

УДК:614.842.645

В.И. Мордашов, доцент, канд. техн. наук,**В.В. Севриков, профессор, д-р техн. наук,****А.И. Севриков***Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***ИССЛЕДОВАНИЕ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ
ЕЕ АРГУМЕНТОВ, КАК КРИТЕРИЯ ОПТИМИЗАЦИЯ СТРУКТУР
АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ ИНФОРМАЦИОННО – ЭРГАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Дано общее выражение критериальной целевой функции с ограничениями аргументов, имеющей локальные максимальные экстремумы для различных структур автоматизированных систем. Приведены методы оптимизации с помощью множителей Лагранжа, простейших дифференциальных уравнений в производных, экспериментально-аналитического метода с использованием статистических данных.

Ключевые слова: автоматизация, оптимизация, эффективность, система, структура.

Актуальность исследования

Многopараметрические критериальные функции с ограничениями их параметров широко применяются в виде целевых функций для оптимизации структур автоматизированных систем, в частности информационно-эргатических систем контроля и защиты наиболее опасных и специальных, например, взрывоопасных объектов в промышленности, объектов оборонного назначения, объектов окружающей природной среды и др. Аварии на таких объектах сопровождаются значительным экономическим ущербом, а нередко и ничем невозможными человеческими жертвами. Эффективность контроля и защиты объектов автоматизированными информационно-эргатическими системами различна и она зависит от уровня совершенности систем. В связи с этим очевидна необходимость оптимизации структур автоматизированных систем, что и определяет актуальность данного исследования.

Постановка исследования

Оптимизация структур должна производиться по показателям, характеризующим основные (обобщенные) свойства систем и объектов оснащенных ими. Таким свойством является эффективность. Под эффективностью информационно-эргатической системы следует понимать свойство системы выполнять заданные функции с требуемым (регламентированным) качеством при соответствующих ему затратах и предотвращенном ущербе. Общая эффективность автоматизированной системы включает в себя три ее составляющие: техническую, эргономическую и экономическую.

Для количественной оценки составляющих эффективности используются обобщенные показатели по основным свойствам. Для технической составляющей это может быть надежность в виде показателя вероятности безотказной работы технической части системы. Для эргономической составляющей – надежность человека-оператора в виде показателя вероятности безотказной работы человека в эргатической системе. Для экономической составляющей – показатель экономической эффективности, представляющий собой частную функцию затрат на технические средства и предотвращенного ущерба с учетом стоимости защищаемого объекта.

Для оптимизации структур эргатических систем, т.е. систем, включающих в себя техническую часть и действия человека-оператора, предложена в [1] целевая функция вида

$$\mathfrak{J} = \frac{P \cdot \Delta U}{K + \mathfrak{Z}_\mathfrak{O} \cdot T} \rightarrow \max, \quad (1)$$

где, P – результирующая надежность системы с учетом вероятности безотказной работы ее технической части P_T и человека-оператора $P_\mathfrak{O}$ (для независимых случайных событий по теории произведения

вероятностей $P = \prod_{i=1}^N P_T \cdot P_\mathfrak{O}$); ΔU – предотвращенный экономический ущерб в результате действия

системы при наступлении опасного события ($\Delta U = U_\mathfrak{O} - U_\mathfrak{H}$; здесь $U_\mathfrak{O}$ – возможный ущерб в случае отсутствия системы защиты и $U_\mathfrak{H}$ – непредотвращенный ущерб при действии на объекте системы защиты); K – капитальные затраты на создание и изготовление системы; $\mathfrak{Z}_\mathfrak{O}$ – годовые приведенные эксплуатационные затраты при ее обслуживании и эксплуатации; T – период эксплуатации системы (нормативный срок службы).

Общие затраты на создание и эксплуатацию системы $Z = K + Z_{\text{э}} \cdot T$, а экономическая эффективность может быть представлена в виде относительного показателя $\mathcal{E}_{OT} = \Delta V / (K + Z_{\text{э}} \cdot T)$ или в виде абсолютного экономического эффекта $\mathcal{E}_{ao} = \Delta V - Z$.

