

УДК 517.92

В.Г. Козырев, доцент, канд. техн. наук*Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevtu.sebastopol.ua***О ТЕРМИНАЛЬНОЙ ОШИБКЕ УПРАВЛЕНИЯ ПОЛОЖЕНИЕМ ДИНАМИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА**

Получена аналитическая формула терминальной ошибки управления положением динамического объекта, в качестве которого рассмотрен электропривод постоянного тока. Формула позволяет выявлять зависимость ошибки от параметров регулятора и объекта и обоснованно выбрать параметры регулятора.

Ключевые слова: терминальное управление, динамический объект, терминальная ошибка.

Мягкое терминальное управление динамическими объектами, т.е. управление, не требующее введения бесконечно нарастающих коэффициентов усиления в цепях обратных связей, приводит к отклонению состояния объекта от заданного в конечный момент времени управления [1, 2]. Это отклонение (называемое терминальной ошибкой управления) зависит от динамических свойств объекта и регулятора. Для обоснованного выбора параметров регулятора необходим анализ этой зависимости. Данная задача решается здесь применительно к типовому динамическому объекту, в качестве которого рассмотрен электропривод управления положением. На его примере выявляются характерные закономерности появления терминальной ошибки. Подобная задача не нашла достаточного отражения в литературе и имеет практический и научный интерес.

Целью статьи является ее решение и получение на этой основе простых формул для выбора параметров закона управления, обеспечивающих приемлемую терминальную ошибку.

Представим объект, состоящий из вращающейся антенны и электропривода (электродвигателя с редуктором), который приводит антенну в движение [2]. Антенна отмечает направление на цель, движущуюся в плоскости. В начале движения антенна «захватывает цель». Эта операция заключается в формировании управляющего воздействия на двигатель, которое поворачивает антенну из начального углового положения Θ_0 , занимаемого антенной в момент времени $t_0 = 0$, в положение Θ_1 , при котором антенна в точности направлена на цель. Предполагается, что угол поворота антенны Θ доступен измерению с помощью визирного устройства. Перемещение антенны из начального положения Θ_0 в положение Θ_1 (захват цели) производится за минимально допустимое время без перегрузки двигателя. Представленная задача является типичной задачей терминального управления.

Объект управления «антенна-электропривод» описывается уравнениями

$$U - E_a = RI, \quad J \frac{d\Omega}{dt} = k_r M_m - C_{fr} \Omega - M_{load}, \quad \frac{d\Theta}{dt} = \Omega,$$

где U – управляющее напряжение, приложенное к якорной цепи электродвигателя (ЭД); I – ток в якорной цепи ЭД; R – ее активное сопротивление; $\Omega = \Omega_m / k_r$ – угловая скорость вращения выходного вала электропривода, равная угловой скорости вала двигателя Ω_m , деленной на коэффициент передачи редуктора k_r ; $\Theta = \Theta_m / k_r$ – угол поворота (угловое положение) выходного вала привода, равный отношению угла поворота вала двигателя Θ_m к коэффициенту k_r ; $J = J_m k_r^2 + J_r$ – момент инерции вала ЭД, приведенный к выходному валу редуктора (J_m и J_r – моменты инерции вала двигателя и редуктора); $E_a = c_e \Phi \Omega_m = C_e \Omega_m = C_e k_r \Omega$ – ЭДС реакции якоря, пропорциональная потоку возбуждения Φ и скорости Ω_m ($C_e = c_e \Phi$ – коэффициент пропорциональности скорости); $M_m = c_m \Phi I = C_m I$ – вращающий магнитный момент, пропорциональный потоку возбуждения и току I ($C_m = c_m \Phi$ – коэффициент пропорциональности току); $C_{fr} = C_{fr_m} k_r^2 + C_{fr_r}$ – коэффициент вязкого трения (C_{fr_m} и C_{fr_r} – коэффициенты трения валов двигателя и редуктора); M_{load} – момент сопротивления (нагрузки) на выходном валу редуктора.

