

УДК.681.5.

Ю.Е. Обжерин, профессор, д-р техн. наук,

Е.Г. Бойко, ассистент, А.В. Крупин, аспирант

Севастопольский национальный технический университет

Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: vm@sevgtu.sebastopol.ua

ПОЛУМАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ КОНТРОЛЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОТКАЗОВ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ

Построена полумарковская модель процесса контроля параметрических отказов двухкомпонентной автоматизированной восстанавливаемой системы, найдены стационарные характеристики надежности ее функционирования.

Одна из важнейших задач, решение которой обеспечивает не только надежность автоматизированной системы (АС), но и качество выпускаемой продукции – своевременный контроль параметрических отказов [1]. В современной литературе рассматриваются математические модели процесса контроля-восстановления, учитывающие, в основном, влияние только периодичности контроля на технико-экономические показатели АС [2], и мало внимания уделяется различным стратегиям проведения контроля, на которые необходимо обращать особое внимание для каждой исследуемой АС индивидуально, в связи с многообразием контролируемых параметров и систем контроля. Большинство результатов получено для однокомпонентных систем.

Современный рост автоматизации технических прогрессов, внедрение новых технологий, развитие информационной базы значительно повышает надежность АС. Однако ни АСУ, ни автоматизированные системы контроля, применяемые для обеспечения бесперебойной работы АС, не решают проблемы своевременного обнаружения скрытых отказов отдельных элементов и всей АС. Своевременно выявленный параметрический отказ, правильно составленная программа контроля, позволяет значительно повысить надежность и экономические характеристики системы.

На данном этапе мало внимания уделяется построению моделей обнаружения параметрических отказов, в них не учитывается многообразие скрытых отказов, а также влияние ошибок контрольно-измерительных систем на достоверность результатов контроля [1]. Большинство разработанных математических моделей функционирования АС с учетом контроля не учитывают структуру контролируемой системы: параллельное или последовательное соединение ее элементов [2].

Целью статьи является определение стационарных характеристик надежности функционирования двухкомпонентной АС с учетом контроля параметрических отказов.

Для определения оптимального периода контроля параметрических отказов решена задача математического описания функционирования двухкомпонентной АС.

В статье рассматривается математическая модель контроля параметрических отказов двухкомпонентной восстанавливаемой системы. Предполагается, что параметрические отказы могут быть обнаружены только при включенном контроле. Для описания процесса контроля-восстановления системы используется полумарковский процесс (ПМП) с общим фазовым пространством состояний [3].

Опишем функционирование рассматриваемой двухкомпонентной системы. Система состоит из двух последовательных компонентов К1 и К2, работающих независимо. Время безотказной работы компонентов – случайные величины (СВ) α_1 и α_2 с функциями распределения (ФР) $F_1(t) = P\{\alpha_1 \leq t\}$

и $F_2(t) = P\{\alpha_2 \leq t\}$ и плотностями распределения (ПР) $f_1(t)$, $f_2(t)$ соответственно. Контроль проводится через случайное время β с ФР $G(t) = P\{\beta \leq t\}$ и ПР $g(t)$. Отказ обнаруживается только во время проведения контроля. После обнаружения отказа в первой или во второй компонентах (К1), (К2), начинается их восстановление. В случае отказа обеих компонент система приступает к работе после восстановления последней. Предположим, что время безотказной работы системы значительно больше времени восстановления и времени проведения контроля. Тогда у описываемой системы будет мгновенное восстановление и мгновенный контроль. После восстановления все свойства системы полностью обновляются.

Для описания функционирования системы введем следующее пространство полумарковских состояний:

$$E = \{3111, 1010x_2z, 2100x_1z, 3111x_2, 2000z, 3111x_1, 1000z, 3111x_1x_2\},$$

где 3111 – система начала работать, контроль включен; 3111 x_1x_2 – начался контроль, система работоспособна, до наступления параметрического отказа К1 осталось время x_1 , до наступления параметрического отказа К2 осталось время x_2 ; 1010 x_1x_2 – наступил параметрический отказ К1, до

наступления параметрического отказа К2 осталось время x_1 ; до обнаружения отказа осталось время x_3 ; 3111x2 – произошел контроль, обнаружен отказ К1, она восстановилась и начала работу, до наступления параметрического отказа К2 осталось время x_2 ; 3111x1 – произошел контроль, обнаружен отказ К2, она восстановилась и начала работу, до наступления параметрического отказа К1 осталось время x_2 ; 1000x2z – система отказала, до начала контроля осталось время z ; 2000x2z – система в отказе, до начала контроля осталось время z .