В выражении (1) не учитывается вероятность возникновения опасного события, как это нередко принимается в других критериальных показателях, например, автоматической пожарной защите. Оценку надежности эргатических систем по вероятностным показателям для объектов повышенной опасности разумно производить по ужесточенным условиям, а поэтому следует полагать, что опасность рано или поздно возникнет, иначе, зачем эти объекты оснащать автоматическими средствами защиты. Если же принимается к учету вероятность возникновения опасного события малой по величине за период существования объекта или срока службы системы, то величина предотвращенного ущерба оказывается незначительной, что вызывает ложное решение о нецелесообразности применения автоматической защиты или применения менее дорогостоящей системы, а следовательно, и менее надежной. При этом авария дорогостоящего объекта сопровождается большим ущербом. Из соображения ужесточения условий экономической оценки защиты объекта эргатической системой эксплуатационные затраты следует рассчитывать на весь нормативный срок.

Целью данной работы является поиск путей оптимизации данной целевой функции.

С учетом отмеченного, многокритериальная функция (1) может быть преобразована к двухпараметрическому виду

$$\mathcal{Z} = f(P, \mathcal{E}) \rightarrow \max. \quad (2)$$

Оптимизация методом множителей Лагранжа

Оптимизация функции (2) при математической абстракции экстремума может быть выполнена с использованием метода множителей Лагранжа [2]. Для этого переобозначим $\mathcal{Z} = y$, $P = x_1$, $\mathcal{E} = x_2$ и положим целевую функцию

$$y = x_1 \cdot x_2 \rightarrow \max. \quad (3)$$

Аргументы функции (2), исходя из нормативных требований и технико-экономической целесообразности, должны быть ограничены значениями: $0,5 \leq P \leq 1$; $1 \leq \mathcal{E} \leq N$, где N – большое целое положительное число.

Проблема отыскания условного экстремума скалярной функции многих переменных (именно такая задана критериальная функция) была изучена в теоретическом плане еще Лагранжем, предложившем так называемый метод множителей для задач с ограничениями-равенствами.

Ограничения аргументов функции (3) представляются в виде равенства

$$q(x_1, x_2) = b, \quad (4)$$

где b – вещественное число.

Рассматриваемые $f(x_1, x_2)$ и $q(x_1, x_2)$ непрерывно дифференцируемы и свойства $q(x_1, x_2)$ таковы, что из равенства (4) следует $x_2 = \varphi(x_1)$, т.е. x_2 выражается в явном виде через x_1 . Требуется получить необходимые условия, которым должна удовлетворять точка локального экстремума y . Подставляя x_2 как функцию $x_2 = \varphi(x_1)$ в (3), (4), приходим к равенству

$$y = f[x_1, \varphi(x_1)] = h(x_1). \quad (5)$$

Ограничение $q(x_1, x_2) = b$ говорит о том, что из всех точек плоскости x_1, x_2 интерес представляют лишь те, которые лежат на линии, определяемой уравнением $x_2 = \varphi(x_1)$, как показано на рисунке 1.

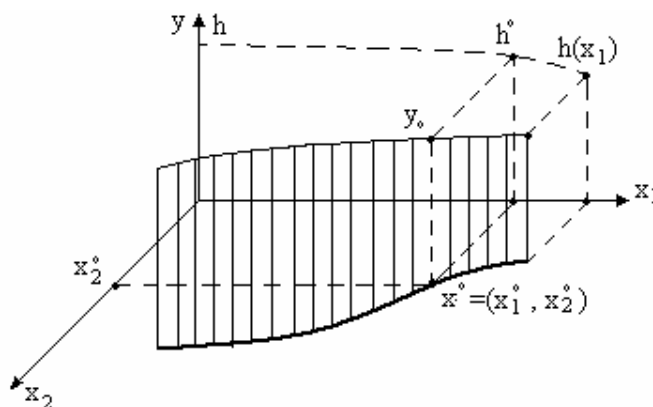


Рисунок 1 – Графическая схема оптимизации функции $y = f(x_1, x_2)$

Если в какой либо из этих точек y (5) достигает экстремума h° , то он не является условным, так как сам способ построения функции $h(x_1)$ предусматривает учет исходного ограничения и никаких дополнительных требований к x_1 предъявлять не нужно. Следовательно, экстремальная точка x_1° (первая координата точки x°) находится из уравнения $\left[\frac{dh}{dx_1} \right]_{x_1^\circ} = 0$.

