

УДК 681.5:517.935

С.А. Дубовик, профессор,**Д.В. Логинов***Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: tk@sevgtu.sebastopol.ua***АНАЛИЗ ОСТОЙЧИВОСТИ НА ОСНОВЕ ФУНКЦИОНАЛА ДЕЙСТВИЯ (ПРОБЛЕМА ДОЛГОВРЕМЕННОГО ПРОГНОЗА)**

Исследуется метод прогнозирования критических состояний с учетом больших отклонений на длительном интервале. Рассмотрена проблема регуляризации и ее связь с временем прогноза, предложена частная регуляризация. Приведены результаты моделирования в пакете Matlab.

Одним из направлений автоматизации и синтеза систем, развивающимся в настоящее время, являются вероятностно-асимптотические методы статистического прогноза систем управления движением.

Проектирование систем управления, предназначенных для работы в условиях неопределенности, может основываться на некоторых гарантирующих принципах, ориентированных на наихудшие из возможных условия функционирования системы. С другой стороны, практика применения этих методов в отмеченных задачах показывает, что в целом ряде случаев не удается достигнуть ожидаемых показателей эффективности проектируемых систем. Одним из основных слагаемых, составляющих здесь понятие эффективности, оказывается показатель надежности, понимаемый как устойчивость системы к возмущениям. Часто оказывается так, что этот показатель надежности или устойчивости вступает в противоречие с другими составляющими эффективности в той мере, в какой последние приводят к усложнению проектируемой системы [1].

В так называемых нештатных ситуациях, когда система подвергается нерасчетным возмущениям, требования к обработке входной информации существенно меняются: дефицит времени предписывает выделять в информации только то, что требуется для выполнения основной задачи и отбрасывать все остальное, что имело смысл в априорных представлениях об эффективности. Достаточно общей моделью, учитывающей подход структурирования информации, является управляемый процесс диффузионного типа с малыми параметрами в матрице диффузии.

В настоящее время уже разработана общая постановка задачи и алгоритм прогнозирования внештатного состояния в случае больших отклонений [2]. Статистический алгоритм прогноза был рассмотрен для оперативных оценок выхода подводного аппарата на критическую глубину [3]. Однако остается еще нерешенным целый ряд проблем, в частности проблема долговременного прогноза, связанная с ограничениями диффузионного процесса. Целью данной статьи является рассмотрение на примере проблемы опрокидывания связи регулярности ограничений с долговременным прогнозированием и решение задачи частной регуляризации.

Рассмотрим задачу Лагранжа—Понтрягина (ЛП) [1] для диффузионного процесса

$$\dot{\tilde{x}}_t = \tilde{a}(\tilde{x}_t) + \varepsilon \sigma(\tilde{x}_t) \dot{w}_t, \quad \tilde{x}_0 = x, \quad (1)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр; w_t — k -вектор возмущений; α, σ — гладкие матричные функции.

Эта задача для функционала действия корректна при следующих условиях:

А) Вектор-функция $\tilde{a}(x)$ и матричная функция $\Sigma(x) = \sigma(x)\sigma^T(x)$ в R^n ограничены и равномерно непрерывны;

Б) Матрица $\Sigma(x) = \sigma(x)\sigma^T(x)$ при любом x симметрична и равномерно невырождена.

Условие Б равномерной невырожденности матрицы диффузии в прикладных задачах, как правило, не выполняется (не выполняется оно и в нашей задаче опрокидывания). Пусть случайный шум входит только в последние $l = n - m$ уравнений системы, $l \leq m < n$, т.е.

$$\sigma(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1(x) \end{pmatrix} \quad (2)$$

является вырожденной $n \times n$ -матрицей, в которой $l \times l$ -матрица $\sigma_1(x)$ равномерно невырождена. Наряду с параметром ε введем в (1) малый параметр λ , заменяя матрицу диффузии следующей

$$\sigma(x) = \tilde{\sigma}(x) = \begin{pmatrix} \lambda I_m & 0 \\ 0 & \sigma_1(x) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где I_m – единичная $m \times m$ -матрица. Ясно, что такая замена регуляризует задачу, так как при фиксированном λ матрица диффузии $\tilde{\sigma}(x)$ удовлетворяет условию Б равномерной невырожденности. В силу этого для системы (1), (3) может быть сформирован нормированный функционал действия с последующей оценкой вероятности критического состояния с помощью вариационной задачи ЛП. Обозначим

$$\hat{S}(\lambda) = \min_{\varphi(t_f) \in \Delta_a^*} S_v(T, \varphi) = S_v(\hat{T}, \hat{\varphi}),$$

