

УДК.681.5.

Е.Г. Бойко, ст. преподаватель*Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: vm@sevgtu.sebastopol.ua***МОДЕЛЬ КОНТРОЛЯ СКРЫТЫХ ОТКАЗОВ
АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ**

Построена полумарковская модель процесса контроля скрытых отказов восстанавливаемой системы без отключения работающего компонента. Найдены стационарные характеристики надежности и эффективности качества ее функционирования.

Ключевые слова: полумарковская модель, скрытый отказ, контроль.

Повышение уровня автоматизации, совершенствование автоматического оборудования, возможно на основе улучшения его надежности. Поскольку наступление отказа аппаратуры обусловлено целым комплексом случайно проявляющих себя причин, то при исследовании критериев надежности необходимо учитывать и разнообразие изучаемых систем, и влияние периодичности контроля на своевременное обнаружение отказа.

Одна из важнейших задач, решение которой обеспечивает не только надежность автоматизированной производственной системы (АПС), но и качество выпускаемой продукции – своевременный контроль скрытых отказов [1]. В современной литературе рассматриваются математические модели процесса контроля-восстановления, учитывающие, в основном, влияние только периодичности контроля на технико-экономические показатели АПС [2], и мало внимания уделяется различным стратегиям проведения контроля, на которые необходимо обращать особое внимание для каждой исследуемой АПС индивидуально, в связи с многообразием контролируемых параметров и систем контроля.

Здесь представлена математическая модель контроля скрытых отказов восстанавливаемой системы, в которой отказ любого элемента влечет за собой выход из строя всей системы, что позволяет рассматривать ее как однокомпонентную. Предполагается, что скрытый отказ может быть обнаружен только при включенном контроле. Для описания процесса контроля-восстановления АПС используется полумарковский процесс (ПМП) с общим фазовым пространством состояний [3].

Целью статьи является определение стационарных характеристик функционирования восстанавливаемой системы без отключения работающей компоненты с учетом контроля скрытых отказов.

Рассмотрим систему, функционирующую следующим образом. В начальный момент времени система начала работу, контроль включен. Время безотказной работы системы – случайная величина (СВ) α с функцией распределения (ФР) $F(t) = P\{\alpha \leq t\}$ и плотностью распределения (ПР) $f(t)$. Контроль проводится через случайное время δ с ФР $R(t) = P\{\delta \leq t\}$ и ПР $r(t)$. Отказ обнаруживается только во время проведения контроля. Длительность проведения контроля СВ γ с ФР $V(t) = P\{\gamma \leq t\}$ и ПР $v(t)$. После обнаружения отказа система начинает восстановление, контроль отключается. Время восстановления системы СВ β с ФР $G(t) = P\{\beta \leq t\}$ и ПР $g(t)$. После восстановления все свойства системы полностью обновляются.

Для описания функционирования системы введем пространство полумарковских состояний

$$E = \{111, 211x, 210x, 101x, 200, 100x, 201\},$$

где 111 – система начала работать, контроль включен; 211x – начался контроль, система работоспособна, до наступления параметрического отказа осталось время x ; 210x – контроль окончился, система работоспособна, до наступления параметрического отказа осталось время x ; 101x – наступил параметрический отказ, проводится контроля, до обнаружения отказа осталось время x ; 200 – отказ обнаружен, контроль отключился, началось восстановление системы; 100x – система отказала, до начала контроля осталось время x ; 201 – система в отказе, начался контроль.

