

УДК 539

А.И. Бохонский, профессор, д-р техн. наук,**А.К. Васильченко, доцент, канд. техн. наук***Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО
ПЕРЕНОСНОГО ДВИЖЕНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ**

На примере систем с одной и двумя степенями свободы без учета и с учетом линейно-вязкого сопротивления исследовано динамическое поведение упругих объектов (колебания в относительном движении) при оптимальном переносном движении. Показано, что для построения структурных схем линейных многомерных систем в Simulink, описываемых системой линейных дифференциальных уравнений, может быть использован метод главных координат, хорошо известный в теории колебаний систем с произвольным числом степеней свободы.

Ключевые слова: механическая система, главная координата, переносное движение, структурная схема, визуальное моделирование.

Исследованию оптимальных управлений переносным движением упругих систем с произвольным числом степеней свободы посвящена работа [1], в которой использовался Simulink как инструмент визуального моделирования динамики переносного движения различных упруго-деформируемых объектов техники.

Реальные системы автоматического управления чаще всего многомерны и для их исследования необходимо строить структурные схемы, отражающие взаимосвязь регулируемых величин [2, 3].

В системах управления для графического представления структуры (например, для последующего анализа в Simulink) применяется сигнальный граф, отражающий структуру с многими входами и выходами и по существу являющийся моделью исходной системы.

В [3] рассмотрена методология применения сигнальных графов для моделирования многомерных многоконтурных систем. Однако, нельзя не отметить, что и до настоящего времени все еще остаются известные трудности моделирования сложных многомерных систем.

Целью данной статьи является исследование динамики оптимального переносного движения упругих систем в Simulink с проверкой эффективности применения в процессе моделирования известного в теории колебаний линейных систем метода главных координат.

Разложение движения системы с конечным числом степеней свободы по формам собственных колебаний позволяет путем введения новых (главных) координат независимо решать отдельные уравнения по каждой главной координате, а затем переходить к исходным координатам. Метод главных координат используется после составления дифференциальных уравнений в физических обобщенных координатах, вычисления частот свободных колебаний и коэффициентов, определяющих моды колебаний.

Уравнения в главных координатах записываются так:

$$\frac{d^2 q_k}{dt^2} + \omega_k^2 q_k = \frac{Q_k(t)}{M_k}, \quad (k=1, \dots, n),$$

где $Q_k(t) = \sum_{i=1}^n F_i(t) v_{ik}$, $M_k = \sum_{i=1}^n m_i v_{ik}^2$.

Физические координаты через главные определяются согласно зависимости $x_i(t) = \sum_{k=1}^n q_k(t) v_{ik}$.

Приняты обозначения: v_{ik} – амплитудное смещение i -й массы при k -й форме колебаний; $F_i(t)$ – внешнее воздействие; ω_k – частота собственных колебаний.

Алгоритм применения метода главных координат иллюстрируется на простом примере механической системы с двумя степенями свободы, схема которой изображена на рисунке 1.

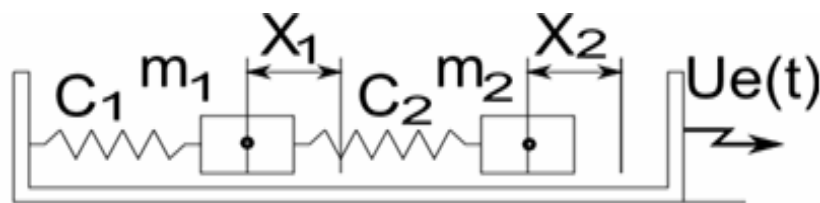


Рисунок 1 – Схема переносного движения с ускорением $U_e(t)$ системы двумя степенями свободы

Дифференциальные уравнения движения без учета сопротивления движению записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + (C_1 + C_2)x_1 - C_2 x_2 &= m_1 U_1(t), \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} - C_2 x_1 + C_2 x_2 &= m_2 U_2(t). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь m_1 и m_2 – сосредоточенные массы; C_1, C_2 – коэффициенты жесткости; x_1, x_2 – координаты; $U_1 = U_2 = U_e$ – ускорение переносного движения.

