

УДК 621.9.048.6

А.И. Бохонский, Л.В. Барашова*Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***АНАЛИЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ**

С использованием теории аналитического конструирования регуляторов и теории моментов исследовано оптимальное гашение колебаний упругой системы с одной степенью свободы. Сравниваются некоторые численные результаты, полученные в Matlab, Maple и Mathcad.

Задачи активного гашения колебаний упругих систем остаются актуальными во многих областях современной техники [1,2].

Как известно, применяемая для поиска управлений процедура синтеза оптимальных регуляторов, основанная на минимизации квадратичного критерия качества, предполагает решение нелинейных алгебраических либо нелинейных дифференциальных уравнений Риккати; важно отметить, что при этом возникают некоторые характерные особенности решения систем нелинейных алгебраических уравнений. Например, в задаче управляемого демпфирования колебаний манипулятора [1] система из десяти нелинейных алгебраических уравнений Риккати дает при использовании Maple шестнадцать корней, из которых, с учетом критерия Сильвестра, взято только два корня.

Целью исследований является анализ эффективности применения различных оптимальных управлений для подавления колебаний упругой системы, т.е. перевода ее из исходного возмущенного состояния в нулевое конечное.

Как отмечено в [3, 4], синтез оптимального регулятора в системе Matlab, созданной фирмой MathWork Inc. (США), с использованием пакета Control System Toolbox реализуется процедурой LQR. Для непрерывной системы алгоритм синтеза основан на минимизации квадратичного критерия оптимальности.

В [3] с помощью функции $[K, S, E] = \text{lqr}(A, B, Q, R)$ находится матрица коэффициентов обратных связей K закона управления $u = -kx$, минимизирующего функционал

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + U^T R U) dt \quad (1)$$

для объекта регулирования, описываемого в пространстве состояний системой уравнений

$$\dot{x} = Ax + Bu. \quad (2)$$

Как отмечено в [3], функция lqr выдает решение следующего алгебраического уравнения Риккати

$$A^T K + KA - KBR^{-1}B^T K + Q = 0 \quad (3)$$

и собственные значения системы $E = \text{EIG}(A - B^* K)$.

Рассмотрим применение теории аналитического конструирования на достаточно простом примере упругой системы с одной степенью свободы, когда необходимо подавить колебания, которые обусловлены исключительно ненулевыми начальными условиями.

В [5] приведен пример проектирования оптимального регулятора для подавления колебаний системы, описываемой уравнением

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = u. \quad (4)$$

После замены $x_1 = y$ и $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y}$ уравнение (4) в матричном виде записывается как

$$\begin{bmatrix} \dot{-x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (5)$$

где $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Квадратичный критерий оптимальности (1) в этом случае представляется в виде:

$$J = \int_0^T (y^2 + u^2) dt. \quad (6)$$

Следовательно, теперь получаем: $R=1$ и $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Алгебраические уравнения Риккати в [5] после известных преобразований записаны так:

$$\begin{aligned} 1 - 2K_{12} - K_{12}^2 &= 0, \\ 2K_{11} - 2K_{12} - K_{12}K_{22} &= 0, \\ 2K_{12} - 2K_{22} - K_{22}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

В этих уравнениях $K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix}$.

Вместо решения нелинейных алгебраических уравнений (7) в работе [5] найдены установившиеся значения (K_{11}, K_{12}, K_{22}) при численном интегрировании дифференциальных уравнений Риккати (для достаточно больших значений времени t) и приведены следующие их значения:

$$K_{11}(\infty) = 0,91; \quad K_{12}(\infty) = 0,41; \quad K_{22}(\infty) = 0,35. \quad (8)$$

Здесь нельзя не отметить, что после подстановки (8) в уравнения (7) получим погрешности $(\Delta_1 = 0,0119; \Delta_2 = 0,8565; \Delta_3 = -0,0025)$, которые свидетельствуют о том, что (8), по существу, не являются корнями (7).

При непосредственном вычислении корней системы (7) с использованием функции `fsolve` (в Maple) следует: $K_{11} = -0,07294; K_{12} = 0,4142; K_{22} = -2,3522$. После подстановки корней в (7) убеждаемся, что они удовлетворяют системе, *но не соответствуют смыслу задачи*.

