

УДК 519.212

И.В. Долгин,**В.П. Долгин, канд. техн. наук***Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***МЕТОД АППРОКСИМАЦИИ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК***Излагается метод аппроксимации логарифмических частотных характеристик динамических объектов звеньями дробного порядка.*

При анализе динамических объектов применяют методы приближения частотных характеристик, например, построения асимптотических логарифмических амплитудно-частотных характеристик (ЛАЧХ) [1], позволяющие представить логарифмическую характеристику отрезками прямых. При построении асимптотических логарифмических характеристик необходимо числитель и знаменатель передаточной функции динамического объекта разложить на элементарные множители, что не всегда представляется возможным и приводит к существенным ограничениям области применения такого подхода.

Целью статьи является разработка метода аппроксимации частотных характеристик линейных и нелинейных динамических объектов по операторной передаточной функции объекта с помощью простейших звеньев с передаточной функцией дробного порядка вида

$$W_j(s) = (1 + \omega_j^{-1}s)^{v_j}, \quad (1)$$

где ω_j – частота сопряжения j -го звена, v_j – его порядок.

Представим аппроксимирующую передаточную функцию в форме

$$W_a(s) = \prod_{j=1}^k W_j(s), \quad (2)$$

где k – число узлов аппроксимации.

Рассмотрим методику получения аппроксимирующей передаточной функции (2). Для этого запишем выражение АЧХ элементарного звена (1) в виде

$$A_j(\omega) = \sqrt{\operatorname{Re}_j^2(\omega) + \operatorname{Im}_j^2(\omega)}. \quad (3)$$

Подставив в формулу (3) значения комплексных составляющих частотной передаточной функции j -го элементарного звена

$$\operatorname{Re}_j(\omega) = \left(1 + (\omega/\omega_j)^2\right)^{v_j/2} \cos(\varphi_j(\omega)) \quad \text{и}$$

$$\operatorname{Im}_j(\omega) = \left(1 + (\omega/\omega_j)^2\right)^{v_j/2} \sin(\varphi_j(\omega)),$$

где $\varphi_j(\omega) = v_j \arctg(\omega/\omega_j)$,

получим

$$A_j(\omega) = \left(1 + (\omega/\omega_j)^2\right)^{v_j/2}.$$

Тогда выражение ЛАЧХ

$$L_j(\omega) = 20 \lg(A_j(\omega))$$

j -го звена примет вид

$$L_j(\omega) = 10 v_j \lg(1 + (\omega/\omega_j)^2)$$

с асимптотической ЛАЧХ

$$L_j(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{if } \omega \ll \omega_j; \\ 20 v_j \lg(\omega/\omega_j), & \text{if } \omega \gg \omega_j. \end{cases}$$

На рисунке 1 изображены тонкими линиями ЛАЧХ и толстыми линиями их асимптоты звеньев вида (1) с одинаковой частотой сопряжения $\omega_c = \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 10$ рад/с и разными $v_1 = \pm 1$; $v_2 = \pm 0,6$; $v_3 = \pm 0,2$.

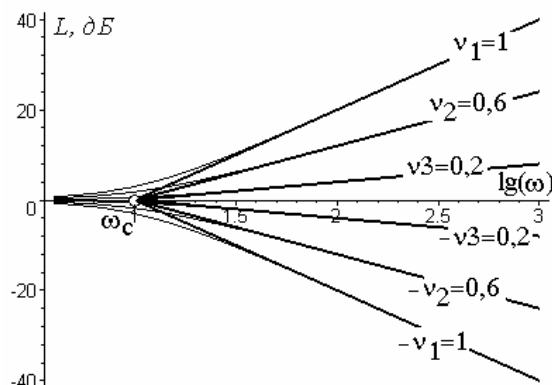


Рисунок 1 – Семейство ЛАЧХ и их асимптот

Для реализации приближения ЛАЧХ объекта по схеме (2) требуется найти параметры звеньев ω_j и v_j . На основании частотной передаточной функции объекта

$$W(j\omega) = \text{Re}(\omega) + j \text{Im}(\omega)$$

получим его АЧХ

$$A(\omega) = \sqrt{\text{Re}^2(\omega) + \text{Im}^2(\omega)}.$$

Частоту сопряжения аппроксимирующих звеньев (1) можно определить рекуррентно, задав величину шага $\Delta\omega$ в требуемом интервале частот $\omega_j = \omega_{j-1} + \Delta\omega$, где $\Delta\omega = 10^q$, $q = \lg(\omega_k/\omega_1)/k$, ω_1 – нижняя граничная частота, ω_k – верхняя граничная частота выбранного частотного диапазона. Для определения порядка звена рассмотрим функцию наклона

$$F(\omega) = \lg(A(\omega)/A(\omega \cdot 10^{-q}))/q.$$

В этом случае порядок аппроксимирующего звена в j -м узле аппроксимации можно определить процедурой

$$v_j = F(\omega_j) - \sum_{i=1}^{j-1} v_i. \quad (4)$$

На рисунке 2 изображены логарифмические функции $F(\omega)$ и $v(\omega)$ для объекта с передаточной функцией [1]