т. е. $\hat{\varphi}$ – экстремаль, на которой достигается минимум. Если теперь существует

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \hat{S}(\lambda) = \hat{S}(0), \quad (4)$$

то вероятность критического состояния оценивается величиной $\exp\{-\varepsilon^{-2} \hat{S}(0)\}$. Остается доказать (4) и вычислить $\hat{S}(0)$. Для этого выпишем все элементы задачи ЛП (Δ_a^*) для системы (1), (3). Фактически, несколько изменяется только система больших уклонений

$$\dot{\varphi}_t = a(\varphi_t) + \tilde{\sigma}(\varphi_t) v_t, \quad \varphi_0 = x. \quad (5)$$

Определенный для нее на $T = [0, t_f]$ нормированный функционал действия записывается в стандартной форме:

$$S_v = S_v(T, \varphi) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} v_t^T v_t dt. \quad (6)$$

Задача ЛП (Δ_a^*) состоит в том, чтобы минимизировать (6) на движениях системы (5), выполнив при этом граничное условие

$$\varphi(t_f) \in \Delta_a^*. \quad (7)$$

Гамильтониан для задачи (5) – (7) запишется как

$$H = \frac{1}{2} v_t^T v_t + \psi_t^T (a(\varphi_t) + \tilde{\sigma}(\varphi_t) v_t),$$

где n – вектор сопряженных переменных ψ_t удовлетворяет уравнению

$$\dot{\psi}_t^T = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_t} = -\psi_t^T \left(\frac{\partial a(\varphi_t)}{\partial \varphi_t} + \frac{\partial \tilde{\sigma}(\varphi_t)}{\partial \varphi_t} v_t \right). \quad (8)$$

Из условия максимума гамильтониана по "управлению" v_t : $\frac{\partial H}{\partial v_t} = 0$ сразу получаем формулу для оптимального "управления"

$$v_t = \hat{v}_t = \sigma_\lambda^T(\varphi_t) \psi_t. \quad (9)$$

Подставляя (9) в уравнение (8) окончательно для сопряженных переменных будем иметь

$$\dot{\psi}_t^T = -\psi_t^T \left(\frac{\partial a(\varphi_t)}{\partial \varphi_t} + \frac{\partial \tilde{\sigma}(\varphi_t)}{\partial \varphi_t} \sigma_\lambda^T(\varphi_t) \psi_t \right). \quad (10)$$

К этим уравнениям следует еще приписать граничные условия в точке $t = t_f$. Конкретный вид этих условий определяется множеством Δ_a^* . Далее, в соответствии с (3) производная $\partial \tilde{\sigma}(\varphi_t) / \partial \varphi_t$ не зависит от λ . Уравнения (5), (9), (10) представляют собой регулярно возмущенную систему уравнений по параметру $\lambda > 0$, в которой возможен предельный переход по $\lambda \rightarrow 0$. Вычисление предела (4) сводится к подстановке в (5), (9), (10) $\tilde{\sigma}(\varphi_t) = \sigma(\varphi_t)$ в форме (2).

Проблема в том, что сходимость в (4), вообще говоря, неравномерна по x и t .

Добавление шумов со сколь угодно малой интенсивностью позволяет удовлетворить условию Б на любом конечном интервале $[T_1, T_2]$. Между тем, могут представлять интерес задачи с неограниченным интервалом времени. Примером является задача о выходе фазовой точки из окрестности устойчивого состояния равновесия.

В предположении линейности уравнения (5), покажем, что в таких случаях регуляризация по λ позволяет построить аппроксимации только ограниченных отрезков экстремали, примыкающих к точке

выхода из D . В последующих построениях наряду с линейностью существенную роль играет квазипотенциальное представление для векторного поля (5).