Уравнения объекта в переменных состояния записываются как

$$J \frac{d\Omega}{dt} = - \left(\frac{C_m C_e k_r^2}{R} + C_{fr} \right) \Omega + \frac{C_m k_r}{R} U - M_{load}, \quad \frac{d\Theta}{dt} = \Omega.$$

Конечное угловое положение антенны, которое она должна занять в момент захвата цели, $\Theta = \Theta_1$ известно. Оно задается положением самой цели и измеряется, как уже сказано, визирным устройством. Потребуем, кроме того, чтобы в конечный момент времени (в момент захвата цели) антенна имела нулевую скорость $\Omega = \Omega_1 = 0$. Запишем уравнения состояния электропривода в отклонениях от конечного состояния $\Omega = \Omega_1$, $\Theta = \Theta_1$

$$\frac{d\omega}{dt} = -a\omega + bu, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega, \quad (1)$$

где $\omega = \Omega - \Omega_1 \equiv \Omega$, $\theta = \Theta - \Theta_1$ – отклонения переменных состояния от своих конечных значений;

$$a = \frac{1}{J} \left(\frac{C_m C_e k_r^2}{R} + C_{fr} \right); \quad b = \frac{1}{J} \frac{C_m k_r}{R}; \quad u = U - \frac{aR}{C_m} \Omega_1 - \frac{R}{C_m} M_{load} - \text{преобразованное управление.}$$

Начальное положение объекта (электропривода), которое он занимал в момент времени $t_0 = 0$, определяется значениями $\Omega(0) = \Omega_0$, $\Theta(0) = \Theta_0$, или, для отклонений, $\omega(0) = \omega_0 = \Omega_0 - \Omega_1$, $\theta(0) = \theta_0 = \Theta_0 - \Theta_1$. Конечное, в некоторый момент времени $t_1 = T$: $\Omega(T) = \Omega_1 = 0$, $\Theta(T) = \Theta_1$, или $\omega(T) = \omega_1 = \Omega_1 - \Omega_1 = 0$, $\theta(T) = \theta_1 = \Theta_1 - \Theta_1 = 0$. Качество управления при перемещении объекта из начального положения Ω_0 , Θ_0 (ω_0 , θ_0) в конечное Ω_1 , Θ_1 (ω_1 , θ_1) будем характеризовать квадратичным функционалом

$$J = \frac{1}{2} (f_1 \omega^2(T) + f_2 \theta^2(T)) + \frac{1}{2} \int_0^T r u^2 dt, \quad (2)$$

где коэффициенты $f_i > 0$ ($i = 1, 2$), $r > 0$ и время T выбираются из соображений эффективности управления. Терминальный член функционала $\frac{1}{2} (f_1 \omega^2 + f_2 \theta^2) \Big|_{t=T}$ служит мерой терминальной ошибки – отклонения состояния объекта от заданного (нулевого) в конечный момент времени $t = T$.

Интегральный член $\frac{1}{2} \int_0^T r u^2 dt$ характеризует обобщенные затраты на управление. Управляющее воздействие $u = u(t)$ на отрезке управления $0 \leq t \leq T$ определяется так, чтобы минимизировать функционал (2), т.е. минимизировать в совокупности терминальную ошибку и затраты на управление.

Подбором коэффициентов f_i ($i = 1, 2$) и r можно добиться достаточной малости ошибки управления при ограничениях на величину управляющей силы u . Время T определяется требованиями к скорости управления (быстроте поворота антенны).

Запишем уравнения объекта (1) и функционал качества (2) в матричном виде. Для этого введем матрицы: $A = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix}$, $S = BR^{-1}B' = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, где $s_1 = \frac{b^2}{r}$, и вектор состояния: $x = \begin{bmatrix} \omega \\ \theta \end{bmatrix}$.

В этих обозначениях уравнения (1) и (2) запишутся как

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad (3)$$

$$J = \frac{1}{2} x'(T)Fx(T) + \frac{1}{2} \int_0^T r u^2 dt. \quad (4)$$

Согласно [1], оптимальное управление для системы (3), минимизирующее функционал (4), подчиняется формуле

$$u = -\frac{1}{r} B'K(t)x,$$

где $0 \leq t \leq T$, а матрица $K(t)$ определяется выражением $K = W'(M + F^{-1})^{-1}W$. В этом выражении матрицы W и M являются решениями дифференциальных уравнений с условиями на правом конце:

$$\frac{dW}{dt} = -WA, \quad W(T) = E, \quad \frac{dM}{dt} = -WSW', \quad M(T) = 0, \quad (5)$$

где E – единичная матрица.

