

УДК 681.5

И.С. Дубовик,**Б.А. Скороход, профессор, д-р техн. наук***Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***ГРАДИЕНТНЫЙ АЛГОРИТМ ОБУЧЕНИЯ НЕЧЁТКИХ АДДИТИВНЫХ СИСТЕМ**

Рассматривается адаптивная нейро-нечёткая сеть с логическим выводом по Мамдани. Предлагается повысить качество аппроксимации произвольной системы нейро-нечёткой сетью методом, основанным на алгоритме наискорейшего спуска.

Ключевые слова: нечёткая система, нейронная сеть, система с логическим выводом по Мамдани, градиентный спуск, адаптивная система.

Один из основных методов конструирования нечётких систем состоит в использовании так называемого адаптивного нейро-нечёткого подхода [1], основная идея которого заключается в том, что помимо знаний экспертов, лежащих в основе базы знаний (правил, лингвистических переменных, функций принадлежности) используется числовая информация, представляющая собой множество различных значений входов и соответствующих им выходов. Вводится критерий, определяющий ошибку между имеющимися экспериментальными данными и значением контролируемой переменной на выходе нечёткой системы. Далее функции принадлежности параметризуются и решается тем или иным способом задача оптимизации. Эффективность её решения в значительной степени зависит от используемого алгоритма оценки частных производных относительно настраиваемых параметров.

Ситуация здесь примерно такая же, как и в случае обучения многослойного персептрона – необходим алгоритм послойного вычисления градиента (алгоритм обратного распространения ошибки). Для системы Сугено алгоритм представлен в [1].

Настоящая работа посвящена разработке алгоритма настройки параметров нечёткой системы типа Мамдани, заданной в аддитивной форме.

Пусть имеется некоторая система с v входами input_i , $i = \overline{1, v}$ и одним выходом x , указанная на рисунке 1.



Рисунок 1 – Система типа чёрного ящика

В статическом случае

$$x = f(\text{input}_1, \text{input}_2, \dots, \text{input}_v) = f(\text{Input}), \quad (1)$$

где $\text{Input} = (\text{input}_1, \text{input}_2, \dots, \text{input}_v)^T$; $f(\cdot)$ – неизвестная функция; input_i , $i = \overline{1, v}$ и x не зависят от времени.

В случае динамической системы входы и выход связаны зависимостью

$$x(t) = f(x(t-T_s), x(t-2T_s), \dots, x(t-vT_s)), \quad (2)$$

где $\text{input}_1 = x(t-T_s)$, $\text{input}_2 = x(t-2T_s)$, ..., $\text{input}_v = x(t-vT_s)$; T_s – шаг дискретизации по времени. Как и в первом случае, функция $f(\cdot)$ предполагается неизвестной.

Требуется по информации экспертов и имеющимся измерениям входов и выхода в (1) input_i^j , $i = \overline{1, v}$, x^j , где $j = \overline{1, N}$, N – количество измерений, оценить функцию $f(\cdot)$, т.е. восстановить зависимость между входами и выходом системы, показанной на рисунке 1.

Нетрудно видеть, что восстановление зависимости (2) сводится к восстановлению статической зависимости (1).

В работе [2] задача в такой постановке была решена для случая двух входных переменных. Было показано также, что характеристики такой системы могут превосходить характеристики системы типа Сугено.

Более точно постановка задачи выглядит следующим образом.

Предположим, что на множестве изменения входных и выходных переменных определены лингвистические переменные

$$\text{input}_i = (\mu_{i1}(\text{input}_i), \dots, \mu_{ik_i}(\text{input}_i)), i = \overline{1, v}, \quad (3)$$

$$x = (\mu(x_1), \dots, \mu(x_i)), \quad (4)$$

где $\mu_i(\text{input}_i)$ – j -я функция принадлежности для i -ой входной переменной.

Пусть функции (3) и (4) параметризованы и определены с точностью до неизвестных параметров, для которых заданы некоторые априорные значения. Далее предполагается, что все функции принадлежности являются равнобедренными треугольниками.

Обозначим центр и половину основания i -ой функции принадлежности j -го входа как c_{ij} и b_{ij} , соответственно. Запишем:

$$f_{ij}(x) = \begin{cases} 1 + (x - c_{ij})/b_{ij}, & \text{если } -b_{ij} \leq (x - c_{ij}) \leq 0, \\ 1 - (x - c_{ij})/b_{ij}, & \text{если } 0 \leq (x - c_{ij}) \leq b_{ij}, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (5)$$

Аналогично, для выхода нечёткой системы обозначим центр и половину основания функции принадлежности как y_j и β_j .