Из (1) без учета правых частей после подстановки частных решений $x_1 = A_1 \sin \omega t$ и $x_2 = A_2 \sin \omega t$ и преобразований следует однородная система алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (C_1 + C_2 - m_1 \omega^2) A_1 - C_2 A_2 = 0, \\ -C_2 A_1 + (C_2 - m_2 \omega^2) A_2 = 0, \end{cases} \quad (2)$$

у которой при $A_1 \neq 0$ и $A_2 \neq 0$ определитель равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} C_1 + C_2 - m_1 \omega^2 & -C_2 \\ -C_2 & C_2 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Из (3) находятся частоты свободных колебаний (ω_1 и ω_2). Соотношение между амплитудами колебаний из первого уравнения системы (2) принимает вид:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{C_1 + C_2 - m_1 \omega^2}{C_2}.$$

В соответствии с идеей метода главных координат амплитудные смещения v_{ik} i -й массы, где k – номер формы колебаний, вычисляется так:

$$\begin{aligned} v_{11} &= 1; & v_{12} &= 1; \\ v_{21} &= \frac{C_1 + C_2 - m_1 \omega_1^2}{C_2}; & v_{22} &= \frac{C_1 + C_2 - m_1 \omega_2^2}{C_2}. \end{aligned}$$

Физические координаты $x_1(t)$ и $x_2(t)$ через вводимые главные [4] координаты $q_1(t)$ и $q_2(t)$ выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= v_{11} q_1(t) + v_{12} q_2(t), \\ x_2(t) &= v_{21} q_1(t) + v_{22} q_2(t). \end{aligned}$$

Уравнения в главных координатах записываются в виде

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \omega_1^2 q_1 = \frac{Q_1(t)}{M_1}, \quad \frac{d^2 q_2}{dt^2} + \omega_2^2 q_2 = \frac{Q_2(t)}{M_2},$$

где обобщенные силы $Q_1(t) = m_1 U_1 v_{11} + m_2 U_2 v_{21}$, $Q_2(t) = m_1 U_1 v_{12} + m_2 U_2 v_{22}$. Обобщенные массы соответственно:

$$M_1 = m_1 v_{11}^2 + m_2 v_{21}^2, \quad M_2 = m_1 v_{12}^2 + m_2 v_{22}^2.$$

Пример 1. Построение структурной схемы [5], основанной на методе главных координат (рисунок 2).

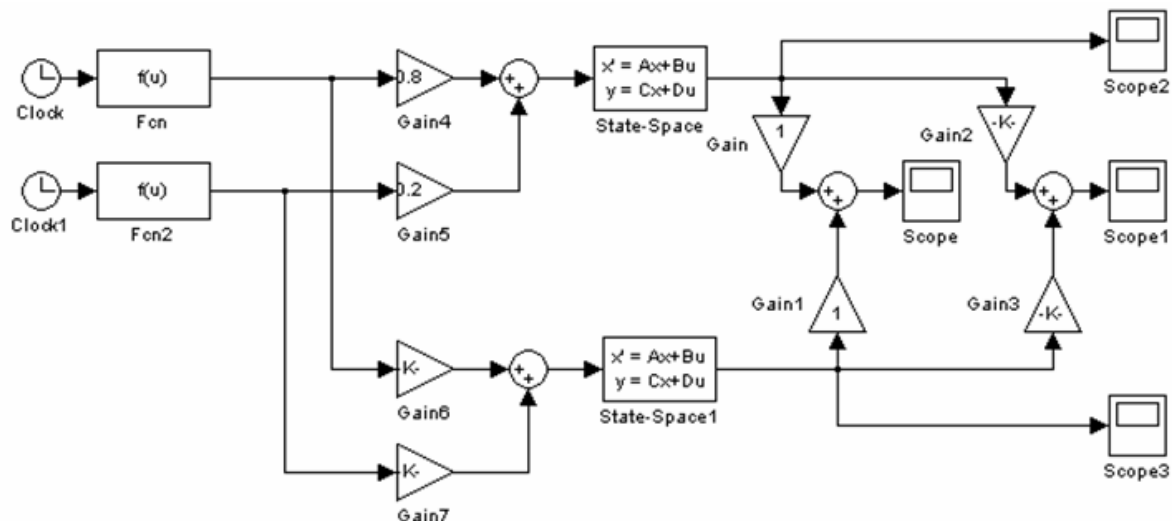


Рисунок 2 – Структурная схема, построенная с использованием метода главных координат

По структурной схеме теперь легко построить матрицу передаточных функций, связывающих входы и выходы. Матрица передаточных функций для данной системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) \end{pmatrix},$$

где $W_{11}(s) = \frac{k_1}{s^2 + \omega_1^2}$, $W_{12}(s) = \frac{k_2}{s^2 + \omega_1^2}$, $W_{21}(s) = \frac{k_3}{s^2 + \omega_2^2}$, $W_{22}(s) = \frac{k_4}{s^2 + \omega_2^2}$; $k_1 = \frac{v_{11}^2}{M_1}$, $k_2 = \frac{v_{12}^2}{M_1}$, $k_3 = \frac{v_{21}^2}{M_2}$, $k_4 = \frac{v_{22}^2}{M_2}$.

