

УДК 681.5.015.42

В.В. Захаров*Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: tk@sevgtu.sebastopol.ua***КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ В НЕГАУССОВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ПРИ СИММЕТРИИ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ НА ОСНОВЕ ГРАДИЕНТНЫХ МЕТОДОВ**

Предлагается метод параметрического синтеза в негауссовском приближении нелинейных дифференциальных систем управления на основе градиентных методов и способ его алгоритмизации. Метод основывается на матричной модели моментов до четвертого порядка включительно нелинейной стохастической дифференциальной системы с симметрией плотности вероятности.

Введение. Оптимизация стохастических систем управления означает оптимизацию либо структуры системы, либо лишь конечного числа параметров выбранной структуры в соответствии с статистическим критерием оптимальности. Корреляционный синтез стохастических дифференциальных систем [1] на основе методов параметрической оптимизации при алгоритмическом определении критерия оптимальности предполагает необходимость применения соответственно алгоритмических методов.

Наиболее эффективными из них нам представляются итерационные методы, в частности градиентные методы. На каждой итерации градиентные методы предполагают необходимость вычисления градиента критерия оптимальности по вектору параметров. Для класса нелинейных стохастических дифференциальных систем и статистического квадратического интегрального критерия оптимальности это означает необходимость решения двух подсистем детерминированных матричных уравнений. Первая – это система уравнений её детерминированной дифференциальной модели. Вторая – система дифференциальных уравнений для n_p частных производных первого порядка вектора математического ожидания, дисперсионной матрицы и матриц моментов выше второго порядка её вектора состояния по компонентам $(n_p \times 1)$ - вектора параметров.

Целью статьи является рассмотрение проблематики параметрической оптимизации нелинейных стохастических дифференциальных систем при симметрии плотности вероятности на основе градиентных методов и предложенной в [2] дифференциальной дисперсионной модели (ДДМ) в негауссовском приближении, а также получение соответствующих ДДМ матричных уравнений для частных производных моментов и описание эффективного способа алгоритмизации их численного решения.

1. ДДМ в негауссовском приближении. В [2] предложен вариант ДДМ в негауссовском приближении для симметричного распределения вероятностей $(n \times 1)$ - вектора состояния $\mathbf{x}_t$ стохастической многомерной нелинейной дифференциальной системы

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_t = \mathbf{A}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{B}_t \mathbf{f}[\mathbf{x}_t, t] + \mathbf{C}_t \boldsymbol{\omega}_t + \boldsymbol{\Xi}_t \mathbf{v}_t, \quad (1)$$

уравнения математического ожидания (МО) $\mathbf{m}_t = E\{\mathbf{x}_t\}$ и дисперсионной матрицы (ДМ) $\mathbf{D}_t = E\{\mathbf{x}_t^0 [\mathbf{x}_t^0]^T\}$ которых определены в виде

$$\frac{d}{dt} \mathbf{m}_t = \mathbf{r} + \boldsymbol{\Xi}_t \mathbf{v}_t, \quad \mathbf{m}_{t_0} = \mathbf{m}_0, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{D}_t = \mathbf{R} + \mathbf{R}^T + \mathbf{W}, \quad \mathbf{D}_{t_0} = \mathbf{D}_0, \quad t \in [t_0, t_F], \quad (3)$$

где $\mathbf{A}_t, \mathbf{B}_t, \mathbf{C}_t, \boldsymbol{\Xi}_t$ – матричные коэффициенты соответствующих размеров; $\mathbf{f}[\mathbf{x}_t, t]$, $\mathbf{v}_t$ и $\boldsymbol{\omega}_t$ – векторные нелинейная детерминированная функция, детерминированное возмущение и гауссовский белый шум [1] интенсивности $\mathbf{Q}_t = E\{\boldsymbol{\omega}_t \boldsymbol{\omega}_t^T\}$ соответственно; символы E и T – МО и транспонирование матрицы. Здесь и далее $\mathbf{r} = \mathbf{A}_t \mathbf{m}_t + \mathbf{B}_t \bar{\mathbf{f}}$, $\mathbf{R} = \mathbf{A}_t \mathbf{D}_t + \mathbf{B}_t \bar{\mathbf{R}}$, $\bar{\mathbf{R}} = E\{\mathbf{f}[\mathbf{x}_t, t][\mathbf{x}_t^0]^T\} \cong \mathbf{F} + \mathbf{K} \mathbf{D}_t$, $\mathbf{W} = \mathbf{C}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{C}_t^T$, $\mathbf{x}_t^0 = \mathbf{x}_t - \mathbf{m}_t$, а индексом t обозначена соответствующая функциональная зависимость.

Известно [1], что при симметрии плотности вероятности вектора $\mathbf{x}_t$ относительно $\mathbf{m}_t$ все центральные моменты третьего порядка его компонентов будут равны нулю, а распределение будет либо островершинным, либо плосковершинным по сравнению с гауссовским. Степень такого отличия распределения от гауссовского характеризуют величины вероятностных моментов четвертого порядка.

Поэтому в качестве дополнительных уравнений для предложенного в [2] варианта ДДМ мы ограничились лишь матричными уравнениями центральных моментов вектора $\mathbf{x}_t$ четвертого порядка. Аналитические представления

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{f}} &\cong \bar{\mathbf{f}}_z + \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=4} m_{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{f}}_z^{[\mathbf{v}]} / \Pi[\mathbf{v}!], \\ \mathbf{F} &= \sum_{i=1}^n \{\mathbf{e}_i^T \otimes \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=3} m_{\mathbf{v}_{+i}} \bar{\mathbf{f}}_z^{[\mathbf{v}]} / \Pi[\mathbf{v}!]\},\end{aligned}\quad (4)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_z + \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=4} m_{\mathbf{v}} \mathbf{K}_z^{[\mathbf{v}]} / \Pi[\mathbf{v}!], \quad \mathbf{K}_z = \frac{\partial}{\partial \mathbf{m}} \bar{\mathbf{f}}_z, \quad \mathbf{K}_z^{[\mathbf{v}]} = \frac{\partial^{\sigma[\mathbf{v}]}}{\partial m_1^{v_1} \dots \partial m_n^{v_n}} \mathbf{K}_z$$

через центральные моменты четвертого порядка компонентов вектора $\mathbf{x}_t$, коэффициенты статистической линеаризации в гауссовском приближении $\bar{\mathbf{f}}_z$ функции $\mathbf{f}[\mathbf{x}_t, t]$ и их частные производные $\bar{\mathbf{f}}_z^{[\mathbf{v}]} = \frac{\partial^{\sigma[\mathbf{v}]}}{\partial m_1^{v_1} \dots \partial m_n^{v_n}} \bar{\mathbf{f}}_z$ по компонентам вектора $\mathbf{m}_t$ получены в [2]. Здесь и далее $\otimes$ – прямое произведение,

$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_i$ – единичный $(n \times 1)$ -вектор [3], $\mathbf{v}_{+i} = \mathbf{v} + \mathbf{e}_i$, $\Pi[\mathbf{v}!] = \prod_{i=1}^n (v_i!)$, а $m_{\mathbf{v}} = E \left\{ \prod_{i=1}^n [x_i^0]^{v_i} \right\}$ –

центральный момент [1] порядка $\sigma[\mathbf{v}] = \sum_{i=1}^n v_i$.