Для треугольных функций принадлежности центроидная дефазификация может быть записана в следующем виде

$$\hat{x} = \frac{\sum_{j=1}^n m(y_j) y_j J_j}{\sum_{j=1}^n m(y_j) J_j},$$

где y_j и J_j – центр основания и площадь j -ой выходной функции принадлежности (для равнобедренных треугольников, которые используем, J_j равно половине основания, т.е. $J_j = \beta_j$).

Нечёткая выходная функция $m(y)$ вычисляется как

$$m(y) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} \dots \sum_{k_v} m_{k_1 k_2 k_3 \dots k_v}(y),$$

где v – количество входов; $m_{k_1 k_2 k_3 \dots k_v}(y)$ – нечёткая функция с входом 1 в классе k_1 , входом 2 в классе k_2 , входом 3 в классе k_3 , ..., входом v в классе k_v

$$m_{k_1 \dots k_v}(y) = w_{k_1 \dots k_v} m_{ok_1 \dots k_v}(y),$$

где $w_{k_1 \dots k_v}$ – уровень активации выхода, когда вход 1 в классе k_1 , ..., вход v в классе k_v ; $m_{ok_1 \dots k_v}(y)$ – нечёткая выходная функция, которая активируется, когда вход 1 в классе k_1 , ..., вход v в классе k_v

$$w_{k_1 \dots k_v} = \min[f_{k_1 1}(\text{input } 1), \dots, f_{k_v 1}(\text{input } v)],$$

где $f_{ij}(x)$ определена в (5).

Введём следующий квадратический критерий качества аппроксимации нечёткой системой функции $f(\cdot)$

$$E = \frac{1}{2N} \sum_{q=1}^N E_q^2,$$

$$E_q \equiv \hat{x}_q - x_q,$$

где N – количество обучающих выборок.

Требуется выбрать параметры функций принадлежности таким образом, чтобы критерий качества E принимал минимальное значение.

Предлагается минимизировать E методом наискорейшего спуска, используя частные производные ошибки по положению и размерам входных и выходных функций принадлежности системы:

$$c_{ij}(k+1) = c_{ij}(k) - \eta_c \frac{\partial E(k)}{\partial c_{ij}},$$

$$b_{ij}(k+1) = b_{ij}(k) - \eta_b \frac{\partial E(k)}{\partial b_{ij}},$$

$$y_j(k+1) = y_j(k) - \eta_y \frac{\partial E(k)}{\partial y_j},$$

$$\beta_j(k+1) = \beta_j(k) - \eta_\beta \frac{\partial E(k)}{\partial \beta_j}.$$

Здесь η_c , η_b , η_y и η_β – размеры шагов градиентного спуска.

Таким образом, задача сводится к нахождению частных производных от E по параметрам c_{ij} , b_{ij} , y_j , β_j . Центры входных и выходных функций принадлежности c_{ij} и y_j будем называть положением, а половины основания b_{ij} и β_j – размером.

Производная ошибки по положению входных функций принадлежности

Используя соотношение (5), получаем:

$$\frac{\partial E}{\partial c_{ij}} = \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N E_q \frac{\partial \hat{x}_q}{\partial c_{ij}},$$

$$\frac{\partial \hat{x}_q}{\partial c_{ij}} = \sum_{p=1}^n \frac{\partial \hat{x}_q}{\partial m_p} \frac{\partial m_p}{\partial c_{ij}} \quad [m_p \equiv m(y_p)], \quad (6)$$

$$\frac{\partial \hat{x}_q}{\partial m_p} = \frac{J_j(y_j - \hat{x}_q)}{\sum_{i=1}^n m_i J_i}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial m_p}{\partial c_{ij}} = \sum_{k_1} \dots \sum_{k_v} r_{k_1 \dots k_v, p} \frac{\partial w_{k_1 \dots k_v}}{\partial c_{ij}}. \quad (8)$$

В (6), n – количество функций принадлежности у выхода. В (8), k_i принимает значения от 1 до количества функций принадлежности у i -го входа; $r_{k_1 \dots k_v, p} = 1$, если

$[(\text{input } 1) \in \text{класс } k_1 \text{ and } \dots \text{ and } (\text{input } v) \in \text{класс } k_v] \Rightarrow (\text{output} \in \text{класс } p)$ и 0 в противном случае; $\frac{\partial w_{k_1 \dots k_v}}{\partial c_{ij}}$