Итак, пусть уравнения (5) имеют вид:

$$\dot{\varphi}_t = \bar{A} \varphi_t + \bar{G}(\lambda) v_t, \quad \varphi_0 = x, \quad (11)$$

где $\bar{A}$ и $\bar{G}$ – постоянные матрицы, из которых последняя регулярным образом зависит от параметра λ и так, что имеет место следующее:

С) матрица $\bar{\Sigma} = \bar{\Sigma}(\lambda) = \bar{G}(\lambda) \bar{G}^T(\lambda)$ – невырождена при $\lambda > 0$.

Заметим, что $\bar{\Sigma}_0 = \bar{\Sigma}(0)$ может быть вырожденной, что и означает невыполнение условия Б для (12).

В задаче (7), (11) совершим преобразование подобия $\varphi = L \xi$, приводящее матрицу системы к нормальному виду [2]. В результате получим

$$\dot{\xi}_t = A \xi_t + G(\lambda) v_t, \quad L \xi \in F, \quad (12)$$

где

$$A = L^{-1} \bar{A} L, \quad G = L^{-1} \bar{G}, \quad A A^T = A^T A. \quad (13)$$

Уравнению (12) соответствует невозмущенная система $\dot{x}_t = A x_t$, векторное поле которой допускает разложение (∇ – градиент):

$$A x = -\nabla(-(A + A^T)x, x)/4 + (A - A^T)x/2 = -\nabla U(x)/2 + l(x),$$

где

$$U(x) = -((A + A^T)x, x)/2, \quad l(x) = (A - A^T)x/2,$$

причём, как легко видеть, в силу (14) получаем

$$(l(x), \nabla U(x)) = -x^T (A^T + A)(A - A^T)x/2 = 0.$$

Это означает, что для вычисления экстремали в задаче (7), (11) можно применить метод квазипотенциала [2], который в данном случае сводится к решению уравнения

$$\dot{\varphi}_t = \nabla_{\alpha} H(\varphi_t, \nabla U(\varphi_t)) \quad (14)$$

для строго выпуклой и гладкой по второму аргументу функции

$$H(x, \alpha) = (A x, \alpha) + (\Sigma(\lambda) \alpha, \alpha)/2, \quad (15)$$

где $\Sigma(\lambda) = G(\lambda) G^T(\lambda)$ (см. (12), (13)). Дифференцируя (15) и (14), получаем:

$$\dot{\varphi}_t = A \varphi_t + \Sigma(\lambda) \nabla U(\varphi_t) = A \varphi_t + \Sigma(\lambda) \nabla \left(-\frac{A + A^T}{2} \varphi_t, \varphi_t \right).$$

Окончательно для экстремали имеем линейное однородное уравнение

$$\dot{\varphi}_t = A_{\lambda} \varphi_t, \quad (16)$$

где

$$A_{\lambda} = A - \Sigma(\lambda)(A + A^T). \quad (17)$$

Анализ собственных чисел матриц A и A_0 позволяет ответить на вопрос о равномерной по t пригодности регуляризации в (12). Гурвицевость A и антигурвицевость A_0 гарантируют равномерность по $t \in (0, \infty)$. Последнее условие может не выполняться даже в простейших случаях и тогда прогноз критического состояния с помощью предлагаемой регуляризации матрицы диффузии возможен лишь на конечном интервале, примыкающем к точке выхода из области D . Это означает в указанном случае невозможность долговременного прогноза, то есть вычисления экстремали (16), исходящей из устойчивого (нулевого) состояния равновесия или из его произвольно малой окрестности. В линейном случае (а в малой окрестности нулевого состояния равновесия систему можно линеаризовать) соответствующие выводы делаются по матрице (17).

Рассмотрим в качестве примера систему (11) второго порядка сразу в нормализованной форме (12) и имеющей гурвицеву матрицу $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Относительно коэффициента диффузии разберём два

случая: 1) регулярный, $\Sigma = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – выполнено условие Б;

2) вырожденный, $\Sigma = \Sigma(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, для которого воспользуемся регуляризацией (условие С):

$$\Sigma(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В первом случае следует положить $\Sigma(\lambda) = \Sigma = I_2$ и учесть, что $A + A^T = I_2$, после чего имеем в (17) $A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Последняя матрица является антигуерцевой, имеющей собственные числа $s_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-1}$, и это гарантирует существование экстремали, ведущей из 0 на границу ∂D окрестности состояния равновесия D . Во втором случае

$$A_\lambda = A + 2\Sigma(\lambda) = \begin{pmatrix} -1+2\lambda & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } A_0 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица A_0 имеет двукратное нулевое собственное число, что свидетельствует в данном случае о неравномерной пригодности регуляризации $\Sigma(\lambda)$ на положительной полупрямой; в этом случае возможен только кратковременный прогноз: вычисление экстремали, исходящей из точки, достаточно удаленной от 0.