2. Матричное уравнение центральных моментов четвертого порядка. Матрица центральных моментов четвертого порядка $\mathbf{M}_4$ вектора состояния $\mathbf{x}_t$ стохастической модели (1) определена в [2] как блочная $(n^2 \times n^2)$ -матрица

$$\mathbf{M}_4 = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \{\mathbf{I}_{kl} \otimes \mathbf{M}_{kl}\}. \quad (5)$$

Её k, l -ый $(n \times n)$ -матричный блок $\mathbf{M}_{kl} = E \{ \mathbf{x}_t^0 [\mathbf{x}_t^0]^T x_{kt}^0 x_{lt}^0 \}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M}_{kl} = \mathbf{R}_{kl} + \mathbf{R}_{kl}^T + \sum_{i=1}^n \{ \mathbf{e}_i [\mathbf{e}_k^T \mathbf{R}_{li} + \mathbf{e}_l^T \mathbf{R}_{ki}] \} + \mathbf{R}_{kl}^w, \quad (6)$$

где $\mathbf{I}_{kl} = \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l^T$, $\mathbf{R}_{\mu\nu} = \mathbf{A}_t \mathbf{M}_{\mu\nu} + \mathbf{B}_t \bar{\mathbf{R}}_{\mu\nu}$, $\bar{\mathbf{R}}_{\mu\nu} \equiv \mathbf{F}_{\mu\nu} + \mathbf{K}_{\mu\nu} \mathbf{D}_t$, $\mathbf{R}_{kl}^w = w_{kl} \mathbf{D}_t + d_{kl} \mathbf{W} + \mathbf{W}_{kl} + \mathbf{W}_{kl}^T$, $\mathbf{W}_{kl} = (\mathbf{D}_t \mathbf{e}_k) \otimes (\mathbf{e}_l^T \mathbf{W}) + (\mathbf{D}_t \mathbf{e}_l) \otimes (\mathbf{e}_k^T \mathbf{W})$, $d_{kl} = \mathbf{e}_k^T \mathbf{D}_t \mathbf{e}_l$, $w_{kl} = \mathbf{e}_k^T \mathbf{W} \mathbf{e}_l$, $\mu \in \{k, l\}$, $\nu \in \{i, l\}$. Аналитические представления матричных коэффициентов $\mathbf{F}_{\mu\nu}$, $\mathbf{K}_{\mu\nu}$ через центральные моменты четвертого порядка компонентов вектора $\mathbf{x}_t$, коэффициенты статистической линеаризации векторной функции $\mathbf{f}[\mathbf{x}_t, t]$ в гауссовском приближении и их частные производные по компонентам вектора $\mathbf{m}_t$ приведены в [2]:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\mu\nu} &= \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n d_{j_1\mu} d_{j_2\nu} \frac{\partial^2}{\partial m_{j_1} \partial m_{j_2}} \mathbf{F} + d_{\mu\nu} \mathbf{F} + \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i^T \otimes \left\{ \sum_{j=1}^n [d_{j\nu} \frac{\partial}{\partial m_j} \mathbf{f}_{i\mu} + d_{j\mu} \frac{\partial}{\partial m_j} \mathbf{f}_{i\nu}] + \mathbf{f}_{i\mu\nu} \right\}, \\ \mathbf{K}_{\mu\nu} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{i\mu} d_{j\nu} \frac{\partial^2}{\partial m_i \partial m_j} \mathbf{K} + d_{\mu\nu} \mathbf{K} + \sum_{i=1}^n \{ d_{i\nu} \frac{\partial}{\partial m_i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{m}} \mathbf{f}_{\mu} + d_{i\mu} \frac{\partial}{\partial m_i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{m}} \mathbf{f}_{\nu} \} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{m}} \mathbf{f}_{\mu\nu} + \\ &+ \mathbf{e}_{\mu}^T \otimes \{ \mathbf{f}_{\nu} + \sum_{i=1}^n d_{i\nu} \frac{\partial}{\partial m_i} \bar{\mathbf{f}} \} + \mathbf{e}_{\nu}^T \otimes \{ \mathbf{f}_{\mu} + \sum_{i=1}^n d_{i\mu} \frac{\partial}{\partial m_i} \bar{\mathbf{f}} \}.\end{aligned}\quad (7)$$

Здесь $\mathbf{f}_j = \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=3} m_{\mathbf{v}_{+j}} \bar{\mathbf{f}}_z^{[\mathbf{v}]} / \Pi[\mathbf{v}!]$, $\mathbf{f}_{ij} = \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=2} m_{\mathbf{v}_{+i+j}} \bar{\mathbf{f}}_z^{[\mathbf{v}]} / \Pi[\mathbf{v}!]$, $\mathbf{f}_{i\mu\nu} = \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=1} m_{\mathbf{v}_{+i+\mu+\nu}} \bar{\mathbf{f}}_z^{[\mathbf{v}]} / \Pi[\mathbf{v}!]$, $j \in \{\mu, \nu\}$, а $\mathbf{F}$ и

$\mathbf{K}$ определены в (4).

Уравнения (2), (3), (5), (6) образуют замкнутую систему – вариант ДДМ в негауссовском приближении для симметричной плотности вероятности вектора состояния $\mathbf{x}_t$.

3. Критерий оптимальности и его градиент. Для корреляционного синтеза стохастических систем вида (1) на основе методов параметрической оптимизации целесообразно в качестве критерия

оптимальности определить эквивалентную в силу равенств $E\{\mathbf{x}_t^T \mathbf{G}_t \mathbf{x}_t\} = \text{tr}[\mathbf{G}_t E\{\mathbf{x}_t \mathbf{x}_t^T\}]$ и $E\{\mathbf{x}_t \mathbf{x}_t^T\} = \mathbf{D}_t + \mathbf{m}_t \mathbf{m}_t^T$ [1] форму представления статистического квадратического интегрального функционала $J = E\{\mathbf{x}_{t_F}^T \mathbf{G}_{t_F} \mathbf{x}_{t_F} + \int_{t_0}^{t_F} \mathbf{x}_t^T \mathbf{G}_t \mathbf{x}_t dt\}$ в виде

$$J = J_1 + J_2, \quad J_1 = \text{tr}[\mathbf{G}_{t_F} \mathbf{D}_{t_F}] + \int_{t_0}^{t_F} \text{tr}[\mathbf{G}_t \mathbf{D}_t] dt, \quad J_2 = \text{tr}[\mathbf{G}_{t_F} \mathbf{M}_{t_F}] + \int_{t_0}^{t_F} \text{tr}[\mathbf{G}_t \mathbf{M}_t] dt, \quad (8)$$

где $\mathbf{G}_t, \mathbf{G}_{t_F}$ – симметрические весовые матричные коэффициенты, tr – след квадратной матрицы [3], а $\mathbf{M}_t = \mathbf{m}_t \mathbf{m}_t^T$.

Параметрическая оптимизация на основе детерминированных линейных градиентных методов предполагает на каждой итерации вычисление градиента критерия оптимальности J по вектору некоторых параметров $\mathbf{p}$, от которых зависят все или некоторые матричные коэффициенты $\mathbf{A}_t, \mathbf{B}_t, \mathbf{C}_t, \mathbf{E}_t$ модели состояния стохастической дифференциальной системы (1). Заметим, что для большинства приложений этими параметрами будут просто некоторые коэффициенты (или один коэффициент) одной или нескольких из этих матриц.

