

УДК 519.873

А.И. Песчанский, доцент, канд. физ.-мат. наук*Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***ПОЛУМАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ КАЛЕНДАРНОГО ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ОДНОКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ МИНИМАЛЬНОГО АВАРИЙНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ**

Построена полумарковская модель и найдены стационарные характеристики функционирования простой системы с учетом минимального аварийного восстановления и периодически полным техническим обслуживанием.

Введение. Одним из методов улучшения стационарных показателей качества функционирования технических систем является их предупредительное техническое обслуживание (ТО). Обзор результатов по данной тематике содержится, например, в работах [1,2]. В частности, стратегия минимального аварийного восстановления с периодически полной заменой исследована в [1] в предположении, что время восстановления отказавшего элемента мгновенно. Такое допущение оправдано, если время восстановления значительно меньше времени безотказной работы системы. В противном случае время восстановления существенно влияет на стационарные характеристики и естественно исследовать функционирование системы в этом случае. Цель данной статьи – при указанной стратегии ТО и общих предположениях относительно времен безотказной работы и восстановления элементов системы определить стационарные надежностные и экономические показатели качества функционирования системы. Необходимо также установить оптимальные периодичности проведения ТО с целью достижения наилучших значений этих характеристик.

Постановка задачи и построение математической модели. Рассмотрим однокомпонентную систему. В нулевой момент времени система новая и время ее безотказной работы – случайная величина (СВ) α с функцией распределения (ФР) $F(t) = P(\alpha \leq t)$. Индикация отказа элемента осуществляется мгновенно и начинается его минимальное аварийное восстановление (МAB), которое длится случайное время β с ФР $G(t) = P(\beta \leq t)$. Минимальное восстановление системы, проработавшей к моменту отказа время s , означает, что восстановленная система имеет «остаточную наработку» α_s с ФР $F_s(t) = \frac{F(s+t) - F(s)}{1 - F(s)}$. Таким образом, минимальное восстановление делает элемент работоспособным,

но по его окончании интенсивность отказов $\lambda(t) = \frac{f(t)}{F(t)}$ такая же, как непосредственно перед отказом.

Влияние МAB на степень износа системы, тем самым, пренебрежительно мало. После второго минимального восстановления «остаточная наработка» элемента имеет ФР $F_s(t)$, где s – суммарная наработка элемента после начала его эксплуатации и т.д. Кроме МAB в системе предусмотрено проведение предупредительного ТО, которое планируется проводить через заранее заданный интервал времени τ после начала эксплуатации системы независимо от ее состояния. Время проведения ТО – СВ β^p с ФР $G^p(t) = P(\beta^p \leq t)$. После ТО все надежностные характеристики элементов полностью обновляются: так, наработка на отказ – СВ α и процесс функционирования системы повторяется. Временная диаграмма функционирования системы изображена на рисунке 1.

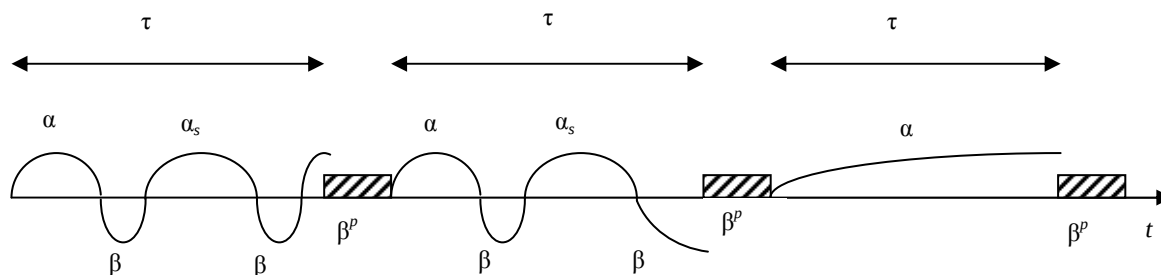


Рисунок 1 – Временная диаграмма функционирования системы

Отключение и включение элементов в систему происходит мгновенно. Предполагается, что СВ α, β, β^p – независимы, имеют абсолютно непрерывные ФР и конечные математические ожидания $M\alpha, M\beta, M\beta^p$.