Для задачи устойчивости последний результат означает, что прогноз опрокидывания за большое количество периодов до самого опрокидывания становится сложной проблемой именно из-за возникающего явления расходимости. Следствием этого оказывается то, что прогнозировать слишком маловероятное опрокидывание не удастся. Так, по определению функционала действия S , величина $P_t = P_t(\tau)$, вычисленная в момент t , и равная вероятности того, что опрокидывание произойдет в некоторый момент $t + \tau$, оценивается как $P_t = \exp(-S_t)$. При малых τ эта вероятность близка к единице и проблем нет. Проблема расходимости возникает при больших τ и при вероятностях $P_t = P_t(\tau)$, близких к нулю. Максимальное $\tau = \tau_*$, при котором еще возможен прогноз, задает реперную точку. Можно сказать, что реперная точка – это точка, из которой возможен максимально долговременный прогноз опрокидывания. Этой точке соответствует минимально достижимая вероятность $P_t = \exp(-S_t)$. Для задачи, рассмотренной в [2], $\tau = \tau_*$ – это максимальная длительность экстремали действия – оказывается порядка 160 с. На рисунке 1 показаны соответствующие осциллограммы.

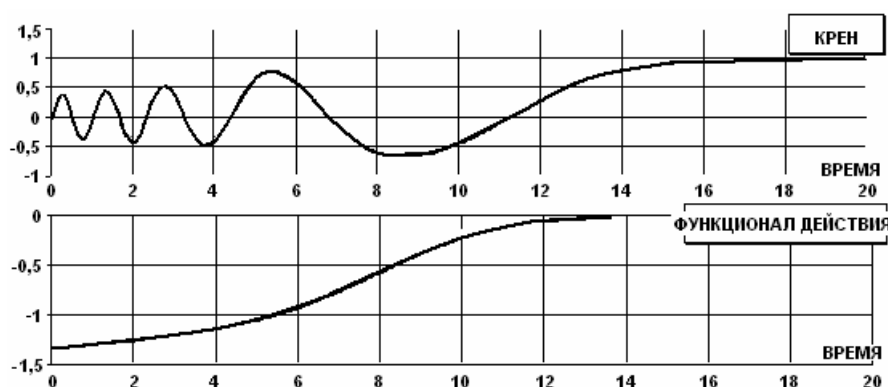


Рисунок 1 – Пример расчетов в системе анализа устойчивости

Длительность экстремали действия равна 32 с

Вероятность опрокидывания $P = 0,25976869$.

Здесь $P_* = 0,2598$ и эту величину практически нельзя уменьшить. Действительно, попробуем увеличить длительность экстремали на 25 с, т.е. возьмем $\tau = 185$ с. Получим осциллограммы, изображенные на рисунке 2. Новое значение вероятности $P_* = 0,234$, т.е. несколько меньше, но при этом на осциллограммах крена и возмущений наблюдается быстрая расходимость. Это и означает, во-первых, что начальная точка на приведенных осциллограммах – есть реперная точка и, во-вторых, что дальнейшее увеличение времени прогноза и снижение вероятности невозможно в рамках принятой модели качки, имеющей вырожденную матрицу диффузии.

Результаты численного моделирования показывают, что последствия практической расходимости в π -системе могут быть уменьшены даже при частичной регуляризации матрицы диффузии. В частности,

в задаче устойчивости [2] $\Delta l(\vartheta) = 0,5(l_{\max} - l_{\min})$, $l_{\max} = l(\vartheta) + \Delta l_1(\vartheta)$, $l_{\min} = l(\vartheta) - \Delta l_2(\vartheta)$, $\Delta l_1(\vartheta) = 0,3\vartheta - 0,15\vartheta^3$, $\Delta l_2(\vartheta) = 0,4\vartheta - 0,1\vartheta^3$, так что при $\vartheta \rightarrow 0$ коэффициент $\Delta l(\vartheta)$ вырождается, то есть $\Delta l(\vartheta) \rightarrow 0$. В связи с этим, можно попытаться следующим образом регуляризовать флуктуационную составляющую плеча статической устойчивости: заменить $\Delta l(\vartheta)$ на $\Delta l(\vartheta) + \Delta$, где Δ – некоторая малая положительная константа.