Искомые представления для k -тых ($k \in \{1, 2, \dots, n_p\}$) компонентов $\dot{J}_1 = \frac{\partial}{\partial p_k} J_1, \quad \dot{J}_2 = \frac{\partial}{\partial p_k} J_2$ градиентов $\nabla J_1 = \sum_{k=1}^{n_p} \mathbf{e}_k^T \otimes \frac{\partial}{\partial p_k} J_1, \quad \nabla J_2 = \sum_{k=1}^{n_p} \mathbf{e}_k^T \otimes \frac{\partial}{\partial p_k} J_2$ функционалов соответственно J_1 и J_2 (8) по вектору параметров $\mathbf{p} = \sum_{k=1}^{n_p} \mathbf{e}_k p_k$ определяются в виде:

$$\dot{J}_1 = \text{tr}[\mathbf{G}_{t_F} \dot{\mathbf{D}}_{t_F}] + \int_{t_0}^{t_F} \text{tr}[\mathbf{G}_t \dot{\mathbf{D}}_t] dt, \quad \dot{J}_2 = \text{tr}[\mathbf{G}_{t_F} \dot{\mathbf{M}}_{t_F}] + \int_{t_0}^{t_F} \text{tr}[\mathbf{G}_t \dot{\mathbf{M}}_t] dt, \quad (9)$$

где $\dot{\mathbf{D}}_t = \frac{\partial}{\partial p_k} \mathbf{D}_t, \quad \dot{\mathbf{M}}_t = \frac{\partial}{\partial p_k} \mathbf{M}_t = \dot{\mathbf{m}}_t \mathbf{m}_t^T + \mathbf{m}_t \dot{\mathbf{m}}_t^T = \dot{\mathbf{m}}_t \mathbf{m}_t^T + \{\dot{\mathbf{m}}_t \mathbf{m}_t^T\}^T, \quad \dot{\mathbf{m}}_t = \frac{\partial}{\partial p_k} \mathbf{m}_t$, а символ "." в качестве верхнего индекса и далее будет обозначать частную производную по параметру p_k .

Из (9) следует, что на каждой итерации для вычисления $\dot{J}_1, \dot{J}_2$ помимо уравнений ДДМ в негауссовском приближении необходимо решать в постановке задачи Коши дифференциальные уравнения частных производных МО $\dot{\mathbf{m}}_t$ и ДМ $\dot{\mathbf{D}}_t$.

4. Матричное уравнение $\dot{\mathbf{m}}_t$. Уравнение получим, продифференцировав (2) по компоненту p_k векторного аргумента $\mathbf{p}$ в виде:

$$\frac{d}{dt} \dot{\mathbf{m}}_t = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{E}}_t \mathbf{v}_t, \quad (10)$$

где

$$\dot{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^3 \dot{\mathbf{r}}^i, \quad \dot{\mathbf{r}}^1 = \dot{\mathbf{A}}_t \mathbf{m}_t + \dot{\mathbf{B}}_t \bar{\mathbf{f}}, \quad \dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{\mathbf{B}}_t \dot{\bar{\mathbf{f}}}, \quad \dot{\mathbf{r}}^3 = \mathbf{A}_t \dot{\mathbf{m}}_t. \quad (11)$$

Способ вычисления $\dot{\bar{\mathbf{f}}}$, частной производной векторной составляющей $\bar{\mathbf{f}}$ правой части уравнения МО (2) по параметру p_k , в силу (4) определится как

$$\dot{\bar{\mathbf{f}}} \equiv \dot{\bar{\mathbf{f}}}_c + \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=4} (\dot{\mathbf{m}}_{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{f}}_c^{[\mathbf{v}]} + \mathbf{m}_{\mathbf{v}} \dot{\bar{\mathbf{f}}}_c^{[\mathbf{v}]}) / \Pi[\mathbf{v}!]. \quad (12)$$

5. Матричное уравнение $\dot{\mathbf{D}}_t$. Уравнение получим, продифференцировав (3) по компоненту p_k векторного аргумента $\mathbf{p}$ в виде:

$$\frac{d}{dt} \dot{\mathbf{D}}_t = \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{R}}^T + \dot{\mathbf{W}}, \quad (13)$$

где $\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{A}}_t \mathbf{D}_t + \mathbf{A}_t \dot{\mathbf{D}}_t + \dot{\mathbf{B}}_t \bar{\mathbf{R}} + \mathbf{B}_t \dot{\bar{\mathbf{R}}}, \quad \dot{\bar{\mathbf{R}}} = \dot{\bar{\mathbf{F}}} + \dot{\mathbf{K}} \mathbf{D}_t + \mathbf{K} \dot{\mathbf{D}}_t, \quad \dot{\mathbf{W}} = \dot{\mathbf{C}}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{C}_t^T + \mathbf{C}_t \mathbf{Q}_t \dot{\mathbf{C}}_t^T = \dot{\mathbf{C}}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{C}_t^T + [\dot{\mathbf{C}}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{C}_t^T]^T.$

Для эффективной алгоритмизации полученное представление $\dot{\mathbf{R}}$ целесообразно записать в более удобной форме $\dot{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^4 \dot{\mathbf{R}}^i$, где

$$\dot{\mathbf{R}}^1 = \dot{\mathbf{A}}_t \mathbf{D}_t + \dot{\mathbf{B}}_t \bar{\mathbf{R}}, \quad \dot{\mathbf{R}}^2 = \mathbf{B}_t (\dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{K}} \mathbf{D}_t), \quad \dot{\mathbf{R}}^3 = \mathbf{A}_t \dot{\mathbf{D}}_t, \quad \dot{\mathbf{R}}^4 = \mathbf{B}_t \mathbf{K} \dot{\mathbf{D}}_t. \quad (14)$$

Матричные коэффициенты $\dot{\mathbf{F}}$ и $\dot{\mathbf{K}}$ линеаризованного относительно $\mathbf{D}_t$ и $\dot{\mathbf{D}}_t$ представления $\dot{\mathbf{R}}$ в силу (4) определяются как

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}} &= \sum_{i=1}^n \{ \mathbf{e}_i^T \otimes [\sum_{\sigma[\mathbf{v}]=3} (\dot{m}_{\mathbf{v}+i} \bar{\mathbf{f}}_e^{[\mathbf{v}]} + m_{\mathbf{v}+i} \dot{\bar{\mathbf{f}}}_e^{[\mathbf{v}]}) / \Pi[\mathbf{v}!]] \}, \\ \dot{\mathbf{K}} &= \dot{\mathbf{K}}_e + \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=4} (\dot{m}_{\mathbf{v}} \mathbf{K}_e^{[\mathbf{v}]} + m_{\mathbf{v}} [\dot{\mathbf{K}}_e^{[\mathbf{v}]}]) / \Pi[\mathbf{v}!]. \end{aligned} \quad (15)$$

Из соотношений (11), (12), (14), (15) следует, что для вычисления $\dot{\mathbf{m}}_t$ и $\dot{\mathbf{D}}_t$ потребуется совместно с уравнениями ДДМ в негауссовском приближении решать уравнения блоков $\dot{\mathbf{M}}_{kl}$, $k = \overline{1, n}$, $l = \overline{k, n}$ – суть частных производных блоков матрицы центральных моментов $\mathbf{M}_4$. Получим уравнения блоков $\dot{\mathbf{M}}_{kl}$.

