

УДК 517.977.5

А.А. Кабанов, аспирант

Севастопольский национальный технический университет

ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: patronne@mail.ru

СИНТЕЗ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫМИ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫМИ СИСТЕМАМИ

Рассматривается задача построения терминального регулятора состояния дискретной сингулярно возмущенной системы. На основе решения редуцированной задачи оптимального управления построена асимптотика нулевого порядка для терминального регулятора. Данный подход применен для синтеза терминального регулятора состояния двигателя постоянного тока. Приведены результаты моделирования в системе Matlab.

Интерес к сингулярно возмущенным задачам оптимального управления особенно возрос за последние тридцать лет. Сингулярные возмущения связаны как с постановкой задач (используются при описании неопределенности систем), так и с методами исследования задач управления (например, использование сингулярно возмущающих параметров при описании штрафных функций). Из условий оптимальности управления в сингулярно возмущенных задачах появляются жесткие краевые задачи, численное решение которых вызывает серьезные трудности (большое время расчета, накопление вычислительной ошибки и прочее). В связи с этим возрастает роль асимптотических методов, поскольку их использование позволяет значительно упростить исходную математическую модель объекта, пренебречь нелинейностями, произвести декомпозицию исходной задачи на несколько задач меньшей размерности.

Большинство работ, посвященных данной тематике, касаются непрерывных систем, в то время как прогрессивное развитие компьютерных технологий и сопутствующая ему компьютеризация всех сфер жизни общества приводят к возникновению дискретных задач, кроме того, дискретные задачи возникают и при численной реализации непрерывных задач оптимального управления. Можно также добавить, что множество задач экономики, социологии описываются дискретными моделями. Здесь уместно отметить, что одной из особенностей дискретных задач оптимального управления является их большая размерность, поэтому использование асимптотических методов для их решения особенно актуально.

Целью данной статьи является построение асимптотического приближения нулевого порядка решения дискретной сингулярно возмущенной задачи оптимального управления на основе декомпозиции решения соответствующего разностного уравнения Риккати.

1. Постановка задачи

Рассматриваем «быструю» дискретную модель непрерывной сингулярно возмущенной системы [1]

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, x_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 & x_0^2 \end{pmatrix}^T, \\ A &= \begin{pmatrix} I_1 + A_{11}\lambda & \lambda A_{12} \\ A_{21} & I_2 + A_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \lambda B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $x_k^1 \in R^{n_1}, x_k^2 \in R^{n_2}, x_k \in R^n, n = n_1 + n_2$; $A - n \times n$ матрица; $B - n \times r$ матрица; $I_i, i = 1, 2$ – единичная матрица соответствующей размерности; λ – положительный малый параметр; « T » – знак транспонирования. Уравнения (1) заданы на фиксированном интервале времени $0 \leq kT_0 \leq NT_0$, T_0 – период дискретизации, k – целое число, $k = 0, 1, \dots, N$.

На движениях системы (1) определим критерий

$$\begin{aligned} \rho_N \{u_k\} &= \frac{1}{2} x_N^T F x_N + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k], \\ F &= \begin{pmatrix} \lambda^{-1} F_1 & F_3 \\ F_3^T & F_2 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_3 \\ Q_3^T & Q_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $Q - n \times n$ матрица; $F - n \times n$ матрица; $R - r \times r$ матрица.

Предположим, что выполняется следующее:

Матрица Q – неотрицательно определенная, F и R – положительно определенные; система (1) полностью управляема.

Решение задачи (1), (2) в условиях сделанных предположений имеет вид [2]

$$\begin{aligned} u_k &= -G_k x_k, \quad G_k = R^{-1} B^T M_{k+1}^{-1} A, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \\ M_k &= K_k^{-1} + S, \quad S = B R^{-1} B^T, \end{aligned} \quad (3)$$

где K_k удовлетворяет матричному разностному уравнению Риккати

$$K_k = Q + A^T M_{k+1}^{-1} A, \quad K_N = F, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4)$$

Представим решение уравнения (4) в виде $K = \begin{pmatrix} K_1 \lambda^{-1} & K_3 \\ K_3^T & K_2 \end{pmatrix}$, здесь и далее индекс k ,

обозначающий номер шага, будем опускать в промежуточных выводах для упрощения записи. Тогда подставив данное представление для матрицы K в (3), получим