Доход за единицу времени исправного функционирования, плата за единицу времени аварийного восстановления и плата за единицу времени ТО системы соответственно равны c^0, c и c^p .

Требуется определить следующие показатели качества функционирования системы: стационарный коэффициент технического использования $K_u(\tau)$, среднюю удельную прибыль $S(\tau)$, приходящуюся на единицу календарного времени и средние удельные затраты $C(\tau)$, приходящиеся на единицу времени исправного функционирования системы. Необходимо также определить промежутки времени τ между окончанием предыдущего и началом последующего ТО элемента, для которых указанные показатели качества функционирования системы имели бы оптимальные значения.

Построение математической модели и нахождение стационарных характеристик. Функционирование системы опишем полумарковским процессом (ПМП) $\xi(t)$ с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний [3,4]. Система может находиться в трех физических состояниях: работоспособном, в состоянии МАВ и в состоянии ТО. Введем следующее множество полумарковских состояний системы:

$$E = \{1, 2, 0s, 0us, 1us\},$$

1 – система возобновила работу после ТО; 2 – в системе началось ТО; 0s – произошел первый отказ через время s после последнего ТО; 0us – произошел аварийный отказ; после последнего ТО прошло время u , наработка за это время равна s ; 1us – возобновление работы после МАВ; после ТО прошло время u , наработка при этом равна s .

Граф переходов системы изображен на рисунке 2.

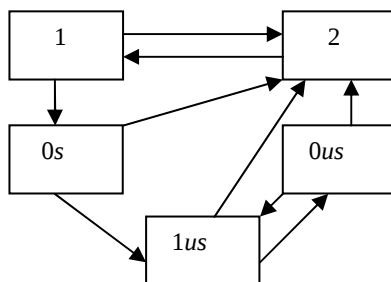


Рисунок 2 – Граф переходов системы

Запишем вероятности и плотности вероятностей переходов вложенной цепи Маркова (ВЦМ) $\{\xi_n, n \geq 0\}$ ПМП $\xi(t)$, описывающего функционирование системы:

$$P_2^1 = 1; \quad P_1^{0s} = f(s), \quad 0 < s < \tau; \quad P_1^2 = \bar{F}(\tau); \quad P_{0s}^2 = \bar{G}(\tau - s), \quad 0 < s < \tau;$$

$$P_{0s}^{1us} = g(u - s), \quad 0 < s < u < \tau; \quad P_{1us}^2 = \frac{\bar{F}(s + \tau - u)}{\bar{F}(s)}, \quad 0 < s < u < \tau;$$

$$P_{1us}^{0v(s+v-u)} = \frac{f(s+v-u)}{\bar{F}(s)}, \quad 0 < s < u < v < \tau; \quad P_{0us}^2 = \bar{G}(\tau - u); \quad P_{0us}^{1vs} = g(v - u), \quad 0 < s < u < v < \tau.$$

Времена пребывания в состояниях ВЦМ определяются формулами

$$\theta_1 = \alpha \wedge \tau, \quad \theta_2 = \beta^p, \quad \theta_{0s} = \beta \wedge (\tau - s), \quad \theta_{1us} = \alpha_s \wedge (\tau - s), \quad \theta_{0us} = \beta \wedge (\tau - u),$$

где $\wedge$ – знак минимума.