6. Матричное уравнение $\dot{\mathbf{M}}_{kl}$. Уравнение получим, продифференцировав (6) по компоненту p_k векторного аргумента $\mathbf{p}$ в виде:

$$\frac{d}{dt} \dot{\mathbf{M}}_{kl} = \dot{\mathbf{R}}_{kl} + \dot{\mathbf{R}}_{kl}^T + \sum_{i=1}^n \{ \mathbf{e}_i [\mathbf{e}_k^T \dot{\mathbf{R}}_{li} + \mathbf{e}_l^T \dot{\mathbf{R}}_{ki}] + \dot{\mathbf{R}}_{kl}^w, \quad (16)$$

где $\dot{\mathbf{R}}_{\mu\nu} = \dot{\mathbf{A}}_t \mathbf{M}_{\mu\nu} + \mathbf{A}_t \dot{\mathbf{M}} + \dot{\mathbf{B}}_t \bar{\mathbf{R}}_{\mu\nu} + \mathbf{B}_t \dot{\bar{\mathbf{R}}}_{\mu\nu}$, $\dot{\bar{\mathbf{R}}}_{\mu\nu} \equiv \dot{\mathbf{F}}_{\mu\nu} + \dot{\mathbf{K}}_{\mu\nu} \mathbf{D}_t + \mathbf{K}_{\mu\nu} \dot{\mathbf{D}}_t$, $\mu \in \{k, l\}$, $\nu \in \{i, l\}$, $\dot{\mathbf{R}}_{kl}^w = \dot{w}_{kl} \mathbf{D}_t + w_{kl} \dot{\mathbf{D}}_t + \dot{d}_{kl} \mathbf{W} + d_{kl} \dot{\mathbf{W}} + \dot{\mathbf{W}}_{kl} + \mathbf{W}_{kl}^T$, $\dot{\mathbf{W}}_{kl} = (\dot{\mathbf{D}}_t \mathbf{e}_k) \otimes (\mathbf{e}_l^T \dot{\mathbf{W}}) + (\dot{\mathbf{D}}_t \mathbf{e}_l) \otimes (\mathbf{e}_k^T \dot{\mathbf{W}})$, $\dot{d}_{kl} = \mathbf{e}_k^T \dot{\mathbf{D}}_t \mathbf{e}_l$, $\dot{w}_{kl} = \mathbf{e}_k^T \dot{\mathbf{W}} \mathbf{e}_l$. Для эффективной алгоритмизации полученное представление $\dot{\mathbf{R}}_{\mu\nu}$ целесообразно записать

как $\dot{\mathbf{R}}_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^4 \dot{\mathbf{R}}_{\mu\nu}^i$, где

$$\dot{\mathbf{R}}_{\mu\nu}^1 = \dot{\mathbf{A}}_t \mathbf{M}_{\mu\nu} + \dot{\mathbf{B}}_t \bar{\mathbf{R}}_{\mu\nu}, \quad \dot{\mathbf{R}}_{\mu\nu}^2 = \mathbf{B}_t (\dot{\mathbf{F}}_{\mu\nu} + \dot{\mathbf{K}}_{\mu\nu} \mathbf{D}_t), \quad \dot{\mathbf{R}}_{\mu\nu}^3 = \mathbf{A}_t \dot{\mathbf{M}}_{\mu\nu}, \quad \dot{\mathbf{R}}_{\mu\nu}^4 = \mathbf{B}_t \mathbf{K}_{\mu\nu} \dot{\mathbf{D}}_t. \quad (17)$$

Матричные коэффициенты $\dot{\mathbf{F}}_{\mu\nu}$, $\dot{\mathbf{K}}_{\mu\nu}$ линеаризованного относительно $\mathbf{D}_t$ и $\dot{\mathbf{D}}_t$ представления $\dot{\bar{\mathbf{R}}}_{\mu\nu}$ в силу (7) определяются как

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}}_{\mu\nu} &= \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \left(\dot{d}_{j_1\mu} d_{j_2\nu} \frac{\partial^2}{\partial m_{j_1} \partial m_{j_2}} \mathbf{F} + d_{j_1\mu} \dot{d}_{j_2\nu} \frac{\partial^2}{\partial m_{j_1} \partial m_{j_2}} \mathbf{F} + d_{j_1\mu} d_{j_2\nu} \frac{\partial^2}{\partial m_{j_1} \partial m_{j_2}} \dot{\mathbf{F}} + \dot{d}_{\mu\nu} \mathbf{F} + \right. \\ &\quad \left. + d_{\mu\nu} \dot{\mathbf{F}} + \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i^T \otimes \left\{ \left[\dot{d}_{j\nu} \frac{\partial}{\partial m_j} \mathbf{f}_{i\mu} + d_{j\nu} \frac{\partial}{\partial m_j} \dot{\mathbf{f}}_{i\mu} + \dot{d}_{j\mu} \frac{\partial}{\partial m_j} \mathbf{f}_{i\nu} + d_{j\mu} \frac{\partial}{\partial m_j} \dot{\mathbf{f}}_{i\nu} \right] + \dot{\mathbf{f}}_{\mu\nu} \right\}, \right. \\ \dot{\mathbf{K}}_{\mu\nu} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\dot{d}_{i\mu} d_{j\nu} \frac{\partial^2}{\partial m_i \partial m_j} \mathbf{K} + d_{i\mu} \dot{d}_{j\nu} \frac{\partial^2}{\partial m_i \partial m_j} \mathbf{K} + d_{i\mu} d_{j\nu} \frac{\partial^2}{\partial m_i \partial m_j} \dot{\mathbf{K}} \right) + \dot{d}_{\mu\nu} \mathbf{K} + d_{\mu\nu} \dot{\mathbf{K}} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left\{ \dot{d}_{i\nu} \frac{\partial}{\partial m_i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{m}} \mathbf{f}_{i\mu} + d_{i\nu} \frac{\partial}{\partial m_i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{m}} \dot{\mathbf{f}}_{i\mu} + \dot{d}_{i\mu} \frac{\partial}{\partial m_i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{m}} \mathbf{f}_{i\nu} + d_{i\mu} \frac{\partial}{\partial m_i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{m}} \dot{\mathbf{f}}_{i\nu} \right\} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{m}} \dot{\mathbf{f}}_{k\mu\nu} + \\ &\quad + \mathbf{e}_\mu^T \otimes \left\{ \mathbf{f}_{i\nu} + \sum_{i=1}^n \left(\dot{d}_{i\nu} \frac{\partial}{\partial m_i} \bar{\mathbf{f}} + d_{i\nu} \frac{\partial}{\partial m_i} \dot{\bar{\mathbf{f}}} \right) \right\} + \mathbf{e}_l^T \otimes \left\{ \mathbf{f}_{i\mu} + \sum_{i=1}^n \left(\dot{d}_{i\mu} \frac{\partial}{\partial m_i} \bar{\mathbf{f}} + d_{i\mu} \frac{\partial}{\partial m_i} \dot{\bar{\mathbf{f}}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\mathbf{f}_j = \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=3} m_{\mathbf{v}+j} \bar{\mathbf{f}}_e^{[\mathbf{v}]} / \Pi[\mathbf{v}!]$, $\mathbf{f}_{ij} = \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=2} m_{\mathbf{v}+i+j} \bar{\mathbf{f}}_e^{[\mathbf{v}]} / \Pi[\mathbf{v}!]$, $\mathbf{f}_{i\mu\nu} = \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=1} m_{\mathbf{v}+i+\mu+\nu} \bar{\mathbf{f}}_e^{[\mathbf{v}]} / \Pi[\mathbf{v}!]$,

$$\dot{\mathbf{f}}_j = \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=3} (\dot{m}_{\mathbf{v}+j} \bar{\mathbf{f}}_2^{[\mathbf{v}]} + m_{\mathbf{v}+j} \dot{\bar{\mathbf{f}}}_2^{[\mathbf{v}]}) / \Pi[\mathbf{v}!], \quad \dot{\mathbf{f}}_{ij} = \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=2} (\dot{m}_{\mathbf{v}+i+j} \bar{\mathbf{f}}_2^{[\mathbf{v}]} + m_{\mathbf{v}+i+j} \dot{\bar{\mathbf{f}}}_2^{[\mathbf{v}]}) / \Pi[\mathbf{v}!],$$

$$j \in \{\mu, \nu\}, \quad \dot{\mathbf{f}}_{i\mu\nu} = \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=1} (\dot{m}_{\mathbf{v}+i+\mu+\nu} \bar{\mathbf{f}}_2^{[\mathbf{v}]} + m_{\mathbf{v}+i+\mu+\nu} \dot{\bar{\mathbf{f}}}_2^{[\mathbf{v}]}) / \Pi[\mathbf{v}!],$$

а $\bar{\mathbf{f}}$, $\mathbf{F}$ и $\mathbf{K}$ определяются равенствами (4).