Учитывая, что

$$h(x_1) = f(x_1, \varphi); \quad \frac{dh}{dx_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx_1}; \quad \frac{d\varphi}{dx_1} = -\frac{\partial q / \partial x_1}{\partial q / \partial x_2},$$

получаем

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial q / \partial x_1}{\partial q / \partial x_2} \right]_{x^\circ} = 0. \quad (6)$$

Обозначив $\frac{\partial f / \partial x_2}{\partial q / \partial x_2}$ через λ и предположив, что $\frac{\partial q}{\partial x_2} \neq 0$, приводим равенство (6) к виду

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial q}{\partial x_1} = 0. \quad (7)$$

Следуя аналогии (7) и определению λ , имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial q}{\partial x_2} = 0. \quad (8)$$

Тогда необходимые условия существования экстремума выражения (8) следующие:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial q}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial q}{\partial x_2} = 0 \\ q(x_1, x_2) - b = 0 \end{cases}. \quad (9)$$

Совместное решение уравнений (9) относительно x_1, x_2, λ позволяет найти все точки, в которых ожидается локальный экстремум функции y . Систему (9) можно получить более кратким и чисто формальным путем. Для этого достаточно составить (по данным исходной задачи) выражение с последующим представлением суммы

$$f(x_1, x_2) + \lambda [b - q(x_1, x_2)] = \Phi(x_1, x_2, \lambda), \quad (10)$$

а затем приравнять к нулю производные

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}, \quad (11)$$

считая x_1, x_2, λ независимыми переменными.

Функция $\Phi(x_1, x_2, \lambda)$ называется функцией Лагранжа, а множитель λ – множителем Лагранжа. Суть метода множителей заключается именно в отыскании решений системы (9) с последующей проверкой достаточных условий экстремума во всех найденных точках x° , сравнении полученных результатов и выборке наилучшего из них, чем и определяются глобальные x^*, y^* .

Существует обобщение рассмотренных условий (9) на случай произвольного числа переменных n и ограничений-равенств m при $m < n$. В этом случае функция Лагранжа записывается как

$$\Phi(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i [b - q_i(x)]. \quad (12)$$

Следовательно, x и λ обозначены векторами $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$. При этом необходимые условия экстремума выражения (12) имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi(x, \lambda)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial q_i(x)}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial \Phi(x, \lambda)}{\partial \lambda_i} = b_i - q_i(x) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

В последнем случае для отыскания точек x^* приходится решать систему $m+n$ уравнений (13), причем необязательно требовать, чтобы каждое ее решение составляло условный экстремум y . Но каждая точка, в которой такой экстремум достигается, должна отвечать условиям (13).

Преимущество рассматриваемого метода состоит в том, что можно не учитывать взаимную зависимость переменных (задача условной оптимизации сводится к задаче безусловной оптимизации).

Для решения практических задач как, например, задач оптимизации структур автоматизированных информационно-энергетических систем, такой прием осуществить крайне сложно ввиду громоздкости выражений и отсутствия статистических массивов данных для разнообразных реальных условий, которые к настоящему времени, очевидно, не оцениваются. Однако данное направление решения оптимизационных задач имеет несомненный теоретический интерес и открывает необходимость дальнейшего поиска практической оптимизации их с помощью упрощенных методов как, например, альтернативы глобальному экстремуму критериальной функции, наибольшее значение ее функционала в области ограничения аргументов и др.