Стационарное распределение ВЦМ $\rho(\cdot)$ удовлетворяет следующей системе интегральных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(0s) = \rho_1 f(s), \quad \rho_1 = \rho_2 \\ \rho(0us) = \int_0^s \frac{f(s)}{\bar{F}(s-t)} \rho(1, (u-t), (s-t)) dt, \\ \rho(1us) = g(u-s) \rho(0s) + \int_0^{u-s} g(t) \rho(0, (u-t), s) dt, \\ \rho_2 = \rho_1 \bar{F}(\tau) + \int_0^\tau \bar{G}(\tau-s) \rho(0s) ds + \int_0^\tau du \int_0^u \bar{G}(\tau-u) \rho(0us) ds + \int_0^\tau du \int_0^u \frac{\bar{F}(s+\tau-u)}{\bar{F}(s)} \rho(1us) ds. \end{array} \right.$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что решениями системы являются функции

$$\begin{aligned} \rho(0us) &= \rho \sum_{n=1}^{\infty} g^{*(n)}(u-s) \frac{[\Lambda(s)]^n}{n!} f(s), \quad \rho(0s) = \rho f(s), \\ \rho(1us) &= \rho \sum_{n=1}^{\infty} g^{*(n)}(u-s) \frac{[\Lambda(s)]^{n-1}}{(n-1)!} f(s), \quad \rho_1 = \rho_2 = \rho, \end{aligned} \quad (1)$$

где $g^{*(n)}(t)$ – n -кратная свертка плотности распределения СВ β , $f(s)$ – плотность СВ α , $\Lambda(s) = \int_0^s \lambda(t) dt$

– накопленная интенсивность отказов. Постоянная ρ находится из условия нормировки

$$\rho = [2 + \tilde{H}^{(0)}(\tau) + \tilde{H}^{(1)}(\tau)]^{-1}.$$

$$\text{Здесь } \tilde{H}^{(0)}(\tau) = F(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\tau G^{*(n)}(\tau-s) f(s) \frac{[\Lambda(s)]^n}{n!} ds,$$

$$\tilde{H}^{(1)}(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\tau G^{*(n)}(\tau-s) f(s) \frac{[\Lambda(s)]^{n-1}}{(n-1)!} ds,$$

соответственно среднее число 0- и 1-восстановлений за время τ . Под 0-восстановлением понимается момент аварийного отказа, а под 1-восстановлением – момент возобновления работоспособности системы после МАВ.

Разобьем множество E состояний системы на два непересекающихся подмножества $E = E_+ \cup E_-$, $E_+ = \{1, 1us\}$ – подмножество работоспособных состояний и $E_- = \{2, 0us, 0s\}$ – подмножество отказовых состояний.

Среднюю стационарную наработку на отказ T_+ , среднее стационарное время восстановления T_- и стационарный коэффициент технического использования (КТИ) K_u системы найдем по формулам [3,4]

$$T_+ = \frac{\int_{E_+} m(z) \rho(dz)}{\int_{E_+} \rho(dz) P(z, E_-)}, \quad T_- = \frac{\int_{E_-} m(z) \rho(dz)}{\int_{E_-} \rho(dz) P(z, E_-)}, \quad K_u = \frac{T_+}{T_+ + T_-}, \quad (2)$$

где $\rho(\cdot)$ – стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n, n \geq 0\}$, $m(z)$ – средние времена пребывания в состояниях системы, $P(z, E_-)$ – вероятности переходов ВЦМ $\{\xi_n, n \geq 0\}$ из работоспособных состояний в отказовые.