7. Вычисление правых частей уравнений $\mathbf{m}_t$, $\mathbf{D}_t$, $\mathbf{M}_{kl}$. На основе обобщения метода, предложенной в [4], в [2] реализован эффективный алгоритм вычисления матричных составляющих $\mathbf{r}$, $\Xi_t \mathbf{v}_t$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_{\mu\nu}$, $\mathbf{W} = \mathbf{C}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{C}_t^T = \mathbf{C}_t (\mathbf{C}_t \mathbf{Q}_t)^T$ правых частей уравнений ДДМ (2), (3) и блоков (9) матрицы $\mathbf{M}_4$ (8) при их численном интегрировании на основе скалярных представлений составляющих правой части линеаризованной модели состояния (1):

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{A}_t \mathbf{x}_t, \quad \mathbf{r}_B = \mathbf{B}_t \tilde{\mathbf{f}}, \quad \mathbf{r}_\Xi = \Xi_t \mathbf{v}_t, \quad \mathbf{r}_C = \mathbf{C}_t \omega_t. \quad (19)$$

При этом линеаризация уравнений модели (1) сводится лишь к формальной замене каждого из ненулевых скалярных компонентов $f[x_j, j \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}]$ функции $\mathbf{f}[\mathbf{x}_t, t]$ его линеаризованным представлением одного из трёх видов:

$$\tilde{f}_1 = \bar{f}, \quad \tilde{f}_2 = f_i + \sum_{j \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}} k_j x_j \quad \text{или} \quad \tilde{f}_3 = f_i^{\mu\nu} + \sum_{j \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}} k_j^{\mu\nu} x_j, \quad (20)$$

где $\mathcal{S}_{\tilde{n}} \subseteq \mathcal{S}_n$ – подмножество размером $\tilde{n}$ множества $\mathcal{S}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ индексов компонентов вектора состояния $\mathbf{x}_t$, составляющих векторный аргумент функции $f[x_j, j \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}]$, $\mu = \overline{1, n}$, $\nu = \overline{\mu, n}$. Представления $\tilde{f}_1$, $\tilde{f}_2$ и $\tilde{f}_3$ определяют способ линеаризации для уравнений $\mathbf{m}_t$, $\mathbf{D}_t$ и $\mathbf{M}_{kl}$ соответственно, а $i = \overline{1, n}$ – номер этапа процедуры вычисления по столбцам $\bar{\mathbf{R}}$ и $\bar{\mathbf{R}}_{\mu\nu}$.

Формулы для коэффициентов $\bar{f}$, f_i , k_j и $f_i^{\mu\nu}$, $k_j^{\mu\nu}$ представлений (20) приведены в [2]. Они получены из $\bar{\mathbf{f}}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{K}$ (4) и $\mathbf{F}_{\mu\nu}$, $\mathbf{K}_{\mu\nu}$ (7) соответственно с учётом структуры множества $\mathcal{S}_{\tilde{n}}$.

8. Вычисление правых частей уравнений $\dot{\mathbf{m}}_t$, $\dot{\mathbf{D}}_t$, $\dot{\mathbf{M}}_{kl}$. Матричные составляющие $\dot{\mathbf{r}}$, $\dot{\Xi}_t \mathbf{v}_t$, $\dot{\mathbf{R}}$, $\dot{\mathbf{R}}_{\mu\nu}$, $\dot{\mathbf{W}} = \dot{\mathbf{C}}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{C}_t^T + \mathbf{C}_t \mathbf{Q}_t \dot{\mathbf{C}}_t^T = \dot{\mathbf{C}}_t (\mathbf{C}_t \mathbf{Q}_t)^T + \mathbf{C}_t (\dot{\mathbf{C}}_t \mathbf{Q}_t)^T$ уравнений $\dot{\mathbf{m}}_t$ (10), $\dot{\mathbf{D}}_t$ (13), $\dot{\mathbf{M}}_{kl}$ (16) также целесообразно вычислять на основе скалярных представлений составляющих

$$\mathbf{r}_A = \dot{\mathbf{A}}_t \mathbf{x}_t, \quad \mathbf{r}_B = \dot{\mathbf{B}}_t \tilde{\mathbf{f}}, \quad \dot{\mathbf{r}}_B = \mathbf{B}_t \dot{\tilde{\mathbf{f}}}, \quad \mathbf{r}'_B = \mathbf{B}_t \mathbf{f}', \quad \dot{\mathbf{r}}_\Xi = \dot{\Xi}_t \mathbf{v}_t, \quad \dot{\mathbf{r}}_C = \dot{\mathbf{C}}_t \omega_t \quad (21)$$

правой части линеаризованного уравнения

$$\frac{d}{dt} \dot{\mathbf{x}}_t = \dot{\mathbf{A}}_t \mathbf{x}_t + \dot{\mathbf{B}}_t \mathbf{f}[\mathbf{x}_t, t] + \dot{\mathbf{C}}_t \omega_t + \dot{\Xi}_t \mathbf{v}_t + \mathbf{A}_t \dot{\mathbf{x}}_t + \mathbf{B}_t \dot{\mathbf{f}}[\mathbf{x}_t, t], \quad (22)$$

получаемого дифференцированием уравнения (1) по параметру p_k . При этом скалярная форма представления составляющих позволяет исключить умножение на нулевые компоненты как матриц коэффициентов $\mathbf{A}_t, \mathbf{B}_t$ и $\dot{\mathbf{A}}_t, \dot{\mathbf{B}}_t, \dot{\mathbf{C}}_t, \dot{\Xi}_t$ модели (22), так и матричных коэффициентов $\dot{\bar{\mathbf{f}}}$, $\dot{\mathbf{F}}$, $\dot{\mathbf{K}}$ и $\dot{\mathbf{F}}_{\mu\nu}$, $\dot{\mathbf{K}}_{\mu\nu}$ линеаризованных представлений $\dot{\bar{\mathbf{f}}}$, $\dot{\bar{\mathbf{R}}}$ и $\dot{\bar{\mathbf{R}}}_{\mu\nu}$ соответственно.