Поэтому возникает необходимость проверки правильности составления системы (7). Для данного примера в Maple с использованием функции `evalm` из пакета `linalg` получены следующие алгебраические уравнения Риккати:

$$\begin{aligned} 1 - 2K_{12} - K_{12}^2 &= 0, \\ K_{11} - K_{22} - K_{12} - K_{12}K_{22} &= 0, \\ 2K_{12} - 2K_{22} - K_{22}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Решая систему уравнений (9) искусственным методом исключения, получаем следующие результаты. Для первого уравнения $K_{12}^2 + 2K_{12} - 1 = 0$ из двух корней $K_{12} = -2,4142$ и $K_{12} = 0,4142$ принимаем $K_{12} = 0,4142$. Подставляем принятое значение в третье уравнение, получаем два корня: $K_{22} = -2,3522$ и $K_{22} = 0,3521$. Принимаем $K_{22} = 0,3521$. Подставив выбранные корни во второе уравнение, получим $K_{11} = 0,9123$.

Таким образом, найдены корни, которые удовлетворяют смыслу задачи; они же соответствуют решению, полученному с помощью Toolbox и решению (8) согласно [5], где осуществлено интегрирование дифференциальных уравнений.

Корни системы (9), найденные с использованием `fsolve` (в Maple), следующие:

$$K_{11} = -2,9122; \quad K_{12} = 0,4142; \quad K_{22} = -2,3522. \quad (10)$$

Хотя корни (10) удовлетворяют системе (9), но они *не соответствуют смыслу задачи*. Отметим, что использование в Matlab функции $[K, S, E] = \text{lqr}(A, B, Q, R)$, где $R=1$, дает нужные корни (0,9123; 0,4142; 0,3522), которые практически совпадают с (8). Не ясно, однако, как процедура `lqr` осуществляет поиск этих корней (численное интегрирование дифференциальных уравнений).

С использованием функции `rkfixed` интегрирования дифференциальных уравнений в Mathcad получены аналогичные верные результаты для корней (при $t = 40$ с).

На рисунке 1 изображены графики управления и движения системы без управления и с управлением при следующих начальных условиях: $x(0) = 0,2$ м; $v(0) = 0$. Видно, что оптимальное управление в смысле критерия (6) обеспечивает снижение колебаний фактически за счет усиления демпфирования, но оно не достаточно эффективно. В принципе на практике только за счет пассивного усиления демпфирования (без использования какого-либо оптимального управления) можно достигать более быстрого подавления колебаний.

Для сопоставления поведения системы без управления и с управлением вычислены достаточно простые интегральные оценки:

$$\text{без управления } \delta_1 = \int_0^T |x(t)| dt = 0,3405; \quad \text{с управлением } \delta_2 = \int_0^T |x_1(t)| dt = 0,2756,$$

где $T=10$ с. При этом норма мощности управления $\int_0^T U^2 dt = 0,0026$. Интересно обратить внимание на близость значений δ_1 и δ_2 . На практике часто важно с использованием оптимального управления полностью подавить колебания за минимальное время.

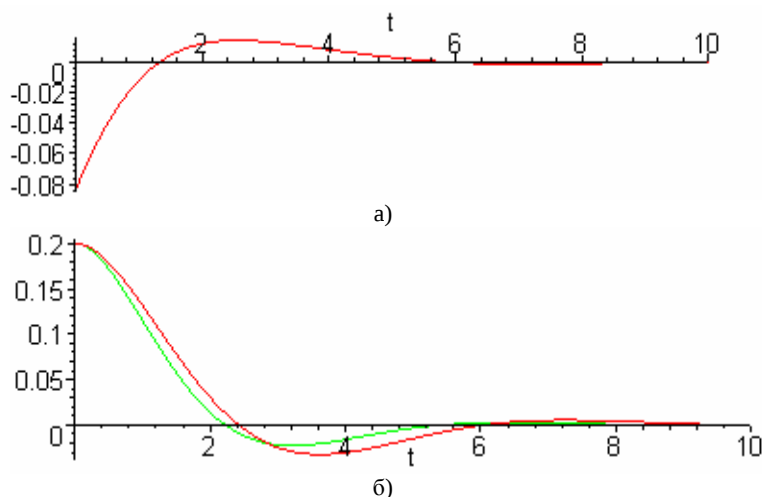


Рисунок 1 – Управление колебаниями при квадратичном критерии оптимальности:
а) график управления $u(t)$; б) движение системы без управления $x(t)$ и с управлением $x_1(t)$

В [1,6] даны примеры применения резонансного управления колебаниями упругих систем; управление находится с использованием теории моментов. Дальше метод моментов иллюстрируется на примере поиска управления для системы, которая описывается уравнением (4). Управление принято в виде

$$u(t) = A \sin pt + B \cos pt,$$

где $p = \sqrt{1-0,25} = 0,866 \text{с}^{-1}$; A и B – определяются из моментных соотношений. Даже для такого простого примера решение в Maple достаточно громоздко и здесь не приводится.