Оптимизация методом простейших дифференциальных уравнений в производных

Целевую функцию (1) представим в виде однородного дифференциального уравнения первой степени из условия задачи, включающего приближенное соотношение аргументов. Используем для описания прироста скорости функции I во времени τ известное дифференциальное уравнение в производных вида

$$\frac{dI}{d\tau} = vI, \quad (14)$$

где v – параметр (коэффициент) пропорциональности и размерности.

Для упрощения записи, обозначив $P \frac{\Delta Y}{K + 3_{\text{э}}T} = A$, как независимые во времени, разделяя переменные и интегрируя выражение (14), имеем

$$\int \frac{dI}{I} = vA \int d\tau; \quad \ln I = vA\tau + c, \quad (15)$$

где c – постоянная интегрирования.

Потенцируя (15), получаем

$$I = e^{vA\tau + c} = c \cdot e^{vA\tau}. \quad (16)$$

Подставляя в (16) вместо A ее выражение, имеем

$$I = c \cdot e^{vP \frac{\Delta Y}{K + 3_{\text{э}}T} \tau}. \quad (17)$$

Величину e^c , характеризующую начальное значение функции Y на нижней границе области ее оптимизации при заданных ограничениях аргументов (3) $x_1 = P = 0,5$ и $x_2 = \frac{\Delta Y}{K + 3_{\text{э}}T} = 1$, и принятых $\tau = 0$ $v = 0$, как начальные условия области оптимизации, $c = I = 0,5 \cdot 1 = 0,5$.

С учетом отмеченного выражение (17) критериальной целевой функции оптимизации структур информационно-энергетических систем принимает вид

$$I = 0,5 \cdot e^{vP \frac{\Delta Y}{K + 3_{\text{э}}T} \tau} \rightarrow \max. \quad (18)$$

Поведение (тренд) функции в области оптимизации, т.е. в нижней и верхней ее границах, определяется показателем v , значение которого можно получить опытным путем при анализе статистических данных и заданных ограничениях лимитированных (нормированных) параметров выражения (18), что следует из ниже приведенных рассуждений.

Оптимизация экспериментально-аналитическим методом

Рассматривая задачу параметрической оптимизации структур автоматизированных информационно-эргатических систем по критериально-целевой функции с ограничениями ее параметров, для преодоления затруднений практической оптимизации можно принять альтернативу экстремуму функции наибольшее значение ее функционала в области ограничения аргументов, обусловленных физическим смыслом сокращенных выборок структур, нормативными требованиями и финансовыми возможностями.

Принимая целевую функцию вида (1), и переобозначая $P=x_1$, $\mathfrak{E} = x_2 = \frac{\Delta Y}{K + 3_{\mathfrak{E}}T}$, запишем ее в виде

$$I = x_1 \cdot x_2 \rightarrow \max \quad (19)$$

с отмеченными выше ограничениями.

Обоснуем эти ограничения, исходя из практической целесообразности. Значение $x_1 \geq 0,5$ принимается по социально-экономическим соображениям, так как информационно-эргатические системы контроля и защиты объектов повышенной опасности и важности с вероятностью безотказной работы менее 50% не обладают преимущественным доверием достижения конечной цели. Значение $x_1 \leq 1$ – предельный уровень надежности защиты объекта. При $x_2 \geq 1$ создаются условия экономической целесообразности применения информационно-эргатической системы. Если $x_2 \leq 1$, то затраты на создание и обслуживание системы защиты объекта будут выше предотвращенного ущерба, что лишает смысла применение такой системы. Условие $x_2 = \mathfrak{E}$ характеризует запрограммированное совершенство системы при наличии необходимых средств.

Аргументы целевой функции x_1 и x_2 между собой коррелированы. Это и ограничения аргументов определяют область оптимизации, в которой прослеживается тренд значений функционала целевой функции.

Областью определения наибольшего значения $\mathfrak{Z}_{\max}$ для исследуемых систем является прямоугольник, показанный на рисунке 2.