В результате вычисление $\dot{\mathbf{r}}^1$ (11), $\dot{\mathbf{R}}^1$ (14), $\mathbf{R}_{\mu\nu}^1$ (17) удаётся свести к вычислению скалярных представлений составляющих $\mathbf{r}_A = \dot{\mathbf{A}}_t \mathbf{x}_t$ и $\mathbf{r}_B = \dot{\mathbf{B}}_t \tilde{\mathbf{f}}$ (21) линеаризованной модели (22); $\dot{\mathbf{r}}^2$ (11), $\dot{\mathbf{R}}^2$ (14), $\mathbf{R}_{\mu\nu}^2$ (17) – составляющей $\dot{\mathbf{r}}_B = \mathbf{B}_t \dot{\tilde{\mathbf{f}}}$ (21); $\dot{\mathbf{R}}^3$ (14), $\mathbf{R}_{\mu\nu}^3$ (17) – $\mathbf{r}_A = \mathbf{A}_t \mathbf{x}_t$ (19), а $\dot{\mathbf{R}}^4$ (14), $\mathbf{R}_{\mu\nu}^4$ (17) – составляющей $\mathbf{r}'_B = \mathbf{B}_t \mathbf{f}'$ (21). Варианты линеаризации $\tilde{\mathbf{f}}$ ненулевых компонентов $\mathbf{f}[\mathbf{x}_t, t]$ определены в (20), варианты $\mathbf{f}'$ – представлениями

$$\mathbf{f}'_1 = \sum_{j \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}} k_j x_j, \quad \mathbf{f}'_2 = \sum_{j \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}} k_j^{\mu\nu} x_j, \quad (23)$$

соответствующими уравнениям $\dot{\mathbf{D}}_t$ и блоков $\dot{\mathbf{M}}_{\mu\nu}$, а варианты линеаризации $\dot{\mathbf{f}}$ ненулевых компонентов $\mathbf{f}[\mathbf{x}_t, t]$ – представлениями

$$\dot{f}_1 = \dot{\bar{f}}, \quad \dot{f}_2 = \dot{f}_i + \sum_{j \in \mathcal{Z}_{\tilde{n}}} \dot{k}_j x_j, \quad \dot{f}_3 = \dot{f}_i^{\mu\nu} + \sum_{j \in \mathcal{Z}_{\tilde{n}}} \dot{k}_j^{\mu\nu} x_j \quad (24)$$

для уравнений $\dot{\mathbf{m}}_t$, $\dot{\mathbf{D}}_t$ и блоков $\dot{\mathbf{M}}_{\mu\nu}$ соответственно.

Вычисление $\dot{\mathbf{E}}_t \mathbf{v}_t$ (10), $\dot{\mathbf{W}} = \dot{\mathbf{C}}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{C}_t^T + \mathbf{C}_t \mathbf{Q}_t \dot{\mathbf{C}}_t^T = \dot{\mathbf{C}}_t (\mathbf{C}_t \mathbf{Q}_t)^T + \mathbf{C}_t (\dot{\mathbf{C}}_t \mathbf{Q}_t)^T$ (13), (16) основывается на скалярных представлениях двух других составляющих правой части (22): $\dot{\mathbf{r}}_{\Xi} = \dot{\mathbf{E}}_t \mathbf{v}_t$, $\dot{\mathbf{r}}_C = \dot{\mathbf{C}}_t \boldsymbol{\omega}_t$ соответственно и, дополнительно, составляющей $\mathbf{r}_C = \mathbf{C}_t \boldsymbol{\omega}_t$ (19).

Формулы коэффициентов $\dot{\bar{f}}$, $\dot{f}_i$, $\dot{k}_j$ и $\dot{f}_i^{\mu\nu}$, $\dot{k}_j^{\mu\nu}$ получаются из $\dot{\bar{f}}$ (12), $\dot{\mathbf{F}}$, $\dot{\mathbf{K}}$ (15) и $\dot{\mathbf{F}}_{\mu\nu}$, $\dot{\mathbf{K}}_{\mu\nu}$ (18) соответственно с учётом структуры множества $\mathcal{Z}_{\tilde{n}}$.

Из представлений (12), (15) и (18), следует, что вид формул коэффициентов $\dot{\bar{f}}$, $\dot{f}_i$, $\dot{k}_j$ и $\dot{f}_i^{\mu\nu}$, $\dot{k}_j^{\mu\nu}$ не зависит от вида нелинейной функции $f[x_j, j \in \mathcal{Z}_{\tilde{n}}]$ и параметра p_k , а определяется лишь размером множества $\mathcal{Z}_{\tilde{n}}$. Очевидно, что для большинства приложений потребуются варианты формул, соответствующие нелинейной функции одного, двух, максимум трёх скалярных аргументов ($\tilde{n}=1,2,3$).

При этом представления для входящих в формулы частных производных по компонентам вектора МО $\mathbf{m}_t$ и параметрам p_k получаются в результате дифференцирования известных аналитических представлений коэффициентов статистической линеаризации в гауссовском приближении типовых нелинейностей [1].

Более детальное исследование всех аспектов проблемы эффективной алгоритмизации вычисления $\dot{\bar{f}}$, $\dot{\mathbf{R}}$ и $\dot{\mathbf{R}}_{\mu\nu}$, в том числе и получение формул определения коэффициентов $\dot{\bar{f}}$, $\dot{f}_i$, $\dot{k}_j$ и $\dot{f}_i^{\mu\nu}$, $\dot{k}_j^{\mu\nu}$ для скалярной функции $f[x_j, j \in \mathcal{Z}_{\tilde{n}}]$ одного, двух и трёх скалярных аргументов, будут приведены в другой работе. Сейчас же, в качестве примера, получим представления коэффициентов линеаризованных приближений нелинейной функции $f[x_j]$ одного аргумента $x_j, j \in \mathcal{Z}_n$.

9. Коэффициенты $\dot{\bar{f}}$, $\dot{f}_i$, $\dot{k}_j$ нелинейной функции $\dot{f}[x_j]$. В силу справедливых в этом случае равенств

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_j \mathbf{e}_j, \quad \sigma[\tilde{\mathbf{v}}] = \mathbf{v}_j, \quad \bar{f}_z[\tilde{\mathbf{v}}] = \bar{f}_z^{(\mathbf{v}_j)}, \quad \Pi[\tilde{\mathbf{v}}!] = \mathbf{v}_j! \quad (25)$$

формулы для коэффициентов $\dot{\bar{f}}$, $\dot{f}_i$, $\dot{k}_j$ определяются из (12), (15) в виде:

$$\dot{\bar{f}} \equiv \dot{\bar{f}}_z + \dot{\beta}_j \bar{f}_z^{(4)} + \dot{\beta}_j \bar{f}_z^{(4)}, \quad \dot{f}_i = \dot{\alpha}_i \bar{f}_z^{(3)} + \dot{\alpha}_i \bar{f}_z^{(3)}, \quad \dot{k}_j = \dot{f}_z^{(1)} + \dot{\beta}_j \bar{f}_z^{(5)} + \dot{\beta}_j \bar{f}_z^{(5)}, \quad (26)$$

где $\dot{\alpha}_i = \frac{1}{6} \dot{m}_{jjji}$, $\dot{\alpha}_i = \frac{1}{6} \dot{m}_{jjji}$, $\dot{\beta}_j = \frac{1}{24} \dot{m}_{jjjj}$, $\dot{\beta}_j = \frac{1}{24} \dot{m}_{jjjj}$, $\dot{m}_{jjji} = \mathbf{e}_j^T \dot{\mathbf{M}}_{jj} \mathbf{e}_i$, $\dot{m}_{jjji} = \mathbf{e}_j^T \dot{\mathbf{M}}_{jj} \mathbf{e}_i$, $\dot{m}_{jjjj} = \mathbf{e}_j^T \dot{\mathbf{M}}_{jj} \mathbf{e}_j$, $\dot{m}_{jjjj} = \mathbf{e}_j^T \dot{\mathbf{M}}_{jj} \mathbf{e}_j$.