Определим вероятности переходов вложенной цепи Маркова (ВЦМ) $\{\xi_n, n \geq 0\}$ системы:

$$\begin{aligned}
 p_{3111}^{2100x_1z} &= \int_0^\infty g(z+t) f_1(x_1+t) f_2(t) dt, x_1 > 0, z > 0; & p_{3111x_1x_2}^{1010y_2z} &= g(x_1+z), x_1 < x_2, y_2 = x_2 - x_1, z > 0; \\
 p_{3111}^{3111x_1x_2} &= \int_0^\infty g(t) f_1(x_1+t) f_2(x_2+t) dt, x_1 > 0, x_2 > 0; & p_{3111x_1x_2}^{2100y_1z} &= g(x_2+z), x_1 > x_2, y_1 = x_1 - x_2, z > 0; \\
 p_{3111}^{1010x_2z} &= \int_0^\infty g(z+t) f_1(t) f_2(x_2+t) dt, x_2 > 0, z > 0; & p_{3111x_1x_2}^{3111y_1y_2} &= g(t); \\
 p_{3111x_2}^{2100x_1z} &= g(x_2+z) f_1(t+x_1); x_2 > 0; x_1 > 0; z > 0; & p_{3111x_2}^{1010x_2z} &= g(t+z) f_1(t); z > 0; \\
 p_{3111x_2}^{3111x_1x_2} &= g(t) f_1(t+x_1); x_1 > 0; & p_{3111x_1}^{2100x_1z} &= g(t+z) f_2(t); z > 0; \\
 p_{3111x_1}^{1010x_2z} &= g(t+x_3) f_2(t+x_2); x_2 > 0; z > 0; & p_{3111x_1}^{3111x_1x_2} &= g(t) f_2(t+x_2); x_2 > 0; \\
 p_{1010x_2z}^{3111x_2} &= p_{1010x_2z}^{2000z} = p_{2100x_1z}^{3111x_1} = p_{2100x_1z}^{1000z} = p_{2000z}^{3111} = p_{1000z}^{3111} = 1.
 \end{aligned}$$

Обозначим через $\rho(3111)$ значение стационарного распределения ВЦМ $\{\xi_n, n \geq 0\}$ на состоянии 3111 и предположим существование стационарной плотности $\rho(3111x_1x_2)$, $\rho(1010x_2z)$, $\rho(2110x_1z)$, $\rho(1000z)$, $\rho(2000z)$, $\rho(3111x_2)$, $\rho(3111x_1)$ для состояний 1010x2z, 2100x1z, 3111x2, 2000z, 3111x1, 1000z, 3111x1x2 соответственно. Составим для них систему интегральных уравнений.

$$\begin{cases}
 \rho_0 = \rho(3111) = \int_0^\infty \rho(1000y) dy + \int_0^\infty \rho(2000y) dy, \\
 \rho(3111x_1x_2) = \rho(3111) \int_0^\infty f_1(x_1+t) g(t) f_2(x_2+t) dt + \\
 + \int_0^\infty \rho(3111x_1+t) f_2(x_2+t) g(t) dt + \int_0^\infty \rho(3111x_2+t) f_1(x_1+t) g(t) dt + \int_0^\infty \rho(3111x_1+y, x_2+y) g(y) dy, \\
 \rho(1010x_2z) = \rho(3111) \int_0^\infty f_1(t) g(t+z) f_2(x_2+t) dt + \\
 + \int_0^\infty \rho(3111t) f_2(x_2+t) g(t+z) dt + \int_0^\infty \rho(3111x_2+t) f_1(t) g(t+z) dt + \int_0^\infty \rho(3111y, x_2+y) g(z+y) dy, \\
 \rho(2100x_1z) = \rho(3111) \int_0^\infty f_1(x_1+t) g(z+t) f_2(t) dt + \\
 + \int_0^\infty \rho(3111x_1+t) f_2(t) g(t+z) dt + \int_0^\infty \rho(3111t) f_1(x_1+t) g(t+z) dt + \int_0^\infty \rho(3111x_1+y, y) g(y+z) dy, \\
 \rho(1000z) = \int_0^\infty \rho(2100x_1, z+x_1) dx_1, \quad \rho(2000z) = \int_0^\infty \rho(1010x_2, z+x_2) dx_2, \\
 \rho(3111x_1) = \int_0^\infty \rho(2100x_1+z, z) dz, \quad \rho(3111x_2) = \int_0^\infty \rho(1010x_2+z, z) dz, \\
 \rho_0 + \int_0^\infty \int_0^\infty \rho(3111x_1x_2) dx_1 dx_2 + \int_0^\infty \int_0^\infty \rho(1010x_2z) dx_2 dz + \int_0^\infty \int_0^\infty \rho(2100x_1z) dx_1 dz + \\
 + \int_0^\infty \rho(1000z) dz + \int_0^\infty \rho(2000z) dz + \int_0^\infty \rho(3111x_1) dx_1 + \int_0^\infty \rho(3111x_2) dx_2 = 1.
 \end{cases} \quad (1)$$

