $KAs22 = \tilde{\lambda k}_3$ – асимптотично наближений (слева). Керуюче електричне напруження U і його асимптотичне наближення $UAs = \tilde{U}$ (справа)

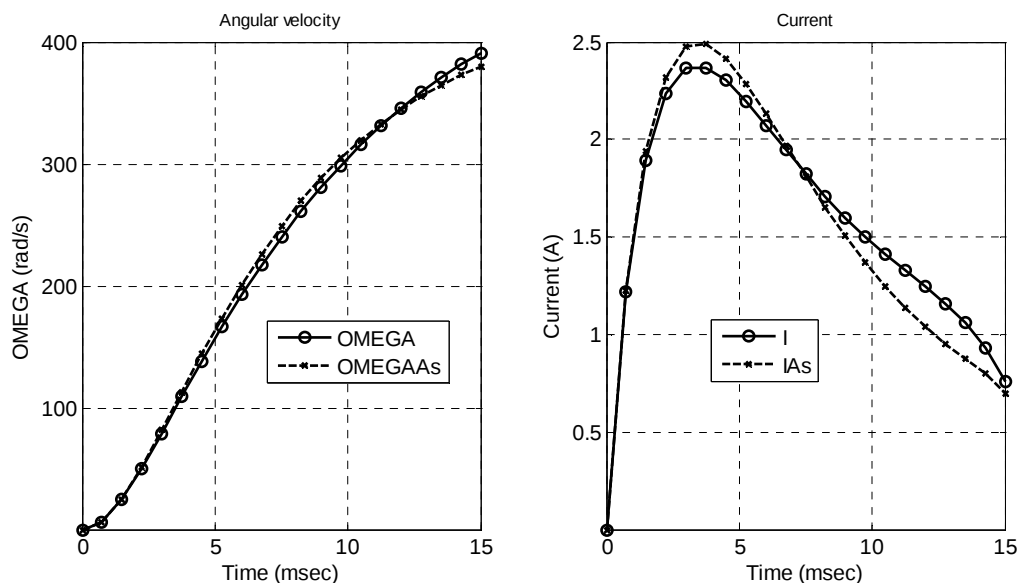


Рисунок 3 – Угловая скорость вращения вала двигателя $OMEGA = \Omega$, ток в обмотке I , их асимптотические приближения $OMEGAAs = \tilde{\Omega}$, $IAs = \tilde{I}$

На рисунках 1 и 2 наблюдается некоторое расхождение точных и асимптотических компонент матрицы Риккати. Это связано с использованием асимптотики нулевого порядка малости по λ . Повышение точности может быть достигнуто привлечением асимптотики более высокого порядка.

Тем не менее, сохраняется близость самих процессов управления – напряжений U и $\tilde{U}$ (рисунок 2), скоростей микродвигателя Ω и $\tilde{\Omega}$ (рисунок 3) и токов I и $\tilde{I}$ (рисунок 3). Причем, это имеет место при довольно жестком требовании к времени управления, составляющем в нашем примере всего лишь 15 мс.

Одновременно достигается достаточно точный терминальный переход скорости из нулевого значения в заданное номинальное Ω_{nom} за указанное малое время 15 мс (рисунок 3).

Хотя и происходит бросок пускового тока I до 2,5 А (рисунок 3), этот бросок кратковременный. Он не может вызвать перегрева обмотки двигателя.

Полученные выводы свидетельствуют об эффективности предложенного закона управления и его асимптотики. Асимптотический закон формируется путем решения более простых уравнений, чем точный, оптимальный. Его встраивание в бортовой компьютер требует существенно меньшего числа узловых точек по времени и, как следствие, меньшего объема памяти и времени работы компьютера.

Дальнейшие исследования могут быть связаны с привлечением асимптотики следующего порядка и повышением за счет этого точности разномасштабного управления.

Бibliографический список использованной литературы

1. Козырев В.Г. Оптимальный регулятор выхода сингулярно возмущенных систем // Радиоэлектроника, информатика, управление: сб. науч. ст. — Запорожье: Изд. ЗГТУ, 2003. — № 2 (10). — С. 125–131.
2. Yackel R.A. Метод пограничного слоя для матричного уравнения Риккати / R.A. Yackel, P.V. Kokotovic// IEEE Trans. on Automatic Control. — 1973. — V. 18. — № 1, February. — P. 17–24.
3. Козырев В.Г. Терминальная ошибка почти точного оптимального приведения в ноль // Динамические системы: межвед. науч. сб. — Симферополь, 2001. — Вып. 17. — С. 18–22.

Поступила в редакцию 31.10.2011 г.

Козырев В.Г. Різномасштабне термінальне управління швидкістю обертання вала електродвигуна

Побудовано закон термінального керування швидкістю обертання вала електродвигуна, що враховує різномасштабний характер динаміки двигуна і спрощує алгоритм керування швидкістю. Моделювання закону показало його ефективність.

Ключові слова: управління, різномасштабна система, асимптотичне наближення.

Kozyrev V.G. Multi-time-scale Terminal Control of Motor Axis Angular Velocity

The analytical formula of terminal error of the dynamic plant status control is derived. Electric drive is considered as the dynamic plant. The formula allows to discover error dependence on the regulator and plant parameters and to choose the regulator parameters soundly.

Keywords: terminal control, multi-time-scale system, asymptotic approximation.