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} \lambda M_1 & -\lambda M_3 \\ -\lambda M_3^T & M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(K_1^{-1} + \lambda K_1^{-1} K_3 K_s^{-1} K_3^T K_1^{-1} + \lambda S_1) & -\lambda(K_1^{-1} K_3 K_s^{-1} + S_3) \\ -\lambda(K_s^{-1} K_3^T K_1^{-1} + S_3) & K_s^{-1} + S_2 \end{pmatrix}, \\ K_s^{-1} &= (K_2 - K_3^T K_1^{-1} K_3), \quad S_1 = B_1 R^{-1} B_1^T, \quad S_3 = B_1 R^{-1} B_2^T, \quad S_2 = B_2 R^{-1} B_2^T. \end{aligned}$$

Используя вышеописанное представление для матрицы M , найдем обратную ей

$$\begin{aligned} M^{-1} &= \begin{pmatrix} \lambda^{-1} M_1 & M_3 \\ M_3^T & M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} (M_1^{-1} + \lambda M_1^{-1} M_3 M_s^{-1} M_3^T M_1^{-1}) & M_1^{-1} M_3 M_s^{-1} \\ M_s^{-1} M_3^T M_1^{-1} & M_s^{-1} \end{pmatrix}, \\ M_s^{-1} &= (M_2 - \lambda M_3^T M_1^{-1} M_3). \end{aligned} \quad (5)$$

Подставив (5) в (4), найдем блочное представление для выражения $Q + A^T M^{-1} A$, т.е.

$$Q + A^T M^{-1} A = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} L_1 & L_3 \\ L_3^T & L_2 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} L_1 &= M_1 + \lambda O(1), \\ L_2 &= A_{22}^T M_2 A_{22} + Q_2 + \lambda O(1), \\ L_3 &= M_1 A_{12} + M_3 A_{22} + A_{21}^T M_2 A_{22} + Q_3 + \lambda O(1). \end{aligned}$$

Здесь $\|O(1)\| \leq C$ для всех достаточно малых λ и $k \in [0, N]$, $C > 0$ – некоторая константа.

Далее, подставляя (6) в выражения (3), (4), окончательно для матрицы M получаем:

$$\begin{pmatrix} \lambda M_1 & -\lambda M_3 \\ -\lambda M_3^T & M_2 \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} \lambda L_1^{-1} + \lambda^2 O(1) & -\lambda (L_1^{-1} L_3 (L_2 - \lambda L_3^T L_1^{-1} L_3)^{-1} + S_3) \\ -\lambda (L_2 - \lambda L_3^T L_1^{-1} L_3)^{-1} L_3^T L_1^{-1} + S_3 & (L_2 - \lambda L_3^T L_1^{-1} L_3)^{-1} + S_2 \end{pmatrix}_{k+1}. \quad (7)$$

Вернемся теперь к выражению (3), из которого найдем блочное представление для матрицы обратной связи G :

$$\begin{aligned} G_k &= R^{-1} \begin{pmatrix} B_1^T & B_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^{-1} M_1 & M_3 \\ M_3^T & M_2 \end{pmatrix}_{k+1} \begin{pmatrix} I_1 + A_{11} \lambda & \lambda A_{12} \\ A_{21} & I_2 + A_{22} \lambda \end{pmatrix} = \\ &= R^{-1} (B_1^T M_1 + B_2^T M_3^T + B_2^T M_2 A_{21} + \lambda O(1) \quad B_2^T M_2 A_{22} + \lambda O(1))_{k+1} = (G_1 \quad G_2)_k. \end{aligned} \quad (8)$$

2. Асимптотика нулевого порядка терминального регулятора

Искомая асимптотика получается из решения редуцированной задачи, т.е. решения задачи (1), (2) при $\lambda = 0$. Тогда при $\lambda = 0$ из соотношения (8) имеем (чертой сверху будем отмечать величины при $\lambda = 0$)

$$G = R^{-1} (B_1^T \bar{M}_1 + B_2^T \bar{M}_3^T + B_2^T \bar{M}_2 A_{21} \quad B_2^T \bar{M}_2 A_{22}) = (\bar{G}_1 \quad \bar{G}_2). \quad (9)$$