Терминальная ошибка, т.е. отклонение вектора состояния $x = \begin{bmatrix} \omega \\ \theta \end{bmatrix}$ от заданного (в нашем случае – нулевого) в конечный момент времени $t = T$ определяется, согласно [1], формулой

$$x(T) = (M(0)F + E)^{-1}W(0)x_0, \quad (6)$$

где $x_0 = x(0) = \begin{bmatrix} \omega_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix}$ – значение вектора состояния в начальный момент времени $t = 0$.

Записывая матрицы по элементам: $W = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_2 & m_3 \end{bmatrix}$, получаем уравнения (5) в развернутом виде:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad W(T) = E,$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_2 & m_3 \end{bmatrix} = - \frac{b^2}{r} \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 & w_3 \\ w_2 & w_4 \end{bmatrix} \equiv - \frac{b^2}{r} \begin{bmatrix} w_1^2 & w_1 w_3 \\ w_1 w_3 & w_3^2 \end{bmatrix}, \quad M(T) = 0.$$

Их решения запишутся в виде:

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^\sigma & 0 \\ \frac{1}{a}(1-e^\sigma) & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_2 & m_3 \end{bmatrix} = \frac{b^2}{ar} \begin{bmatrix} \mu_1 & \frac{1}{a}\mu_2 \\ \frac{1}{a}\mu_2 & \frac{1}{a^2}\mu_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{b^2}{ar} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-e^{2\sigma}) & \frac{1}{a}\left[1-e^\sigma - \frac{1}{2}(1-e^{2\sigma})\right] \\ \frac{1}{a}\left[1-e^\sigma - \frac{1}{2}(1-e^{2\sigma})\right] & \frac{1}{a^2}\left[-\sigma - 2(1-e^\sigma) + \frac{1}{2}(1-e^{2\sigma})\right] \end{bmatrix},$$

где $\sigma = a\vartheta$, $\vartheta = t - T$, $m_1 = \frac{b^2}{ar}\mu_1$, $\mu_1 = \frac{1}{2}(1-e^{2\sigma})$, $m_2 = \frac{b^2}{ar} \cdot \frac{1}{a}\mu_2$, $\mu_2 = 1-e^\sigma - \frac{1}{2}(1-e^{2\sigma})$,
 $m_3 = \frac{b^2}{ar} \cdot \frac{1}{a^2}\mu_3$, $\mu_3 = -\sigma - 2(1-e^\sigma) + \frac{1}{2}(1-e^{2\sigma})$

Обозначим: $\alpha = aT$, $\beta_1 = \frac{b^2 f_1}{ar}$, $\beta_2 = \frac{b^2 f_2}{a^3 r}$.

После некоторых выкладок запишем искомое выражение для терминальной ошибки (6):

$$x(T) = \begin{bmatrix} \omega(T) \\ \theta(T) \end{bmatrix} = (M(0)F + E)^{-1}W(0)x_0 = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} v_1 & av_2 \\ a^{-1}v_3 & v_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & ak_2 \\ a^{-1}k_3 & k_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix},$$

или для масштабированной ошибки:

$$x'(T) = \begin{bmatrix} \frac{1}{a}\omega(T) \\ \theta(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{a}\omega_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix}.$$

Здесь:

$$d = [\beta_1\beta_2(\mu_1\mu_3 - \mu_2^2) + \beta_1\mu_1 + \beta_2\mu_3 + 1]_{t=T} = \beta_1\beta_2 \left[\frac{\alpha}{2}(1-e^{-2\alpha}) - (1-e^{-\alpha})^2 \right] + \beta_1 \frac{1}{2}(1-e^{-2\alpha}) +$$

$$+ \beta_2 \left[\alpha - 2(1-e^{-\alpha}) + \frac{1}{2}(1-e^{-2\alpha}) \right] + 1,$$

$$v_1 = \beta_2 \left[\alpha \cdot e^{-\alpha} - \frac{1}{2} (1 - e^{-2\alpha}) \right] + e^{-\alpha}, v_2 = \beta_2 \left[\frac{1}{2} (1 - e^{-2\alpha}) - (1 - e^{-\alpha}) \right],$$