$$W(s) = W_1(s)W_2(s)W_3(s)W_4(s)W_5(s)W_6(s),$$

где

$$\begin{aligned} W_1(s) &= \frac{1+T_1s}{(1-T_2s)^2}; & T_1 &= 25 \text{ с}; T_2 = 2,5 \text{ с}; \\ W_2(s) &= \frac{1+2\xi_1T_4s+T_4^2s^2}{1+T_3s}; & T_3 &= 1,03 \text{ с}; T_4 = 0,131 \text{ с}; \xi_1 = 0,035; \\ W_3(s) &= \frac{1+2\xi_3T_6s+T_6^2s^2}{1+2\xi_2T_5s+T_5^2s^2}; & T_5 &= 0,121 \text{ с}; T_6 = 0,0988 \text{ с}; \xi_2 = 0,042; \xi_3 = 0,094; \\ W_4(s) &= \frac{1+2\xi_5T_8s+T_8^2s^2}{1+2\xi_4T_7s+T_7^2s^2}; & T_7 &= 0,098 \text{ с}; T_8 = 0,049 \text{ с}; \xi_4 = 0,063; \xi_5 = 0,56; \\ W_5(s) &= \frac{1+2\xi_8T_{11}s+T_{11}^2s^2}{1+2\xi_6T_9s+T_9^2s^2}; & T_9 &= 0,046 \text{ с}; T_{11} = 0,0205 \text{ с}; \xi_6 = 0,63; \xi_8 = 0,53; \\ W_6(s) &= \frac{1}{1+2\xi_7T_{10}s+T_{10}^2s^2}; & T_{10} &= 0,024 \text{ с}; \xi_7 = 0,31; k = 6. \end{aligned}$$

В результате применения процедуры (4) найден порядок $v_0 = 0,39$; $v_1 = -0,41$; $v_2 = -1,43$; $v_3 = -0,87$; $v_4 = 0,30$; $v_5 = 0,03$; и частота сопряжения каждого звена $\omega_0 = 0,01$ рад/с; $\omega_1 = 0,1$ рад/с; $\omega_2 = 1,0$ рад/с; $\omega_3 = 10,0$ рад/с; $\omega_4 = 100$ рад/с; $\omega_5 = 1000$ рад/с.

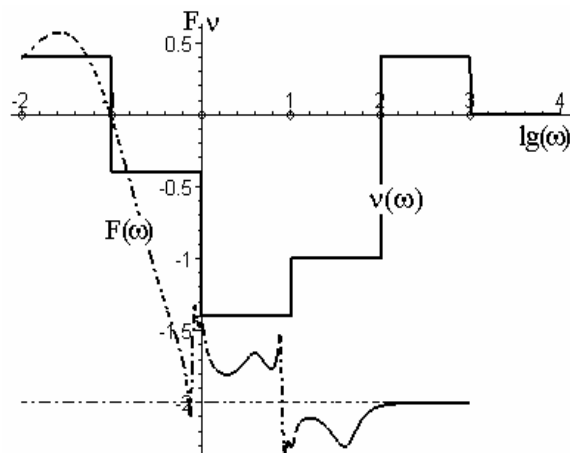


Рисунок 2 – Логарифмическая частотная функция наклона $F(\omega)$ и логарифмическая частотная функция порядка $v(\omega)$

На рисунке 3 изображена ЛАЧХ объекта $L(\omega)$ и аппроксимирующая ЛАЧХ $L_a(\omega)$, где

$$L(\omega) = \lg(A(\omega));$$

$$L_a(\omega) = \lg(|W_a(j\omega)|);$$

$$Y_u = \lg(A(\omega_i))/\lg(W_a(j\omega_i));$$

$$L_a(\omega) = Y_u \left| \frac{(1+100j\omega)^{0,39}(1+0,01j\omega)^{0,3}(1+0,001)^{0,03}}{(1+10j\omega)^{0,41}(1+j\omega)^{1,43}(1+0,01)^{0,87}} \right|;$$

$$Y_u|_{i=0} = 0,902.$$

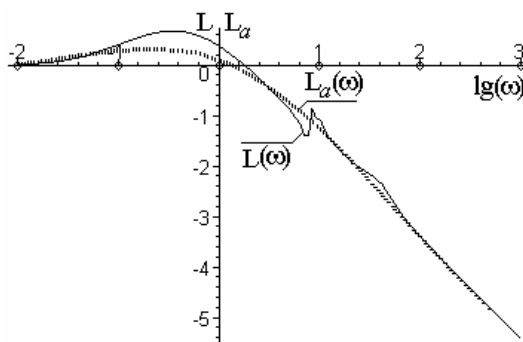


Рисунок 3 – Результат аппроксимации: ЛАЧХ объекта $L(\omega)$ и её аппроксимация $L_a(\omega)$

Значение Y_u в общем случае может быть определено как среднее на ансамбле узлов интерполяции ω_i , $i = 0 \dots k$, т.е.

$$Y_u = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \lg(A(\omega_i))/\lg(W_a(j\omega_i)).$$

Перспективы дальнейших исследований состоят в поиске упрощения процедуры аппроксимации.

Библиографический список

1. Топчиев Ю.И. Атлас для проектирования систем автоматического регулирования / Ю.И. Топчиев. — М.: Машиностроение, 1989. — 752 с.

Поступила в редакцию 4.02.2008 г.