С учетом вида стационарного распределения ВЦМ (1) формулы (2) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} \int_{E_-} m(z) \rho(dz) &= \rho M\beta^p + \rho \int_0^\tau f(s) ds \int_0^{\tau-s} \bar{G}(t) dt + \rho \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\tau du \int_0^u g^{*(n)}(u-s) \frac{[\Lambda(s)]^n}{n!} f(s) ds \int_0^{\tau-u} \bar{G}(t) dt = \\ &= \rho M\beta^p + \rho \int_0^\tau \bar{G}(t) F(\tau-t) dt + \rho \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\tau \bar{G}(t) dt \int_0^{\tau-t} G^{*(n)}(\tau-t-s) \frac{[\Lambda(s)]^n}{n!} f(s) ds = \\ &= \rho M\beta^p + \rho \int_0^\tau \bar{G}(t) \tilde{H}^{(0)}(\tau-t) dt = \rho \left(M\beta^p + \int_0^\tau [\tilde{H}^{(0)}(t) - \tilde{H}^{(1)}(t)] dt \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{E_+} m(z) \rho(dz) &= \rho \int_0^\tau \bar{F}(t) dt + \rho \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\tau du \int_0^u g^{*(n)}(u-s) \frac{[\Lambda(s)]^{n-1}}{(n-1)!} f(s) ds \int_0^{\tau-u} \frac{\bar{F}(s+t)}{\bar{F}(s)} dt = \\
&= \rho \int_0^\tau \bar{F}(t) dt + \rho \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\tau \bar{F}(y) G^{*(n)}(\tau-y) dy \int_0^y \frac{[\Lambda(s)]^{n-1}}{(n-1)!} \lambda(s) ds = \\
&= \rho \int_0^\tau \bar{F}(t) dt + \rho \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\tau \bar{F}(y) G^{*(n)}(\tau-y) \frac{[\Lambda(y)]^n}{n!} dy = \rho \left(\tau - \int_0^\tau [\tilde{H}^{(0)}(t) - \tilde{H}^{(1)}(t)] dt \right) \\
\int_{E_+} \rho(dz) P(z, E_-) &= \rho + \rho \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\tau du \int_0^u g^{*(n)}(u-s) \frac{[\Lambda(s)]^{n-1}}{(n-1)!} f(s) ds = \\
&= \rho \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\tau G^{*(n)}(\tau-s) \frac{[\Lambda(s)]^{n-1}}{(n-1)!} f(s) ds \right) = \rho (1 + \tilde{H}^{(1)}(\tau)).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
T_+ &= \frac{\tau - \int_0^{\tau_i} (\tilde{H}^{(0)}(t) - \tilde{H}^{(1)}(t)) dt}{1 + \tilde{H}^{(1)}(\tau)}, & T_- &= \frac{\int_0^{\tau_i} (\tilde{H}^{(0)}(t) - \tilde{H}^{(1)}(t)) dt}{1 + \tilde{H}^{(1)}(\tau)}, \\
K_u(\tau) &= \frac{\tau - \int_0^{\tau_i} (\tilde{H}^{(0)}(t) - \tilde{H}^{(1)}(t)) dt}{\tau + M\beta^p}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Для определения среднего удельного дохода $S(\tau)$ за единицу календарного времени и средних удельных затрат $C(\tau)$, приходящихся на единицу времени исправного функционирования системы, используем формулы [5]

$$S = \frac{\int_E m(z) f_s(z) \rho(dz)}{\int_E m(z) \rho(dz)}, \quad C = \frac{\int_{E_+} m(z) f_c(z) \rho(dz)}{\int_{E_+} m(z) \rho(dz)}, \tag{4}$$

где $f_s(z)$, $f_c(z)$ – функции, определяющие соответственно доход и затраты в каждом состоянии.

Функции $f_s(z)$ и $f_c(z)$ с учетом обозначений, введенных в постановочной части статьи, имеют вид:

$$f_s(z) = \begin{cases} c^0, & z \in \{1, 1us\}, \\ -c, & z \in \{0s, 0us\}, \\ -c^p, & z \in \{2\}, \end{cases} \quad f_c(z) = \begin{cases} 0, & z \in \{1, 1us\}, \\ c, & z \in \{0s, 0us\}, \\ c^p, & z \in \{2\}. \end{cases}$$

После преобразований формулы (4) принимают вид:

$$S(\tau) = \frac{c^0 \tau - (c^0 + c) \int_0^{\tau_i} (\tilde{H}^{(0)}(t) - \tilde{H}^{(1)}(t)) dt - c^p M\beta^p}{\tau + M\beta^p}, \tag{5}$$

$$C(\tau) = \frac{c^p M\beta^p + c \int_0^{\tau_i} (\tilde{H}^{(0)}(t) - \tilde{H}^{(1)}(t)) dt}{\tau - \int_0^{\tau_i} (\tilde{H}^{(0)}(t) - \tilde{H}^{(1)}(t)) dt}. \tag{6}$$