Исходные данные для системы: $m_1 = 40 \text{ кг}$; $m_2 = 10 \text{ кг}$; $C_1 = 2000 \text{ Н/м}$; $C_2 = 1000 \text{ Н/м}$. Для переносного движения всей системы: $L = 1 \text{ м}$; $p = \omega_1/2 \text{ с}^{-1}$. Принято оптимальное [1] ускорение переносного движения всей системы: $U_e = -\frac{Lp^2}{2\pi} \sin(pt) = -1,4308 \sin(2,9984t)$.

Вычисленные величины. Частоты собственных колебаний: $\omega_1 = 5,9968 \text{ с}^{-1}$; $\omega_2 = 11,7915 \text{ с}^{-1}$. Им соответствуют периоды колебаний: $T_1 = 1,0478 \text{ с}$; $T_2 = 0,5329 \text{ с}$. Коэффициенты форм колебаний: $v_{21} = 1,516$; $v_{22} = -2,5616$. Обобщенные массы: $M_1 = 50 \text{ кг}$; $M_2 = 105,615 \text{ кг}$.

Дифференциальные уравнения в главных координатах для принятых исходных данных записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 q_1}{dt^2} + 35,9612 q_1 &= -1,4308 \sin(2,9984t), \\ \frac{d^2 q_2}{dt^2} + 139,0388 q_2 &= -0,4992 \sin(2,9984t). \end{aligned}$$

На рисунке 3 изображены графики перемещения и скорости сосредоточенной массы m_1 (в относительном движении). За время $T = 2T_1$, которое соответствует двум периодам первого тона колебаний, с учетом отключения U_e в момент времени T наблюдается абсолютный покой сосредоточенной массы. Структурная схема, построенная в Simulink (изображена на рисунке 2), позволяет не только исследовать поведение системы в исходных физических координатах, но и анализировать зависимости вида $q_1(t)$, $\frac{dq_1(t)}{dt}$ и $q_2(t)$, $\frac{dq_2(t)}{dt}$.

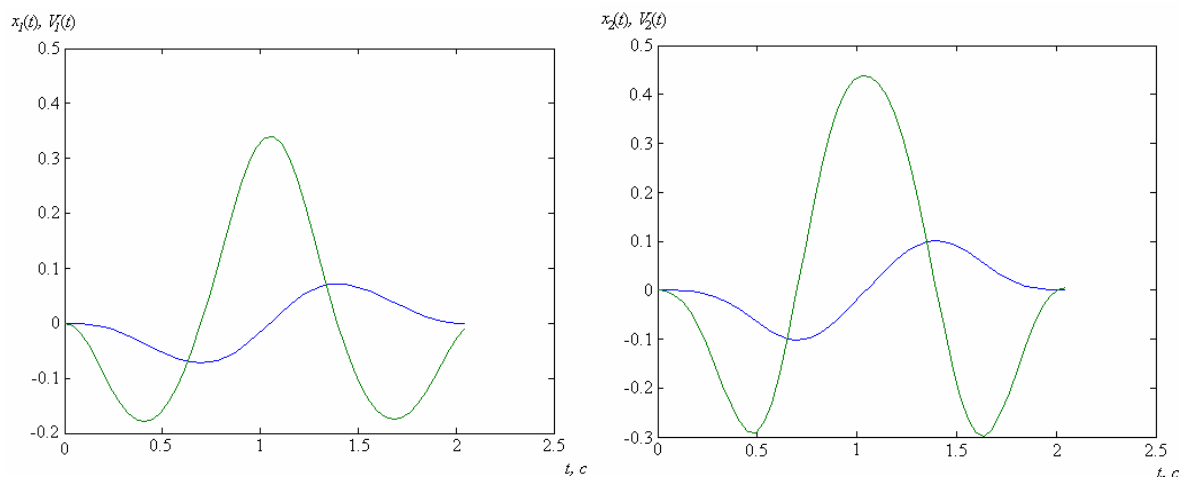


Рисунок 3 – Перемещения и скорости сосредоточенных масс

Пример 2. С целью численной проверки корректности использования метода главных координат выполнено непосредственное численное интегрирование исходной системы дифференциальных уравнений (1), которая для численных данных записана в форме Коши:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} &= -75y_1 + 25y_3 - 1,4308 \sin(2,9984t), \\ \frac{dy_3}{dt} &= y_4, \\ \frac{dy_4}{dt} &= 100y_1 - 100y_3 - 1,4308 \sin(2,9984t),\end{aligned}$$

где $y_1 \equiv x_1$, $y_2 \equiv \frac{dx_1}{dt}$, $y_3 \equiv x_2$, $y_4 \equiv \frac{dx_2}{dt}$. Как и следовало ожидать, при нулевых начальных условиях в результате численного интегрирования графики перемещений сосредоточенных масс $x_1(t)$ и $x_2(t)$ практически совпадают с предыдущими вычислениями.