Здесь $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$ определяются из (7) при $\lambda = 0$ и равны

$$\begin{aligned}\bar{M}_{1k} &= \bar{L}_{1k+1}^{-1} = \bar{M}_{1k+1}, \\ \bar{M}_{1N} &= F_1^{-1} + \lambda F_1^{-1} F_3 (F_2 - \lambda F_3^T F_1^{-1} F_3)^{-1} F_3^T F_1^{-1} + \lambda S_1 = F_1^{-1},\end{aligned}\quad (10)$$

$$\bar{M}_{2k} = \bar{L}_{2k+1}^{-1} + S_2 = (A_{22}^T \bar{M}_{2k+1}^{-1} A_{22} + Q_2)^{-1} + S_2, \quad (11)$$

$$\begin{aligned}\bar{M}_{2N} &= (F_2 - \lambda F_3^T F_1^{-1} F_3)^{-1} + S_2 = F_2^{-1} + S_2, \\ \bar{M}_{3k} &= \bar{L}_{1k+1}^{-1} \bar{L}_{3k+1}^{-1} - S_3 = (A_{12} + \bar{M}_{3k+1} \bar{M}_{2k+1}^{-1} A_{22} + \bar{M}_{1k+1} A_{21}^T \bar{M}_{2k+1}^{-1} A_{22}) (\bar{M}_{2k} - S_2) - S_3, \\ \bar{M}_{3N} &= -F_1^{-1} F_3 (F_2 - \lambda F_3^T F_1^{-1} F_3)^{-1} - S_3 = -F_1^{-1} F_3 F_2^{-1} - S_3.\end{aligned}\quad (12)$$

Из соотношений (9), (11) видно, что вектор-функция $\bar{G}_{2k}$ является решением следующей задачи о терминальном регуляторе:

$$x_{k+1}^2 = A_{22} x_k^2 + B_2 u_k^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Управление $u_k^2 = -G_{2k} x_k^2$ обеспечивает минимум следующему функционалу качества

$$\rho^2_N \{u_k^2\} = \frac{1}{2} x_N^{2T} F_2 x_N^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left[(x_k^2)^T Q_2 x_k^2 + (u_k^2)^T R u_k^2 \right].$$

Что касается блока $\bar{G}_{1k}$, то он определяется значениями $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$, которые находятся из соотношений (10) – (12).

Таким образом, оптимальное решение G_k задачи (1), (2) представляет собой асимптотическую композицию решений $\bar{G}_{1k}$ и $\bar{G}_{2k}$, что означает существование по $k = 0, 1, \dots, N-1$, предела $\lim_{\lambda \leftarrow 0} G = G_k = (\bar{G}_{1k} \quad \bar{G}_{2k})$, где $\bar{G}_{1k}$ и $\bar{G}_{2k}$ определены выше.

Полученная редуцированная асимптотика при достаточно малом λ близка к точному решению, потому может использоваться как альтернатива последнему. Кроме того, качество такого приближенного регулятора можно повысить, построив асимптотику более высокого порядка. Ниже представлен пример построения терминального регулятора на основе решения редуцированной задачи.

3. Результаты моделирования

В качестве примера рассмотрим задачу терминального управления двигателем постоянного тока (ДПТ). Математическая модель двигателя описывается следующим образом:

$$\begin{cases} u(t) = L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + E(\omega(t)), \\ M_d I(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt} + M_c(t). \end{cases}$$

Здесь $M_d(I(t))$ – момент на валу двигателя; $u(t)$ – управляющее напряжение в якорной цепи ДПТ; $E(\omega(t))$ – противо-ЭДС в цепи якоря; L, R – индуктивность и активное сопротивление обмотки якоря; $\omega(t)$ – угловая скорость вращения вала двигателя; J – момент инерции вращающихся частей двигателя.

Поскольку индуктивность мала, ее можно представить в виде $L = L_\lambda \lambda$, $\lambda = 0, 1$. Далее, получив линеаризованную модель ДПТ [3], запишем ее в пространстве состояний

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1\lambda^{-1} & -0,5\lambda^{-1} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 2,5\lambda^{-1} \end{pmatrix} u(t).$$

«Быстрая» дискретная модель сингулярных возмущений данной непрерывной системы (при $T_0 = 0,01$ с) запишется в виде:

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0,1\lambda \\ -0,1 & 1,05 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,25 \end{pmatrix} u(k).$$

Определим критерий качества:

$$\rho_N \{u_k\} = \frac{1}{2} x_N^T F x_N + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k],$$

$$F = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, R = 1.$$

Необходимо построить управление, которое приводило бы систему из начального состояния $x_0^1 = \omega(0) = 20$ рад/с, $x_0^2 = i(0) = 0,25$ А за время $t_f = 5$ с, т.е. $N = 500$.