$$v_3 = \beta_1 \frac{1}{2} (1 - e^{-\alpha})^2 + (1 - e^{-\alpha}), v_4 = \beta_1 \frac{1}{2} (1 - e^{-2\alpha}) + 1,$$

$$k_1 = v_1 / d, k_2 = v_2 / d, k_3 = v_3 / d, k_4 = v_4 / d.$$

То же можно записать в скалярной форме:

$$\frac{\omega(T)}{a} = k_1 \frac{\omega_0}{a} + k_2 \theta_0, \quad \theta(T) = k_3 \frac{\omega_0}{a} + k_4 \theta_0. \quad (7)$$

При этом для $0 \leq t < T$ получаем:

$$\left[\mu_1 \mu_3 - \mu_2^2 \right]_{t=T} = \frac{\alpha}{2} (1 - e^{-2\alpha}) - (1 - e^{-\alpha})^2 > 0, \quad \mu_1(T) = \frac{1}{2} (1 - e^{-2\alpha}) > 0,$$

$$\mu_3(T) = \alpha - 2(1 - e^{-\beta}) + \frac{1}{2} (1 - e^{-2\alpha}) > 0, \quad d > 0.$$

Коэффициенты ошибки k_i ($i = \overline{1, 4}$) в (7) характеризуют степень уменьшения начальных отклонений объекта от заданного конечного значения в результате управления: они показывают, какую долю от начальных значений составляют эти отклонения.

Из представленных выражений видно, что при достаточно большой величине штрафных коэффициентов f_1 и f_2 терминальная ошибка может быть сделана сколь угодно малой:

$\omega(T) \rightarrow 0$ при $f_1 \rightarrow \infty$, или, что эквивалентно, $[k_1, k_2] \rightarrow 0$ при $\beta_1 \rightarrow \infty$;

$\theta(T) \rightarrow 0$ при $f_2 \rightarrow \infty$, или $[k_3, k_4] \rightarrow 0$ при $\beta_2 \rightarrow \infty$;

$x(T) \rightarrow 0$ при $[f_1, f_2] \rightarrow \infty$, или $[k_1, k_2, k_3, k_4] \rightarrow 0$ при $[\beta_1, \beta_2] \rightarrow \infty$.

Зависимость коэффициентов k_i ($i = \overline{1, 4}$) от β_2 при $\beta_1 \equiv \beta_2 / 2$ и $\alpha = 2$ показана на рисунке 1.

Из графиков видно, что при $\beta_2 \geq 20$, $\beta_1 \geq 10$ терминальная ошибка становится на порядок меньше начального отклонения состояния объекта от заданного.

Зависимость k_i ($i = \overline{1, 4}$) от α при $\beta_1 = \beta_2 = 1$ показана на рисунке 2.

Из нее видно, что ошибка неограниченно убывает, для устойчивого объекта ($a > 0$), при бесконечном увеличении времени управления T независимо от значений коэффициентов f_1 и f_2 : $x(T) \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$ (или $[k_1, k_2, k_3, k_4] \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow \infty$), $a > 0$.