Пример 3. Учет линейно-вязкого сопротивления в [1] при оптимальном перемещении упругой системы с одной степенью свободы.

Без учета сопротивления в [1] детально изучено оптимальное переносное движение упругого осциллятора, уравнение движения которого

$$\frac{d^2 x_r}{dt^2} + \omega^2 x_r = -U_e(t), \quad (4)$$

где для переносного ускорения использовалась зависимость

$$U_e(t) = \frac{Lp^2}{2\pi} \sin pt. \quad (5)$$

В самом простом случае $p = \frac{\omega}{n}$, где $n=2$. С учетом линейно вязкого сопротивления уравнение движения осциллятора запишется как

$$\frac{d^2 x_r}{dt^2} + 2n_* \frac{dx_r}{dt} + \omega^2 x_r = -U_e^*(t), \quad (6)$$

где n_* – коэффициент затухания; $U_e^*(t)$ – подлежащее определению ускорение в переносном движении, которое должно обеспечить абсолютный покой системы в момент $t = T$.

Управление $U_e^*(t)$ найдено из условия, что движение системы с линейно-вязким сопротивлением должно происходить так же, как системы без сопротивления. Тогда, вычитая уравнение (4) из уравнения (6), получаем:

$$U_e^*(t) = U_e(t) - 2n_* \frac{dx_r}{dt}.$$

Самая простая структурная схема реализуется в Simulink. Дифференцирующее звено в обратной связи обеспечивает «подавление» сопротивления и система движется как идеальная (без сопротивления).

В системе с двумя степенями свободы без обратной связи при учете линейно-вязкого сопротивления и управления (5) не достигается абсолютного покоя сосредоточенных масс m_1 и m_2 в конечный момент времени.

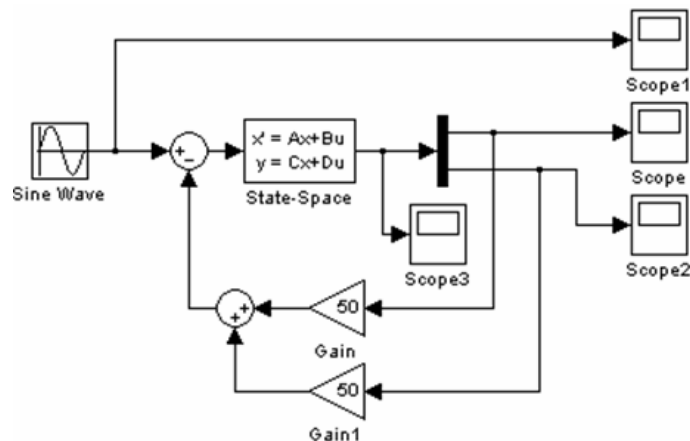


Рисунок 4 – Система с двумя степенями свободы при учете линейно-вязкого сопротивления

При использовании обратной связи (рисунок 4) по скорости не только достигается абсолютный покой в конце движения, но и существенно снижаются максимальные перемещения масс на временном интервале переносного движения системы. Обратная связь по скорости усиливает демпфирование колебаний, снижая их уровень на порядок и более.

Вывод

Метод главных координат облегчает построение структурных схем многомерных систем при их исследовании с использованием Simulink и упрощается построение матрицы передаточных функций таких систем.

Направление дальнейших исследований предполагает распространение метода главных координат на сложные управляемые механические системы, которыми являются, например, исполнительные органы манипуляторов минимальной массы.

Библиографический список

1. Бохонский А.И. Оптимальное управление переносным движением деформируемых объектов: теория и технические приложения / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская, М.И. Мозолевский. — Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2007. — 296 с.
2. Зайцев Г.Ф. Основы автоматического управления и регулирования / Г.Ф. Зайцев, В.И. Костюк, П.И. Чинаев. — К.: Техніка, 1975. — 496 с.
3. Дорф Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р.Бишоп: пер с англ. Б.И. Копылова. — М: Лаборатория базовых знаний, 2002. — 852 с.
4. Бидерман В.Л. Прикладная теория колебаний / В.Л. Бидерман. — М.: Высш. шк., 1972. — 416 с.
5. Черных И.В. Simulink: среда создания инженерных приложений / И.В. Черных. — М.: Диалог-МИФИ, 2003. — 496 с.

Поступила в редакцию 9.12.2009 г.