Определим вероятности переходов вложенной цепи Маркова (ВЦМ) $\{\xi_n, n \geq 0\}$ системы:

$$\begin{aligned} p_{111}^{211y} &= \int_0^\infty f(y+t)r(t)dt; \quad p_{111}^{100y} = \int_0^\infty r(y+t)f(t)dt; \quad p_{210x}^{211y} = r(x-y), \quad 0 < y < x; \\ p_{210x}^{100y} &= r(y+x), \quad y > 0; \quad p_{101x}^{200} = p_{100x}^{201} = p_{201}^{200} = p_{200}^{111} = 1; \\ p_{211x}^{101y} &= v(y+x), \quad y > 0; \quad p_{211x}^{210y} = v(x-y), \quad 0 < y < x. \end{aligned} \quad (1)$$

Обозначим через $\rho(111)$, $\rho(200)$ и $\rho(201)$ значения стационарного распределения ВЦМ $\{\xi_n, n \geq 0\}$ на состояниях 111, 200 и 201 и предположим существование стационарных плотностей $\rho(211x)$, $\rho(210x)$, $\rho(101x)$ и $\rho(100x)$ для состояний 211x, 210x, 101x и 100x соответственно. Составим для них систему интегральных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 = \rho(111) = \rho(200), \\ \rho(211x) = \rho(111) \int_0^\infty f(x+t)r(t)dt + \int_x^\infty \rho(210y)r(y-x)dy, \\ \rho(101x) = \int_0^\infty \rho(211y)v(x+y)dy, \\ \rho(210x) = \int_x^\infty \rho(211y)v(y-x)dy, \\ \rho(200) = \int_0^\infty \rho(101y)dy + \rho(201), \\ \rho(100x) = \rho(111) \int_0^\infty r(x+t)f(t)dt + \int_0^\infty \rho(210y)r(y+x)dy, \\ \rho(201) = \int_0^\infty \rho(100y)dy, \\ 2\rho_0 + \int_0^\infty \rho(100x)dx + \int_0^\infty \rho(211x)dx + \int_0^\infty \rho(211x)dx + \int_0^\infty \rho(211x)dx + \rho(201) = 1. \end{array} \right. \quad (2)$$

Последнее уравнение в системе (2) – условие нормировки.

Методом последовательных приближений можно показать, что система уравнений (2) имеет следующее решение:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 = \rho(111) = \rho(200), \\ \rho(211x) = \rho_0 \int_0^\infty f(x+t) \left[r(t) + \int_0^t h_\pi(y)r(t-y)dy \right] dt, \\ \rho(101x) = \rho_0 \int_0^\infty f(t)dt \left[\int_0^t r(y)v(t+x-y)dy + \int_0^t h_\pi(z)dz \int_0^{t-z} r(y)v(t+x-y-z)dy \right], \\ \rho(210x) = \rho_0 \int_0^\infty f(t+x)h_\pi(t)dt, \\ \rho(100x) = \rho_0 \int_0^\infty f(t) \left[r(t+x) + \int_0^t h_\pi(y)r(t+x-y)dy \right] dt, \\ \rho(201) = \rho_0 \int_0^\infty f(t) \left[\bar{R}(t) + \int_0^t h_\pi(y)\bar{R}(t-y)dy \right] dt. \end{array} \right. \quad (3)$$

Здесь ρ_0 находится из условия нормировки; $h_\pi(t) = \sum_{n=1}^\infty \pi^{*(n)}(t)$ – плотность функции

восстановления $H_1(t) = \sum_{n=1}^\infty (R * V)^{*(n)}(t)$ альтернирующего процесса; $\pi^{*(n)}(t)$ – n -кратная свертка

функции $\pi(t) = \int_0^t r(y)v(t-y)dy$.

Для исходной системы множества работоспособных состояний E_+ и отказовых состояний E_- имеют вид соотношения:

$$E_+ = \{111, 211x, 210x\}, \quad E_- = \{101x, 200, 100x, 201\}.$$

Найдем стационарные характеристики системы. Для этого определим средние времена пребывания в состояниях системы:

$$M\theta_{111} = \int_0^{\infty} \bar{F}(t) \bar{R}(t) dt; \quad M\theta_{211x} = \int_0^x \bar{V}(t) dt; \quad M\theta_{101x} = x; \\ M\theta_{201} = M\gamma; \quad M\theta_{100x} = x; \quad M\theta_{200} = M\beta; \quad M\theta_{210x} = \int_0^x \bar{R}(t) dt. \quad (4)$$