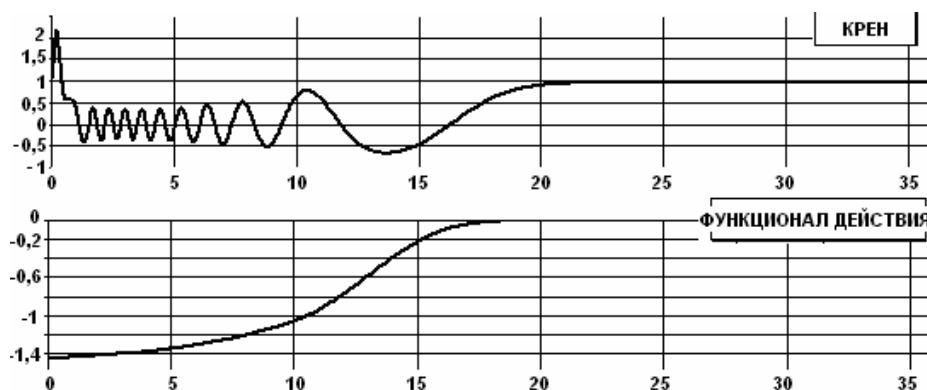


Рисунок 2 – Пример расчета для $\tau = 185$ с

Результат для $\Delta = 0,085$ показан на рисунке 3.

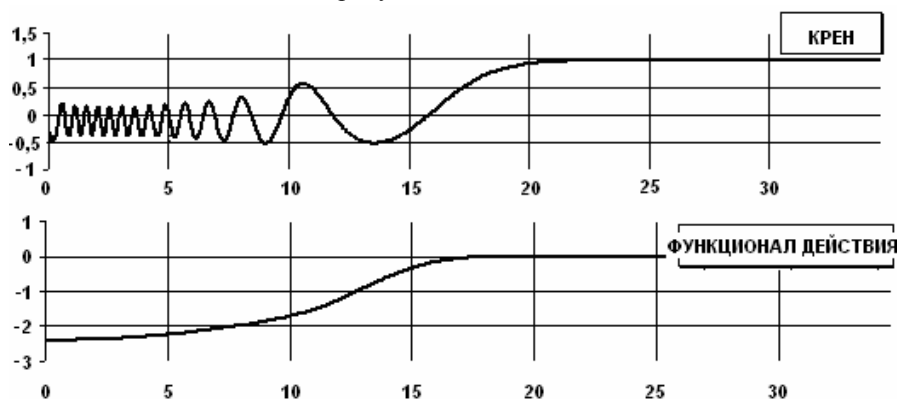


Рисунок 3 – Осциллограммы для регуляризованной модели

Таким образом, мы приходим к выводу, что уже такая, частичная, регуляризация позволила увеличить максимальный период времени, на который вычисляется прогноз события опрокидывания, что выразилось и в уменьшении начальной вероятности опрокидывания до величины $P_* = 0,088$ (где $S_* \cong 2,45$).

Данная работа подводит к рассмотрению вытекающих отсюда проблем общей формализации алгоритма долговременного прогноза для нелинейных систем. В дальнейшем планируется исследование зависимости парирующих возмущений от результата статистического анализа.

Библиографический список

1. Вентцель А.Д. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений / А.Д. Вентцель, М.И. Фрейдлин; под ред. Вентцель А.Д. — М.: Наука, 1979. — 424 с.
2. Дубовик С.А. Функционал действия в задачах управления / С.А. Дубовик // «Автоматика – 2003»: матер. 10-й междунар. конф. по автоматическому управлению. Севастополь, 15–19 сентября 2003 г. — Севастополь, 2003. — Т. 1. — С. 129–130.
3. Дубовик С.А. Стабилизация движения подводного аппарата на основе функционала действия / С.А.Дубовик, Д.В.Логинов // Системы управления и автоматики: матер. всеукраин. науч.-техн. конф., Севастополь, 10–11 апреля 2007 г. — Севастополь, 2007. — С. 21–23.

Поступила в редакцию 7.11.2008 г.