Параметры A и B найдены из условий (моментных соотношений): при $t = T = 10$ с, $xT = x(T) = 0$, $\dot{x}T = \dot{x}(T) = 0$. Эти моментные соотношения (для начальных условий $x(0) = 0,2$ м; $\dot{x}(0) = 0$) дают систему алгебраических уравнений

$$0,9784A + 0,5116B = 0,000434,$$

$$0,4430A - 0,8410B = 0,001077,$$

из которой найдено: $A = 0,0008725$; $B = -0,00082$.

Графики $x(t)$ и $U(t)$ изображены на рисунке 2. Из графиков следует, что в момент времени $t = T$ полностью устраняются перемещение и скорость ($x(T) = 0$, $\dot{x}(T) = 0$). Интересно отметить, что в этом

случае $\delta = \int_0^T |x(t)| dt = 0,2010$, а $\int_0^T U^2 dt = 0,6799 \cdot 10^{-5}$, т.е. такое управление более эффективно по сравнению с управлением, полученным в результате минимизации квадратичного критерия.

Выводы

1. Использование процедуры решения дифференциальных уравнений Риккати (при $t \rightarrow \infty$), как показывают примеры, более надежно, чем решение алгебраических уравнений в Maple. Кроме того, в случае многомерной системы возникают известные трудности в отборе требуемых корней алгебраических уравнений, число которых может во много раз превысить число исходных алгебраических уравнений Риккати.

2. Управление колебаниями, полученное на основании теории моментов, полностью подавляет колебания за конечное время. Важного практического результата можно достичь за счет непосредственного усиления линейно-вязкого демпфирования, особенно с использованием *демпфера с переменным коэффициентом сопротивления*.

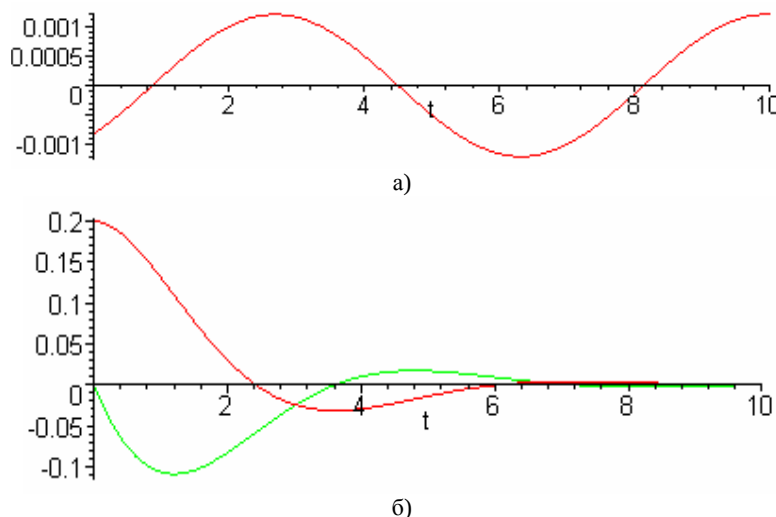


Рисунок 2– Резонансное управление: а) график управления $U(t)$;
б) графики перемещения $x(t)$ и скорости $v(t)$ в управляемом движении

Дальнейшие исследования включают поиск управлений колебаниями для систем с конечным числом степеней свободы и систем с распределенными массами с приложением результатов к динамике различных типов исполнительных органов манипуляторов минимальной массы.

Библиографический список

1. Бохонский А.И. Активное демпфирование колебаний объекта / В.Я. Копп, А.И. Бохонский, М.И. Мозолевский // Вестник СевГТУ. Сер. Автоматизация процессов и управление: сб. науч. тр. — Севастополь, 2000. — Вып. 27. — С. 61–65.
2. Бохонский А.И. Поиск управлений колебаниями упругих объектов в системе аналитических вычислений / А.И. Бохонский, А.В. Исаев // Оптимизация производственных процессов. — Севастополь, 2007. — Вып. 10. — С. 48–51.
3. Медведев В.С. Control System Toolbox. MATLAB для студентов / В.С. Медведев, В.Г. Потемкин. — М.: ДИАЛОГ–МИФИ, 1999. — 287 с.
4. Лазарев Ю.Ф. MatLAB 5.x. / Ю.Ф. Лазарев. — К.: Изд-во BHV, 2000. — 384 с.
5. Солодовников В.В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования: учеб. пособ. для вузов / В.В. Солодовников, В.Н. Плотников, А.В. Яковлев. — М.: Машиностроение, 1985. — 536 с.
6. Карновский И.А. Методы управления колебаниями деформируемых систем / И.А. Карновский, Ю.М. Почтман. — К.; Донецк: Вища школа, 1982. — 116 с.

Поступила в редакцию 22.10.2008 г.