Среднюю стационарную наработку на отказ T_+ и среднее стационарное время восстановления T_- найдем по формулам [4]

$$T_+ = \frac{\int_{E_+} m(e) p(de)}{\int_{E_+} P(e, E_-) p(de)}, \quad T_- = \frac{\int_{E_-} m(e) p(de)}{\int_{E_+} P(e, E_-) p(de)}, \quad (5)$$

где $p(de)$ – стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n, n \geq 0\}$; $m(e)$ – средние времена пребывания в состояниях системы; $P(e, E_-)$ – вероятности переходов ВЦМ $\{\xi_n, n \geq 0\}$ из работоспособных состояний в отказовые.

С учетом формул (1), (3) и (4), найдем выражения, входящие в (5):

$$\int_{E_+} m(e) p(de) = m(110) p(110) + \int_0^{\infty} m(211x) p(211x) dx + \\ + \int_0^{\infty} m(210x) p(210x) dx = \rho_0 \int_0^{\infty} \bar{F}(t) \bar{R}(t) dt + \rho_0 \int_0^{\infty} dx \int_0^x \bar{R}(t) dt \int_0^{\infty} h_{\pi}(y) f(x+y) dy + \\ + \rho_0 \int_0^{\infty} dx \int_0^x \bar{V}(t) dt \int_0^{\infty} f(x+z) r(z) dz + \rho_0 \int_0^{\infty} dx \int_0^x \bar{V}(t) dt \int_0^{\infty} f(x+z) dz \int_0^z h_{\pi}(y) r(z-y) dy. \quad (6)$$

Преобразовывая второе, третье и четвертое слагаемые выражения (6), и с учетом формулы

$$\bar{R}(t) + \int_0^x \bar{V}(x-y) r(y) dy + \int_0^x h_{\pi}(z) dz \int_0^{x-z} \bar{V}(x-y-z) r(y) dy + \int_0^x \bar{R}(x-y) h_{\pi}(y) dy = 1,$$

получаем:

$$\int_{E_+} m(e) p(de) = \rho_0 M\alpha.$$

Далее,

$$\int_{E_-} m(e) p(de) = \int_0^{\infty} m(100x) p(100x) dx + \int_0^{\infty} m(101x) p(101x) dx + m(201) p(201) + m(200) p(200) = \\ = \rho_0 \int_0^{\infty} x dx \int_0^{\infty} f(t) dt \int_0^t r(y) v(t+x-y) dy + \rho_0 \int_0^{\infty} x dx \int_0^{\infty} f(t) dt \int_0^t h_{\pi}(z) dz \int_0^{t-z} r(y) v(t+x-y-z) dy + M\beta \rho_0 + \\ + M\gamma \rho_0 \int_0^{\infty} f(t) \bar{R}(t) dt + M\gamma \rho_0 \int_0^{\infty} f(t) dt \int_0^t h_{\pi}(y) \bar{R}(t-y) dy + \\ + \rho_0 \int_0^{\infty} x dx \int_0^{\infty} f(t) r(t+x) dt + \rho_0 \int_0^{\infty} x dx \int_0^{\infty} f(t) dt \int_0^t h_{\pi}(y) r(t+x-y) dy. \quad (7)$$

Меняя порядок интегрирования в слагаемых, входящих в выражение (7), и, интегрируя их по частям, получаем:

$$\int_{E_-} m(e) p(de) = \rho_0 \left((M\gamma + M\delta) \left(1 + \int_0^{\infty} \bar{F}(z) h_{\pi}(z) dz \right) + M\beta - M\alpha \right).$$

Тогда находим, что

$$\int_E m(e) \rho(de) = \rho_0 \left((M\gamma + M\delta) \left(1 + \int_0^\infty \bar{F}(z) h_\pi(z) dz \right) + M\beta \right). \quad (8)$$

Далее,

$$\int_{E_+} P(e, E_-) \rho(de) = \rho(111)P(111, E_-) + \int_0^\infty \rho(211x)P(211x, E_-)dx + \int_0^\infty \rho(210x)P(210x, E_-)dx = \rho_0.$$

Таким образом, средняя стационарная наработка на отказ T_+ имеет вид: $T_+ = M\alpha$.