10. Коэффициенты $\dot{f}_i^{\mu\nu}$, $\dot{k}_j^{\mu\nu}$ нелинейной функции $\dot{f}[x_j]$. Представления для коэффициентов $\dot{f}_i^{\mu\nu}$, $\dot{k}_j^{\mu\nu}$ получаются из (18) в силу тех же равенств (25) в виде:

$$\dot{f}_i^{\mu\nu} = \dot{\alpha}_{i5}^{\mu\nu} \bar{f}_z^{(5)} + \dot{\alpha}_{i3}^{\mu\nu} \bar{f}_z^{(3)} + \dot{\alpha}_{i1}^{\mu\nu} \bar{f}_z^{(1)} + \dot{\alpha}_{i5}^{\mu\nu} \bar{f}_z^{(5)} + \dot{\alpha}_{i3}^{\mu\nu} \bar{f}_z^{(3)} + \dot{\alpha}_{i1}^{\mu\nu} \bar{f}_z^{(1)},$$

$$\dot{k}_j^{\mu\nu} = \dot{\beta}_{j7}^{\mu\nu} \bar{f}_z^{(7)} + \dot{\beta}_{j5}^{\mu\nu} \bar{f}_z^{(5)} + \dot{\beta}_{j3}^{\mu\nu} \bar{f}_z^{(3)} + \dot{\beta}_{j1}^{\mu\nu} \bar{f}_z^{(1)} + \dot{\beta}_{j7}^{\mu\nu} \bar{f}_z^{(7)} + \dot{\beta}_{j5}^{\mu\nu} \bar{f}_z^{(5)} + \dot{\beta}_{j3}^{\mu\nu} \bar{f}_z^{(3)} + \dot{\beta}_{j1}^{\mu\nu} \bar{f}_z^{(1)}, \quad (27)$$

где $\dot{\alpha}_{i5}^{\mu\nu} = \frac{1}{6} d_{j\mu} d_{j\nu} m_{jjji}$, $\dot{\alpha}_{i3}^{\mu\nu} = \frac{1}{6} d_{\mu\nu} m_{jjji} + \frac{1}{2} (d_{j\nu} m_{jj\mu} + d_{j\mu} m_{jj\nu})$, $\dot{\alpha}_{i1}^{\mu\nu} = m_{j\mu\nu}$,
 $\dot{\beta}_{j7}^{\mu\nu} = \frac{1}{24} d_{j\mu} d_{j\nu} m_{jjjj}$, $\dot{\beta}_{j5}^{\mu\nu} = \frac{1}{24} d_{\mu\nu} m_{jjjj} + \frac{1}{6} (d_{j\nu} m_{jj\mu} + d_{j\mu} m_{jj\nu}) + \frac{1}{24} (d_{j\nu} \delta_{j\mu} + d_{j\mu} \delta_{j\nu}) m_{jjjj}$,
 $\dot{\beta}_{j3}^{\mu\nu} = d_{j\mu} d_{j\nu} + \frac{1}{2} m_{jj\mu\nu} + \frac{1}{6} (m_{jjj\nu} \delta_{j\mu} + m_{jjj\mu} \delta_{j\nu})$, $\dot{\beta}_{j1}^{\mu\nu} = d_{\mu\nu} + d_{j\nu} \delta_{j\mu} + d_{j\mu} \delta_{j\nu}$,
 $\dot{\alpha}_{i5}^{\mu\nu} = \frac{1}{6} (\dot{d}_{j\mu} d_{j\nu} m_{jjji} + d_{j\mu} \dot{d}_{j\nu} m_{jjji} + d_{j\mu} d_{j\nu} \dot{m}_{jjji})$,
 $\dot{\alpha}_{i3}^{\mu\nu} = \frac{1}{6} (\dot{d}_{\mu\nu} m_{jjji} + d_{\mu\nu} \dot{m}_{jjji}) + \frac{1}{2} (\dot{d}_{j\nu} m_{jj\mu} + \dot{d}_{j\mu} m_{jj\nu} + d_{j\nu} \dot{m}_{jj\mu} + d_{j\mu} \dot{m}_{jj\nu})$, $\dot{\alpha}_{i1}^{\mu\nu} = \dot{m}_{j\mu\nu}$,
 $\dot{\beta}_{j7}^{\mu\nu} = \frac{1}{24} (\dot{d}_{j\mu} d_{j\nu} m_{jjjj} + d_{j\mu} \dot{d}_{j\nu} m_{jjjj} + d_{j\mu} d_{j\nu} \dot{m}_{jjjj})$,

$$\begin{aligned}\dot{\beta}_{j5}^{\mu\nu} &= \frac{1}{24}(\dot{d}_{\mu\nu}m_{jjjj} + d_{\mu\nu}\dot{m}_{jjjj}) + \frac{1}{6}(\dot{d}_{j\nu}m_{jj\mu\mu} + \dot{d}_{j\mu}m_{jj\nu\nu} + d_{j\nu}\dot{m}_{jj\mu\mu} + d_{j\mu}\dot{m}_{jj\nu\nu}) + \\ &+ \frac{1}{24}[(\dot{d}_{j\nu}\delta_{j\mu} + \dot{d}_{j\mu}\delta_{j\nu})m_{jjjj} + (d_{j\nu}\delta_{j\mu} + d_{j\mu}\delta_{j\nu})\dot{m}_{jjjj}], \\ \dot{\beta}_{j3}^{\mu\nu} &= \dot{d}_{j\mu}d_{j\nu} + d_{j\mu}\dot{d}_{j\nu} + \frac{1}{2}\dot{m}_{jj\mu\nu} + \frac{1}{6}(\dot{m}_{jjj\nu}\delta_{j\mu} + \dot{m}_{jjj\mu}\delta_{j\nu}), \quad \dot{\beta}_{j1}^{\mu\nu} = \dot{d}_{\mu\nu} + \dot{d}_{j\nu}\delta_{j\mu} + \dot{d}_{j\mu}\delta_{j\nu},\end{aligned}$$

а $\delta_{j\mu}$ и $\delta_{j\nu}$ – символы Кронекера [1].

11. Коэффициенты $\bar{f}$, f_i , k_j , $f_i^{\mu\nu}$, $k_j^{\mu\nu}$ нелинейной функции $f[x_j]$. Представления для коэффициентов получены в [2]:

$$\begin{aligned}\bar{f} &= \bar{f}_e + \beta_j \bar{f}_e^{(4)}, \quad f_i = \alpha_i \bar{f}_e^{(3)}, \quad k_j = \bar{f}_e^{(1)} + \beta_j \bar{f}_e^{(5)}, \\ f_i^{\mu\nu} &= \alpha_{i5}^{\mu\nu} \bar{f}_e^{(5)} + \alpha_{i3}^{\mu\nu} \bar{f}_e^{(3)} + \alpha_{i1}^{\mu\nu} \bar{f}_e^{(1)}, \quad k_j^{\mu\nu} = \beta_{j7}^{\mu\nu} \bar{f}_e^{(7)} + \beta_{j5}^{\mu\nu} \bar{f}_e^{(5)} + \beta_{j3}^{\mu\nu} \bar{f}_e^{(3)} + \beta_{j1}^{\mu\nu} \bar{f}_e^{(1)}.\end{aligned}\quad (28)$$

Здесь $\beta_j = \frac{1}{24}m_{jjjj}$, $\alpha_i = \frac{1}{6}m_{jjji}$, $\alpha_{i5}^{\mu\nu} = \frac{1}{6}d_{j\mu}d_{j\nu}m_{jjji}$,

$$\alpha_{i3}^{\mu\nu} = \frac{1}{6}d_{\mu\nu}m_{jjji} + \frac{1}{2}(d_{j\nu}m_{jj\mu\mu} + d_{j\mu}m_{jj\nu\nu}), \quad \alpha_{i1}^{\mu\nu} = m_{ji\mu\nu}, \quad \beta_{j7}^{\mu\nu} = \frac{1}{24}d_{j\mu}d_{j\nu}m_{jjjj},$$

$$\beta_{j5}^{\mu\nu} = \frac{1}{24}d_{\mu\nu}m_{jjjj} + \frac{1}{6}(d_{j\nu}m_{jj\mu\mu} + d_{j\mu}m_{jj\nu\nu}) + \frac{1}{24}(d_{j\nu}m_{jjjj}\delta_{j\mu} + d_{j\mu}m_{jjjj}\delta_{j\nu}),$$

$$\beta_{j3}^{\mu\nu} = d_{j\mu}d_{j\nu} + \frac{1}{2}m_{jj\mu\nu} + \frac{1}{6}(m_{jjj\nu}\delta_{j\mu} + m_{jjj\mu}\delta_{j\nu}), \quad \beta_{j1}^{\mu\nu} = d_{\mu\nu} + d_{j\nu}\delta_{j\mu} + d_{j\mu}\delta_{j\nu}.$$