Оптимизация стационарных характеристик. Определение оптимальных периодов τ_u , τ_s , τ_c проведения ТО сводится к исследованию на экстремум соответственно функций $K(\tau)$, $S(\tau)$, $C(\tau)$. Точки экстремума этих функций удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned}
(\tau + M\beta^p)(\tilde{H}^{(0)}(\tau) - \tilde{H}^{(1)}(\tau)) - \int_0^\tau [\tilde{H}^{(0)}(t) - \tilde{H}^{(1)}(t)] dt &= M\beta^p, \\
(\tau + M\beta^p)(\tilde{H}^{(0)}(\tau) - \tilde{H}^{(1)}(\tau)) - \int_0^\tau [\tilde{H}^{(0)}(t) - \tilde{H}^{(1)}(t)] dt &= \frac{c^0 + c^p}{c^0 + c} M\beta^p, \\
(c\tau + c^p M\beta^p)(\tilde{H}^{(0)}(\tau) - \tilde{H}^{(1)}(\tau)) - c \int_0^\tau [\tilde{H}^{(0)}(t) - \tilde{H}^{(1)}(t)] dt &= c^p M\beta^p.
\end{aligned}$$

Если каждое из этих уравнений имеет единственное решение, тогда оно определяет оптимальный период проведения ТО для достижения наилучшего значения соответствующего показателя качества функционирования системы. В случае нескольких решений выбирается точка абсолютного экстремума. Отсутствие решения уравнения свидетельствует о том, что проводить ТО системы нецелесообразно.

Приведем пример применения формул (3), (5), (6). Пусть наработка на отказ имеет распределение Вейбулла–Гнеденко с плотностью $f(t) = \frac{\lambda}{\theta} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{\lambda-1} e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\lambda}$, а время аварийного восстановления имеет гамма-распределение с плотностью $g(t) = \mu \frac{(\mu t)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} e^{-\mu t}$. Исходные данные и результаты расчетов приводятся в таблицах 1 и 2.

Таблица 1 – Исходные данные в примере

№	λ	θ	$M\alpha$	μ	ν	$M\beta$	$M\beta^p$	c^0	c	c^p
1	2	5	13,395	0,5	0,2	0,4	0,2	3	2	1
2	1,5	15	33,272	1,2	0,8	0,667	0,1	3	2	1
3	3	20	72,512	2	1,3	0,65	0,3	4	3	2

Таблица 2 – Результаты расчетов

τ_u	T_+^u	T_-^u	$K_u^{\max}$	τ_s	T_+^s	T_-^s	$S^{\max}$	τ^c	$C^{\min}$	T_+^c	T_-^c
2,096	1,771	0,252	0,875	1,935	1,677	0,24	2,467	1,685	0,176	1,513	0,225
2,262	2,571	0,143	0,947	2,541	2,389	0,134	2,773	2,163	0,07	2,067	0,121
7,922	7,472	0,371	0,953	7,627	7,241	0,36	3,706	7,203	0,109	6,898	0,347

Полученные результаты могут быть использованы в области машино- и приборостроения при эксплуатации автоматизированных производственных систем. Предполагаемое направление для дальнейших исследований – перенесение рассмотренной стратегии технического обслуживания на системы со сложной структурой.

Библиографический список

1. Байхельт Ф. Надежность и техническое обслуживание. Математический подход / Ф. Байхельт, П. Франкен. — М.: Радио и связь, 1988. — 392 с.
2. Половко А.М. Основы теории надежности / А.М. Половко, С.В. Гуров. — СПб.: БХВ-Петербург, 2006. — 704 с.
3. Королюк В.С. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем / В.С. Королюк, А.Ф. Турбин. — К.: Наук. думка, 1982. — 236 с.
4. Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания / А.Н. Корлат, В.Н. Кузнецов, М.И. Новиков, А.Ф. Турбин. — Кишинев: Штиинца, 1991. — 209 с.
5. Шуренков В.М. Эргодические процессы Маркова / В.М. Шуренков. — М.: Наука, 1989. — 336 с.

Поступила в редакцию 2.09.2008 г.