Среднее стационарное время восстановления T_- определяется формулой:

$$T_- = M\beta - M\alpha + (M\delta + M\gamma) \left(1 + \int_0^\infty \bar{F}(z) h_\pi(z) dz \right).$$

Стационарный коэффициент готовности найдем из соотношения: $K_T = \frac{T_+}{T_+ + T_-}$.

Тогда получаем:

$$K_T = \frac{M\alpha}{M\beta + (M\delta + M\gamma) \left(1 + \int_0^\infty \bar{F}(z) h_\pi(z) dz \right)}. \quad (9)$$

Получим формулу для K_T исследуемой системы с учетом календарного контроля при условии неслучайного времени периодичности контроля $\tau > 0$. Учитывая, что в этом случае $R(t) = 1(t - \tau)$, где $\tau = \text{const}$, выражение (9), принимает вид:

$$K_T = \frac{M\alpha}{M\beta + (\tau + M\gamma) \left(1 + \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \bar{F}(z + n\tau) v^{*(n)} dz \right)}.$$

Предположим, что и периодичность контроля, и длительность контроля неслучайны, т.е. $\delta = \tau$; $\gamma = h$. Тогда формула (9) примет вид:

$$K_T = \frac{M\alpha}{M\beta + (\tau + h) \sum_{n=0}^\infty \bar{F}(n(\tau + h))}.$$

Важными характеристиками для оценки качества функционирования АС, являются экономические критерии, такие как средняя прибыль в единицу календарного времени S и средние затраты в единицу времени исправного функционирования C . Для их определения воспользуемся формулами [2]:

$$S = \frac{\int_E m(e) f_s(e) \rho(de)}{\int_E m(e) \rho(de)}, \quad C = \frac{\int_E m(e) f_c(e) \rho(de)}{\int_{E_+} m(e) \rho(de)}. \quad (10)$$

Здесь $f_s(e)$, $f_c(e)$ – функции, определяющие соответственно доход и затраты в каждом состоянии.

Для данной АС функции $f_s(e)$ и $f_c(e)$ имеют вид

$$f_s(e) = \begin{cases} c_1, e \in \{111, 211x_1\}, \\ -c_2, e = 220, \\ -c_3, e \in \{212x_1, 202\}, \\ -c_4, e = 101x_2, \end{cases} \quad f_c(e) = \begin{cases} 0, e \in \{111, 211x_1\}, \\ c_2, e = 220, \\ c_3, e \in \{212x_1, 202\}, \\ c_4, e = 101x_2, \end{cases} \quad (11)$$

где c_1 – прибыль, получаемая за единицу времени функционирования; c_1 – затраты за единицу времени восстановления; c_3 – затраты за единицу времени на контроль; c_4 – потери за единицу времени от брака.

Используя результаты формул (3), (4), (8) и (11), находим значения выражений (10):

$$\begin{aligned}
S = & \left[c_1 \int_0^\infty \bar{F}(y) \left(\bar{R}(y) + \int_0^y h_\pi(t) \bar{R}(y-t) dt \right) dy - (c_3 - c_4) M \gamma \int_0^\infty f(y) \left(\bar{R}(y) + \int_0^y h_\pi(t) \bar{R}(y-t) dt \right) dy + \right. \\
& + c_3 \int_0^\infty \bar{V}(z) dz \int_0^\infty f(y+z) \left(\bar{R}(y) + \int_0^y h_\pi(t) \bar{R}(y-t) dt \right) dy - c_3 M (\gamma \wedge \alpha) + c_4 M \alpha - c_2 M \beta - \\
& \left. - c_3 \int_0^\infty \bar{V}(t) dt \int_0^\infty \bar{F}(y+t) h_\pi(y) dy - c_4 (M \gamma + M \delta) \left(1 + \int_0^\infty \bar{F}(z) h_\pi(z) dz \right) \right] / \left[M \beta + (M \delta + M \gamma) \left(1 + \int_0^\infty \bar{F}(z) h_\pi(z) dz \right) \right],
\end{aligned} \quad (12)$$