Множества работоспособных состояний E_+ и отказовых состояний E_- рассматриваемой системы имеют вид:

$$E_+ = \{3111, 3111x_1x_2, 3111x_1, 3111x_2\}, E_- = \{1010x_2z, 2100x_1z, 2000z, 1000z\}.$$

Определим средние времена пребывания в состояниях системы:

$$M\theta_{3111} = \int_0^\infty \overline{F_1(t)} \overline{F_2(t)} \overline{G(t)} dt; M\theta_{3111x_1} = \int_0^{x_1 \wedge x_2} \overline{G(t)} dt; M\theta_{3111x_2} = \int_0^{x_2} \overline{F_1(t)} \overline{G(t)} dt; M\theta_{1000z} = z$$

$$M\theta_{3111x_1} = \int_0^{x_1} \overline{F_2(t)} \overline{G(t)} dt; M\theta_{1010x_2z} = x_2 \wedge z; M\theta_{2100x_1z} = x_1 \wedge z; M\theta_{2000z} = z. \quad (2)$$

Рассмотрим однородный случай, когда ФР времени безотказной работы компонентов имеют одинаковое распределение. Тогда $F_1(t) = F_2(t) = F(t)$, $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$.

Пусть

$$\bar{i} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = 2, \\ 2, & \text{если } i = 1. \end{cases} \quad (3)$$

С учетом (3), можно показать, что решение системы уравнений (1) имеет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \rho_0 &= \rho(3111), \\ \rho(3111x_1x_2) &= \rho_0 \int_0^\infty f(x_1+t) f(x_2+t) h_g(t) dt + \rho_0 \sum_{i=1}^2 \left(\int_0^\infty f(x_i+t) h_g(t) dt \int_0^\infty f(x_i+t+y) h(y) dy + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty f(x_i+t) h_g(t) dt \int_0^\infty \pi(x_i+t, y) dy \int_0^\infty f(y+z) h(z) dz \right); \\ \rho(3111x_1) &= \rho(3111x_2) = \rho_0 \int_0^\infty f(x+y) h(y) dy + \rho_0 \int_0^\infty \pi(x, y) dy \int_0^\infty f(y+t) h(t) dt; \\ \rho(1010x_2z) &= \rho(2100x_1z) = \rho_0 \int_0^\infty f(y) f(x+y) v_g(y, z) dy + \rho_0 \int_0^\infty f(y) v_g(y, z) dy \int_0^\infty f(x+y+t) h(t) dt + \\ &\quad + \rho_0 \int_0^\infty f(y) v_g(y, z) dy \int_0^\infty \pi(x+y, s) ds \int_0^\infty f(s+t) h(t) dt + \rho_0 \int_0^\infty f(x+y) v_g(y, z) dy \int_0^\infty f(y+s) h(s) ds + \\ &\quad + \rho_0 \int_0^\infty f(x+y) v_g(y, z) dy \int_0^\infty \pi(y, s) ds \int_0^\infty f(s+t) h(t) dt; \\ \rho(1000z) &= \rho(2000z) = \rho_0 \int_0^\infty dm \int_0^\infty f(y) f(m+y) v_g(y, z+m) dy + \\ &\quad + \rho_0 \int_0^\infty dm \int_0^\infty f(y) v_g(y, z+m) dy \int_0^\infty f(m+y+t) h(t) dt + \rho_0 \int_0^\infty dm \int_0^\infty f(m+y) v_g(y, z+m) dy \int_0^\infty f(y+t) h(t) dt + \\ &\quad + \rho_0 \int_0^\infty dm \int_0^\infty f(y) v_g(y, z+m) dy \int_0^\infty \pi(m+y, s) ds \int_0^\infty f(s+t) h(t) dt + \\ &\quad + \rho_0 \int_0^\infty dm \int_0^\infty f(m+y) v_g(y, z+m) dy \int_0^\infty \pi(y, s) ds \int_0^\infty f(s+t) h(t) dt. \end{aligned} \right. \quad (4)$$

Здесь ρ_0 находится из условия нормировки; $h_g(t) = \sum_{n=1}^\infty g^{*(n)}(t)$ — плотность функции

восстановления, $g^{*(n)}(t)$ — n -кратная свертка функции $g(t)$; $v_g(z, x) = g(z+x) + \int_0^z g(z+x-s) h_g(s) ds$ —

плотность распределения прямого остаточного времени для процесса восстановления; $h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\gamma}^{*(n)}(t)$ –

плотность функции восстановления, $\tilde{\gamma}^{*(n)}(t)$ – n -кратная свертка функции $\tilde{\gamma}(t) = \int_0^t f(t) v_g(y, t-y) dy$;

$$\pi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} k^{(n)}(x, y), \quad k^{(1)}(x, y) = k(x, y) = \int_0^{\infty} \gamma(x, t) \gamma(t, y) dt, \quad k^{(n)}(x, y) = \int_0^{\infty} k(x, t) k^{(n-1)}(t, y) dy;$$

$$\gamma(x, t) = \int_0^{\infty} f(x+z+t) v_g(t, z) dz + \int_0^{\infty} h(y) dy \int_0^{\infty} f(x+z+y+t) v_g(t, z) dz.$$

Найдем стационарные характеристики системы.