На рисунке 1 изображены результаты моделирования терминального управления дискретной моделью ДПТ. Верхний график – зависимость угловой скорости вращения вала двигателя от времени ($\omega(kT_0)$, рад/с), нижний – зависимость силы тока от времени ($i(kT_0)$, А), на рисунке 2 показаны зависимости управляющего напряжения от времени ($u(kT_0)$, В). На обоих рисунках нежирными линиями обозначено точное решение задачи терминального управления, жирными – приближенное решение (асимптотика решения нулевого порядка).

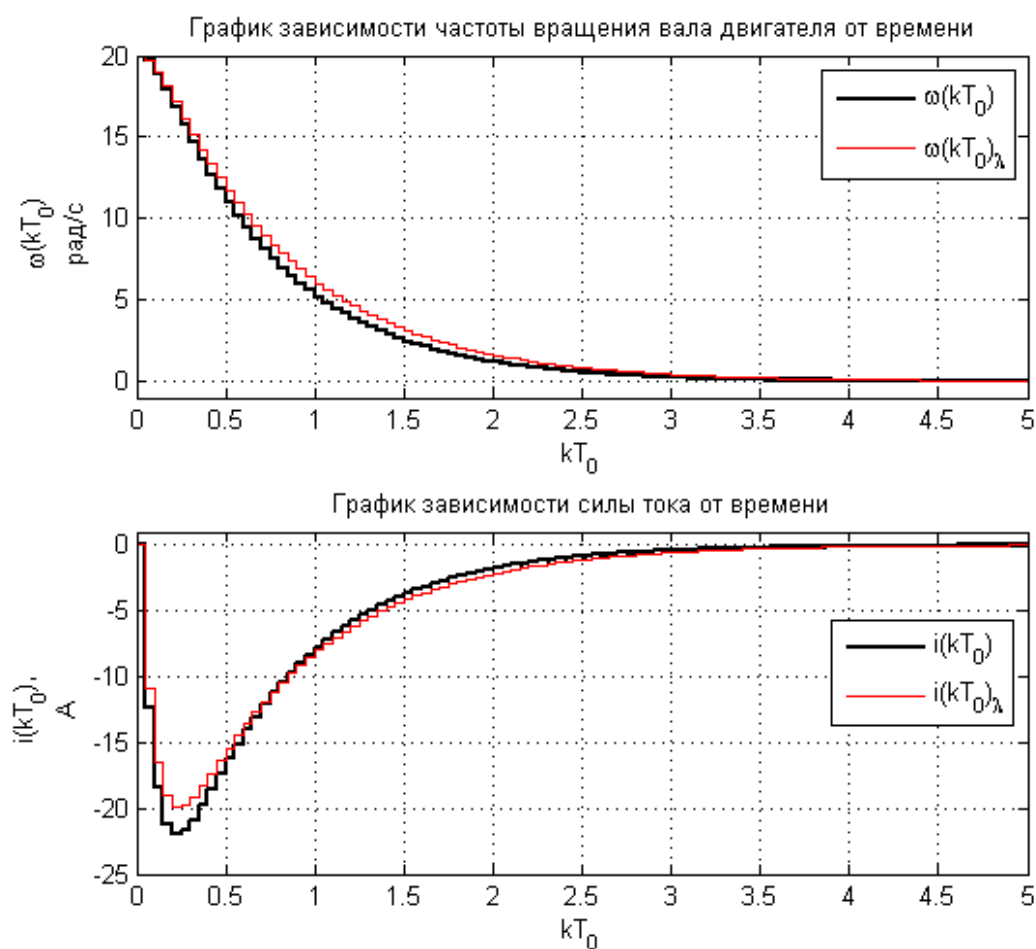


Рисунок 1 – Результаты моделирования

Из графиков (рисунок 1) видно, что приближенное решение практически не отличается от точного. Данный результат подтверждает возможность использования вышеописанного подхода для построения оптимальных регуляторов.