а также

$$\begin{aligned}
C = & \left[c_2 M \beta + c_3 M (\gamma \wedge \alpha) + c_4 M \alpha + c_4 (M \gamma + M \delta) \left(1 + \int_0^\infty \bar{F}(z) h_\pi(z) dz \right) + \right. \\
& + (c_3 - c_4) M \gamma \int_0^\infty f(y) \left(\bar{R}(y) + \int_0^y h_\pi(t) \bar{R}(y-t) dt \right) dy + c_3 \int_0^\infty \bar{V}(t) dt \int_0^\infty \bar{F}(y+t) h_\pi(y) dy - \\
& \left. - c_3 \int_0^\infty \bar{V}(z) dz \int_0^\infty f(y+z) \left(\bar{R}(y) + \int_0^y h_\pi(t) \bar{R}(y-t) dt \right) dy \right] / M \alpha.
\end{aligned} \quad (13)$$

Предположим, что и периодичность контроля, и длительность контроля неслучайны: $\delta = \tau$; $\gamma = h$. Тогда формулы (12), (13) примут вид:

$$\begin{aligned}
S(\tau) = & \left[(c_1 + c_4) M \alpha - c_2 M \beta + (c_3 - c_4) h \bar{F}(\tau) + c_1 \left(\sum_{n=1}^\infty n \int_{n(\tau+h)}^{(n+1)(\tau+h)} \bar{F}(y) dy - \right. \right. \\
& \left. \left. - \int_\tau^\infty \bar{F}(y) dy - \sum_{n=1}^\infty n \int_{n(\tau+h)}^{(n+1)(\tau+h)} \bar{F}(y+\tau) dy \right) + (c_3 - c_4) h \sum_{n=1}^\infty \bar{F}(n(\tau+h) + \tau) - \right. \\
& \left. - (c_3 h + c_4 \tau) \left(1 + \sum_{n=1}^\infty \bar{F}(n(\tau+h)) \right) - c_3 \sum_{n=0}^\infty \int_0^h \bar{F}(n(\tau+h) + z + \tau) dz \right] / \left[M \beta + \right. \\
& \left. + (h + \tau) \left(1 + \sum_{n=1}^\infty \bar{F}(n(\tau+h)) \right) \right]. \\
C(\tau) = & \left[c_2 M \beta - c_4 M \alpha + (c_4 - c_3) h \bar{F}(\tau) + (c_3 h + c_4 \tau) \left(1 + \sum_{n=1}^\infty \bar{F}(n(h+\tau)) \right) + \right. \\
& \left. + (c_4 - c_3) h \sum_{n=1}^\infty \bar{F}(n(h+\tau) + \tau) + c_3 \sum_{n=1}^\infty \int_0^h \bar{F}(n(\tau+h) + z + \tau) dz \right] / M \alpha.
\end{aligned}$$

В дальнейших исследованиях планируется использовать полученную методику для построения и исследования математических моделей многокомпонентных АС с последовательным и параллельным соединениями, а также для различных видов контроля.

Бibliографический список

1. Черкесов Г.Н. Надежность аппаратно-программных комплексов / Г.Н. Черкесов. — СПб.: Питер, 2005. — 479 с.
2. Каштанов В.А. Теория надежности сложных систем (теория и практика) / В.А. Каштанов, А.И. Медведев. — М.: Изд-во Европейского центра по качеству, 2002. — 470 с.
3. Королюк В.С. Стохастические модели систем / В.С. Королюк. — К.: Наук. думка, 1989. — 208 с.
4. Копп В.Я. Стохастические модели автоматизированных систем с временным резервированием / В.Я. Копп, Ю.Е. Обжерин, А.И. Песчанский. — Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2000. — 284 с.

Поступила в редакцию 19.05.2010 г.