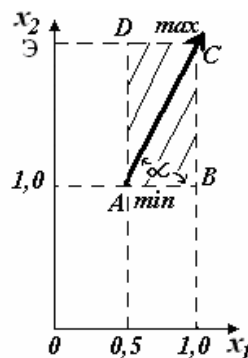


Рисунок 2 – Схема области аргументов целевой функции $I = x_1 \cdot x_2$ с ограничениями

Оптимизируя функцию (19) при математической абстракции, условия экстремума имеют вид:

$$\frac{\partial I}{\partial x_1} = x_2 = 0; \quad \frac{\partial I}{\partial x_2} = x_1 = 0.$$

Это соответствует началу координат, которое в область ограничения не попадает. Поэтому необходимо рассматривать границу $ABCD$:

на AB $0,5 \leq x_1 \leq 1$; $x_2 = 1$, поэтому $I_{\max} = x_1 \cdot x_2 = 1$; $I_{\min} = x_1 \cdot x_2 = 0,5$;

на BC $x_2 = 1$, $1 \leq x_2 \leq \mathfrak{E}$, поэтому $I_{\max} = \mathfrak{E}$; $I_{\min} = 1$;

на CD $0,5 \leq x_1 \leq 1$, $x_2 = \mathfrak{E} = D$, поэтому $I_{\max} = \mathfrak{E}$; $I_{\min} = \mathfrak{E}/2$;

на DA $x_1 = 0,5$, $1 \leq x_2 \leq \mathfrak{E} = D$, поэтому $I_{\max} = D/2$; $I_{\min} = 0,5$.

На нижней и верхней границах области ограничения: $I_{\min} = 0,5$ в точке A , а $A=P$; $I_{\max} = \mathfrak{E} < P$ в точке C , а $C = \mathfrak{E} = \frac{\Delta Y}{3} < P$.

Очевидно, что приближение значения целевой функции к максимуму должно происходить по тренду области ограничения, т.е. диагонали прямоугольника

$$(x_2 - 1) = \operatorname{tg} \alpha (x_1 - 0,5). \quad (20)$$

Из (20) находим тангенс угла α , который характеризует коэффициент пропорциональности выражения (14). Переходя к первоначальным обозначениям, получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha = v = \frac{\frac{\Delta Y}{3} - 1}{P - 0,5}.$$

Для практической параметрической оптимизации структур автоматизированных информационно-энергетических систем по целевой функции с ограничениями аргументов методом дифференциальных уравнений и экспериментально-аналитическим методом необходим набор статистических данных по конкретным объектам и системам.

Выводы

1. Показана возможность теоретической оптимизации структур автоматизированных энергетических систем по многокритериальной функции с ограничениями ее аргументов методом множителей Лагранжа.

2. Выявлено затруднение практического решения оптимизационных задач с использованием многопараметрической целевой функции и необходимостью ограничений ее аргументов в результате громоздкости теоретических выражений и отсутствия в настоящее время необходимых статистических объемов данных для различных реальных условий.

3. Показана возможность практической оптимизации структур автоматизированных информационно-энергетических систем методом простейших дифференциальных уравнений с определением показателя пропорциональности прироста скорости критериальной целевой функции опытным путем по статистическим данным.

4. Преодоление затруднения в практическом решении оптимизационных задач для реальных условий может быть достигнуто одним из возможных путей – альтернативы глобальному экстремуму критериальной функции наибольшее значение ее функционала на границах области ограничения аргументов с использованием массивов статистических данных.

Задачами дальнейших исследований являются сбор и анализ статистических данных, их метрологическая обработка в качестве параметров целевой функции оптимизации структур информационно-энергетических систем и разработка сопутствующего программного обеспечения.

Библиографический список

1. Севриков И.В. Экономическая составляющая критерия эффективности вариантов систем защиты объектов повышенной опасности / И.В. Севриков, Л.В. Квасова // Вестн. СевГТУ. Сер. Механика, энергетика, экология: сб. науч. тр. — Севастополь, 2006. — Вып. 75. — С. 118 – 122.
2. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ / Т. Шуп. — М.: Мир, 1982. — 235 с.

Поступила в редакцию 16.11.2009 г.