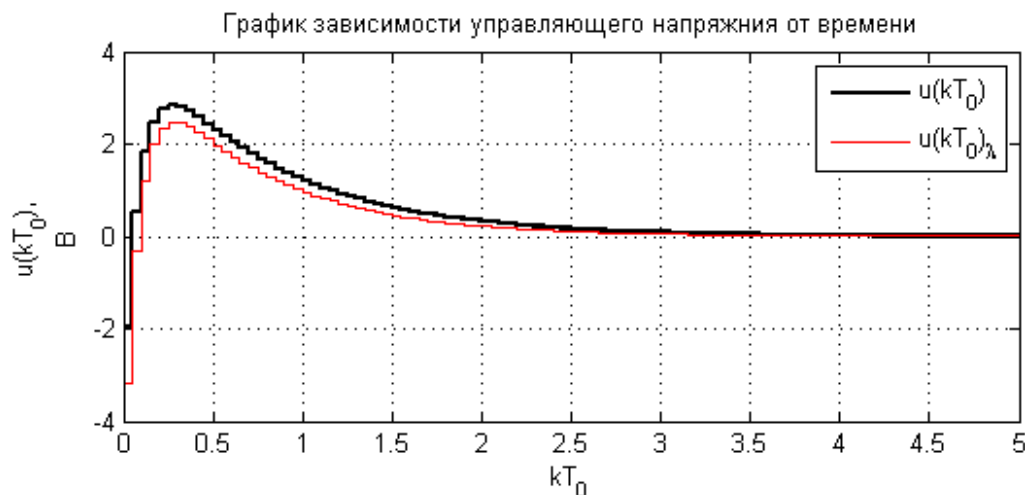


Рисунок 2 – График зависимости управляющего напряжения от времени

Замечание 1. Следует отметить, что пренебрежение малым параметром λ при построении асимптотического приближения нулевого порядка позволяет уменьшить такую важную характеристику задачи, как ее размерность. Действительно, из (7), (10) видно, что при $\lambda = 0$ уравнение для нахождения блочной матрицы M_1 вырождается в равенство, т.е. $M_1 = \text{const}$ при $\lambda = 0$. Это обстоятельство особенно важно при решении задач большой размерности.

Замечание 2. В случае композиционного синтеза регуляторов для непрерывных сингулярно возмущенных систем оптимальное решение представляет собой композицию терминального регулятора по «медленным» переменным и стационарного – по «быстрым» [4, 5], т.е., в случае непрерывных систем терминальное приведение «быстрых» переменных не достигается, тогда как на практике эта задача часто возникает. В случае же аппроксимации непрерывной системы дискретной, регулятор по «быстрым» переменным является терминальным. Таким образом, проблема терминального наведения «быстрых» переменных состояния в случае дискретных систем разрешена.

Замечание 3. Полученный в данной работе результат дает асимптотическое приближение нулевого порядка решения задачи (1),(2), при этом полученная асимптотика является равномерной на всем интервале времени $t \in [0, NT_0]$ только для «быстрого» решения, для «медленного» решения данная асимптотика будет неравномерной, по крайней мере, в некоторой окрестности конечной точки $t = NT_0$. Поэтому задача дальнейших исследований заключается в построении асимптотического приближения решения задачи (1), (2) равномерного на всем интервале времени $t \in [0, NT_0]$ как по «быстрым», так и по «медленным» переменным.

Библиографический список

1. Gajic Z. Optimal control of singularly perturbed linear systems and applications: high accuracy techniques / Z. Gajic, M. Lim. — NY.: Marcel Dekker, 2001. — 309 p.
2. Ogata K. Discrete-time control system / K. Ogata. — New Jersey: Upper Saddle River, 1994. — 745 p.
3. Иващенко Н.Н. Автоматическое регулирование / Н.Н. Иващенко. — М.: Машиностроение, 1973. — 606 с.
4. Дубовик С.А. Композиционный синтез терминальных регуляторов для систем с разделением движений / С.А. Дубовик // Радиоэлектроника и информатика: сб. науч. тр.— Харьков, 1998. — № 3. — С. 48–53.
5. Дубовик С.А. Метод композиции в синтезе регуляторов для сингулярно возмущенных систем / С.А. Дубовик // Динамические системы. — 2001. — Вып. 17. — С. 12–17.

Поступила в редакцию 07.11.2008 г.