определяется как

$$\frac{\partial w_{k_1 \dots k_v}}{\partial c_{ij}} = \begin{cases} \frac{\partial f_{k_1}}{\partial c_{ij}}, & \text{если } f_{k_1}(\text{input } 1) = \min(f_{k_m}(\text{input } m)), m = \overline{1, v}, \\ \frac{\partial f_{k_2}}{\partial c_{ij}}, & \text{если } f_{k_2}(\text{input } 2) = \min(f_{k_m}(\text{input } m)), m = \overline{2, v}, \\ \dots & \dots \\ \frac{\partial f_{k_v}}{\partial c_{ij}}, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Частные производные функции принадлежности $f(\cdot)$ по входным центрам равны

$$\frac{\partial f_{k_m}(\text{input } m)}{\partial c_{ij}} = \begin{cases} -\delta_{ik_m} \delta_{jm} / b_{im}, & \text{если } c_{im} - b_{im} \leq \text{input } m \leq c_{im}, \\ \delta_{ik_m} \delta_{jm} / b_{im}, & \text{если } c_{im} \leq \text{input } m \leq c_{im} + b_{im}, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где δ_{ik} – дельта Кронекера ($\delta_{ik} = 1$ если $i = k$ и 0 в противном случае).

Производная ошибки по размерам входных функций принадлежности

Снова используя соотношение (5), получаем:

$$\frac{\partial E}{\partial b_{ij}} = \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N E_q \frac{\partial \hat{x}_q}{\partial b_{ij}},$$

$$\frac{\partial \hat{x}_q}{\partial b_{ij}} = \sum_{p=1}^n \frac{\partial \hat{x}_q}{\partial m_p} \frac{\partial m_p}{\partial b_{ij}}.$$

Здесь $\frac{\partial \hat{x}_q}{\partial m_p}$ определено в (7), а $\frac{\partial m_p}{\partial b_{ij}}$ вычисляется как

$$\frac{\partial m_p}{\partial b_{ij}} = \sum_{k_1} \dots \sum_{k_v} r_{k_1 \dots k_v, p} \frac{\partial w_{k_1 \dots k_v}}{\partial b_{ij}},$$

где $r_{k_1 \dots k_v, p}$ определено выше в (8), а $\frac{\partial w_{k_1 \dots k_v}}{\partial b_{ij}}$ вычисляется как

$$\frac{\partial w_{k_1 \dots k_v}}{\partial b_{ij}} = \begin{cases} \frac{\partial f_{k_1}}{\partial b_{ij}}, & \text{если } f_{k_1}(\text{input } 1) = \min(f_{k_m}(\text{input } m)), m = \overline{1, v}, \\ \frac{\partial f_{k_2}}{\partial b_{ij}}, & \text{если } f_{k_2}(\text{input } 2) = \min(f_{k_m}(\text{input } m)), m = \overline{2, v}, \\ \dots & \dots \\ \frac{\partial f_{k_v}}{\partial b_{ij}}, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Частные производные функции принадлежности $f(\cdot)$ по входным половинам оснований определяются как

$$\frac{\partial f_{k_m}(\text{input } m)}{\partial b_{ij}} = \begin{cases} \delta_{ik_m} \delta_{jm} \frac{[1 - f_{k_m}(\text{input } m)]}{b_{im}}, & \text{если } c_{im} - b_{im} \leq \text{input } m \leq c_{im} + b_{im}, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Производная ошибки по положению выходных функций принадлежности

Частная производная целевой функции E по центрам выходных функций принадлежности вычисляется как

$$\frac{\partial E}{\partial y_j} = \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N E_q \frac{\partial \hat{x}_q}{\partial y_j},$$

$$\frac{\partial \hat{x}_q}{\partial y_j} = \frac{m_j J_j}{\sum_{i=1}^n m_i J_i}.$$

Производная ошибки по размерам выходных функций принадлежности

Частная производная целевой функции E по половинам оснований выходных функций принадлежности вычисляется как

$$\frac{\partial E}{\partial \beta_j} = \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N E_q \frac{\partial \hat{x}_q}{\partial \beta_j},$$

$$\frac{\partial \hat{x}_q}{\partial \beta_j} = \frac{m_j \sum_{i=1}^n m_i \beta_i (y_j - y_i)}{\left(\sum_{i=1}^n m_i \beta_i \right)^2},$$

где n – количество функций принадлежности у выхода системы.

Предполагается в дальнейшем использовать полученные результаты в задачах восстановления зависимостей профилей температур по экспериментальным данным, снятым дрейфтерами, и прогноза временных рядов, образованных по гидрофизической информации, поступающей со спутников.

Библиографический список

1. Jyh-Shing Roger Jang. ANFIS: Adaptive-Network-Based Fuzzy Inference System / J.-S.R.Jang // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. — 1993. — № 3. — P. 665 – 684.
2. Simon Dan. Design and rule base reduction of a fuzzy filter for the estimation of motor currents / D. Simon // International Journal of Approximate Reasoning. — 2000. — № 25. — P. 145 – 167.

Поступила в редакцию 18.05.2010 г.