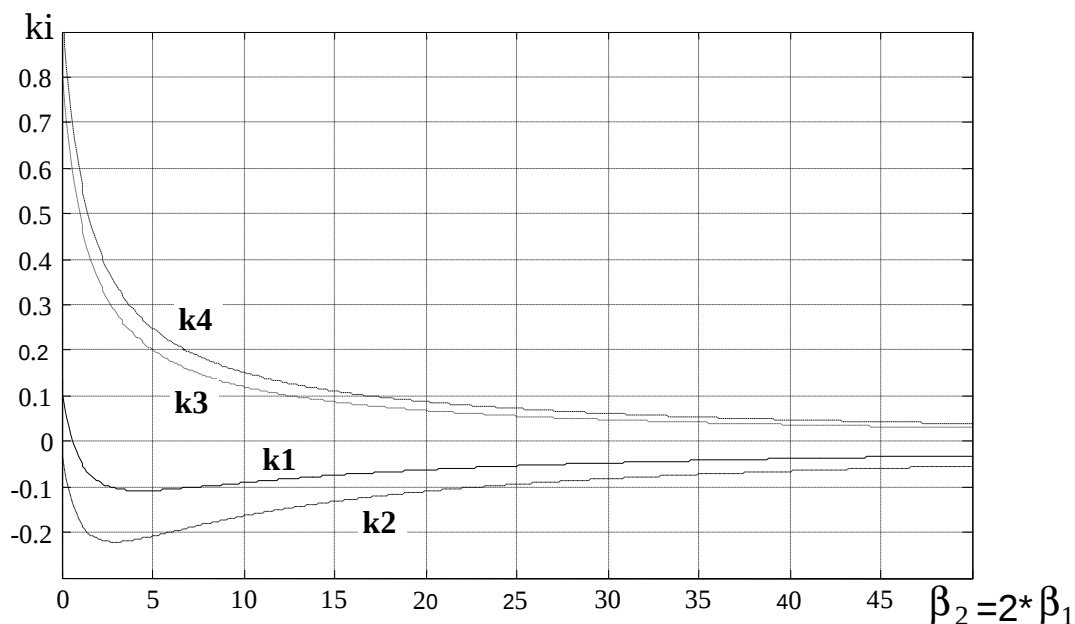


Рисунок 1 – Зависимость коэффициентов терминальной ошибки от β_2 при $\beta_1 \equiv \beta_2 / 2$ и $\alpha = 2$

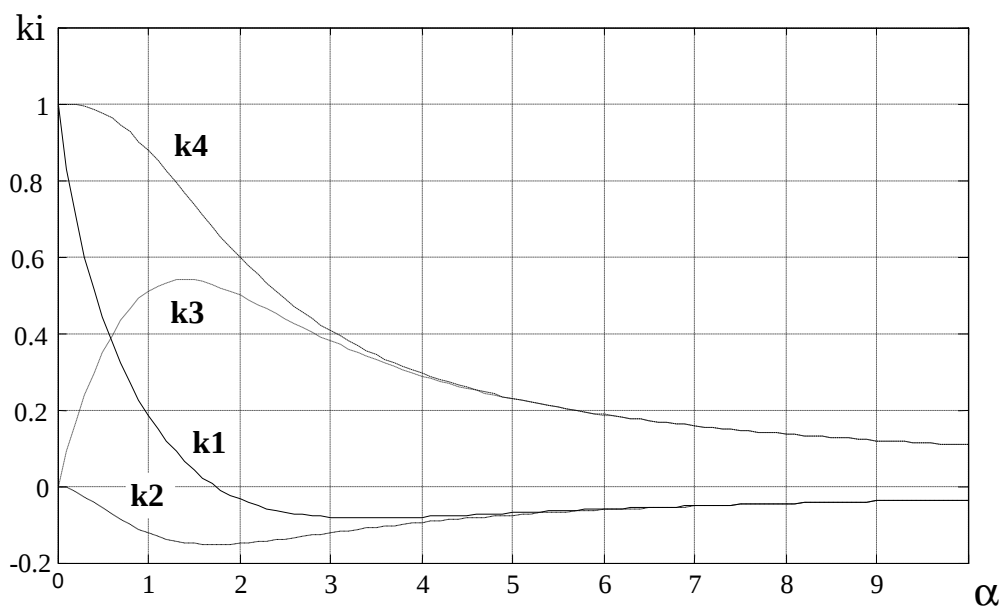


Рисунок 2 – Зависимость коэффициентов терминальной ошибки от α при $\beta_1 = \beta_2 = 2$

Подбирая значения α , β_1 и β_2 , можно добиться приемлемого значения терминальной ошибки и качества управления. Это позволяет осуществлять быстрый подбор параметров регулятора для обеспечения заданной точности управления при соблюдении инженерных ограничений на амплитуду управляющего воздействия.

Бibliографический список

1. Козырев В.Г. Терминальная ошибка почти точного оптимального приведения в ноль / В.Г. Козырев // Динамические системы. Межвед. науч. сб. — Симферополь, 2001. — Вып. 17. — С. 18 – 22.
2. Квасернак Х. Линейные оптимальные системы управления / Х. Квасернак, Р.Сиван. — М.: Мир, 1977. — 650 с.

Поступила в редакцию 30.03.2009 г.