12. Пример. Рассмотрим основные аспекты реализации предлагаемого метода корреляционного синтеза в негауссовском приближении для параметрической оптимизации стохастической нелинейной дифференциальной системы регулирования второго порядка

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_1 = x_2 \\ \frac{d}{dt}x_2 = \text{sgn}(x_1) + u + \omega_2 \end{cases}\quad (29)$$

при $E\{\omega_2\} = 0$, $E\{\omega_2^2\} = 1$, терминальном критерии $J = \frac{1}{2}E\{10x_1^2 + u^2\}$ и оптимизируемых параметрах a_{21}, a_{22} – суть коэффициентах линейного регулятора $u = -(a_{21}x_1 + a_{22}x_2)$.

Критерий (8) с учётом $x_i = x_i^0 + m_i$, $i = 1, 2$ для системы (29) определится как

$$J = \frac{1}{2}[10(d_{11} + m_1^2) + a_{21}^2(d_{11} + m_1^2) + a_{22}^2(d_{22} + m_2^2) + 2a_{21}a_{22}(d_{12} + m_1m_2)],$$

а $E\{\omega_2\} = 0$ и нечётность нелинейности $\text{sgn}(x_1)$ обуславливают в установившемся режиме симметрию плотности вероятности $p(x_1, x_2)$.

Скалярные представления (19) для вычисления матричных правых частей при численном интегрировании уравнений (2), (3) и (6) системы (29) принимают вид

$$\begin{cases} r_1^A = x_2 \\ r_2^A = -(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) \end{cases}, \quad \begin{cases} r_1^B = 0 \\ r_2^B = \bar{f} \cup (f_i + k_1 x_1) \cup (f_i^{\mu\nu} + k_1^{\mu\nu} x_1) \end{cases}, \quad \begin{cases} r_1^C = 0 \\ r_2^C = \omega_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} r_1^E = 0 \\ r_2^E = 0 \end{cases},$$

где $\bar{f}, f_i, k_1, f_i^{\mu\nu}, k_1^{\mu\nu}$ определены в (28). Гауссовские составляющие представлений (28) для системы (29) определяются как

$$\bar{f}_e = 2\Phi(m_*), \quad \bar{f}_e^{(1)} = \frac{2d_*}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{m_*^2}{2}}, \quad \bar{f}_e^{(i)} = \lambda_i \bar{f}_e^{(1)}, \quad i = 2, 7,$$

где $d_* = \frac{1}{\sqrt{d_{11}}}$, $m_* = m_1d_*$, $\lambda_2 = m_*d_*$, $\lambda_3 = d_*(1 + m_*^2)$, $\lambda_4 = d_*^3(3m_* + m_*^3)$,

$$\lambda_5 = d_*^4(3 + 6m_*^2 + m_*^4), \quad \lambda_6 = d_*^5(15m_* + 10m_*^3 + m_*^5), \quad \lambda_7 = d_*^6(15 + 45m_*^2 + 15m_*^4 + m_*^6),$$

а $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа [1].

Скалярные представления (21) для вычисления матричных правых частей при численном интегрировании уравнений (10), (13) и (16) системы (29) имеют вид

$$\begin{cases} r_1^A = 0 \\ r_2^A = -x_1 \cup -x_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} r_1^B = 0 \\ r_2^B = \dot{\bar{f}} \cup (\dot{f}_i + \dot{k}_1 x_1) \cup (\dot{f}_i^{\mu\nu} + \dot{k}_1^{\mu\nu} x_1) \end{cases},$$

$$\begin{cases} \dot{r}_1^B = 0 \\ \dot{r}_2^B = k_1 x_1 \cup k_1^{\mu\nu} x_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{r}_1^{\dot{B}} = 0 \\ \dot{r}_2^{\dot{B}} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{r}_1^{\ddot{C}} = 0 \\ \dot{r}_2^{\ddot{C}} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{r}_1^{\ddot{\ddot{C}}} = 0 \\ \dot{r}_2^{\ddot{\ddot{C}}} = 0 \end{cases},$$

где $\dot{f}, \dot{f}_i, \dot{k}_1, \dot{f}_i^{\mu\nu}, \dot{k}_1^{\mu\nu}$ определены соотношениями (26), (27). Для системы (29) их гауссовские составляющие определяются в следующем виде:

$$\dot{f}_e = \dot{m}_1 \bar{f}_e^{(1)} - \dot{d}_{11} \bar{f}_e^{(2)}, \quad \dot{f}_e^{(i)} = d_* [(i-1) \dot{d}_* \bar{f}_e^{(i-2)} + m_* \bar{f}_e^{(i-1)} - d_* \dot{d}_{11} \bar{f}_e^{(i)}], \quad i = \overline{1,7}.$$

Реализация предложенного метода корреляционного синтеза для параметризации регулятора системы (29) была выполнена на базе пакета MatLab. В результате оптимальные значения параметров регулятора определились как $a_{21} = 4,93$, $a_{22} = 3,13$. Следует отметить, что значения параметров близки к полученным значениям на основе упрощенного уравнения ФПК [1] для установившегося режима стационарной системы (29): $a_{21} = 5,18$, $a_{22} = 3,09$. Для сравнения, в результате параметризации регулятора в гауссовском приближении $a_{21} = 16,3$, $a_{22} = 5,71$.

Заключение. Предложенный способ построения алгоритма параметрической оптимизации многомерных нелинейных дифференциальных систем в негауссовском приближении основывается на варианте ДДМ системы при симметрии плотности вероятности и детерминированных линейных градиентных численных методах. Предложенный метод алгоритмизации вычисления правых частей матричных уравнений ДДМ в негауссовском приближении и уравнений соответствующих частных производных по компонентам вектора параметров позволяет снизить вычислительные затраты на его реализацию до уровня затрат при скалярном представлении решаемых уравнений. Направление дальнейших исследований будет связано с проблематикой параметрической оптимизации многомерных нелинейных стохастических дифференциальных систем при асимметрии плотности вероятности и на основе квадратических градиентных методов.

Библиографический список

1. Пугачёв В.С. Теория стохастических систем: учеб. пособие / В.С. Пугачёв, И.Н. Сеницын. — М.: Логос Пресс, 2005. — 999 с.
2. Захаров В.В. Дисперсионная модель нелинейной дифференциальной системы в негауссовском приближении при симметрии плотности вероятности / В.В. Захаров // Оптимизация производственных процессов: сб. науч. тр. — Севастополь, 2009. — Вып. 11. — С. 146–153.
3. Ланкастер П. Теория матриц / П. Ланкастер. — М.: Наука, 1978. — 280 с.
4. Захаров В.В. О некоторых аспектах алгоритмизации численного интегрирования уравнений Дункана и Риккати / В.В. Захаров, Г.А. Агранович // Оптимизация производственных процессов: сб. науч. тр. — Севастополь, 2006. — Вып. 9. — С. 125–133.

Поступила в редакцию 7.11.2008 г.