Среднюю стационарную наработку на отказ T_+ и среднее стационарное время восстановления T_- найдем по формулам [4]:

$$T_+ = \frac{\int_{E_+} m(e) p(de)}{\int_{E_+} P(e, E_-) p(de)}, \quad T_- = \frac{\int_{E_-} m(e) p(de)}{\int_{E_+} P(e, E_-) p(de)}. \quad (5)$$

Здесь $p(de)$ – стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n, n \geq 0\}$; $m(e)$ – средние времена пребывания в состоянии $e \in E$ системы; $P(e, E)$ – вероятности переходов ВЦМ $\{\xi_n, n \geq 0\}$ системы. С учетом формул (2), (4) найдем выражения, входящие в (5):

$$\begin{aligned} \int_{E_+} P(e, E_-) p(de) &= 2\rho_0 \left(\int_0^{\infty} \bar{F}(t) f(t) dt + \int_0^{\infty} \bar{F}(t) h(t) dt + \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \pi(x, t) dt \int_0^{\infty} f(t+s) h(s) ds \right), \\ \int_{E_-} m(e) p(de) &= 2\rho_0 \left(\int_0^{\infty} \bar{F}(y) M\beta_y f(y) dy + \int_0^{\infty} \bar{F}(y) M\beta_y dy \int_0^{\infty} f(y+s) h(s) ds \right) + \\ &+ 2\rho_0 \left(\int_0^{\infty} \bar{F}(y) M\beta_y dy \int_0^{\infty} \pi(y, s) ds \int_0^{\infty} f(t+s) h(t) dt + \int_0^{\infty} f(y) M\beta_y dy \int_0^{\infty} \bar{F}(y+s) h(s) ds \right) + \\ &+ 2\rho_0 \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} f(y) M\beta_y dy \int_0^{\infty} \pi(x+y, s) ds \int_0^{\infty} f(t+s) h(t) dt, \\ \int_{E_+} m(e) p(de) &= \rho_0 \left(M(\alpha\Lambda\alpha) + 2 \int_0^{\infty} \bar{F}(t) dt \int_0^{\infty} \bar{F}(t+y) h(y) dy + 2 \int_0^{\infty} dx \int_0^x \bar{F}(t) dt \int_0^{\infty} \pi(x, y) dy \int_0^{\infty} f(y+s) h(s) ds \right). \end{aligned}$$

Таким образом, средняя стационарная наработка на отказ T_+ имеет вид:

$$T_+ = \frac{M(\alpha\Lambda\alpha) + 2 \int_0^{\infty} \bar{F}(t) dt \int_0^{\infty} \bar{F}(t+y) h(y) dy + 2 \int_0^{\infty} dx \int_0^x \bar{F}(t) dt \int_0^{\infty} \pi(x, y) dy \int_0^{\infty} f(y+s) h(s) ds}{2 \left(\int_0^{\infty} \bar{F}(t) f(t) dt + \int_0^{\infty} \bar{F}(t) h(t) dt + \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \pi(x, t) dt \int_0^{\infty} f(t+s) h(s) ds \right)}.$$

Среднее стационарное время восстановления T_- определяется формулой:

$$T_- = \frac{\int_0^{\infty} \bar{F}(y) M\beta_y f(y) dy + \int_0^{\infty} \bar{F}(y) M\beta_y dy \int_0^{\infty} f(y+s) h(s) ds}{\int_0^{\infty} \bar{F}(t) f(t) dt + \int_0^{\infty} \bar{F}(t) h(t) dt + \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \pi(x, t) dt \int_0^{\infty} f(t+s) h(s) ds} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\int_0^\infty \bar{F}(y) M\beta_y dy \int_0^\infty \pi(y, s) ds \int_0^\infty f(t+s) h(t) dt + \int_0^\infty f(y) M\beta_y dy \int_0^\infty \bar{F}(y+s) h(s) ds}{\int_0^\infty \bar{F}(t) f(t) dt + \int_0^\infty \bar{F}(t) h(t) dt + \int_0^\infty dx \int_0^\infty \pi(x, t) dt \int_0^\infty f(t+s) h(s) ds} + \\
& + \frac{\int_0^\infty dx \int_0^\infty f(y) M\beta_y dy \int_0^\infty \pi(x+y, s) ds \int_0^\infty f(t+s) h(t) dt}{\int_0^\infty \bar{F}(t) f(t) dt + \int_0^\infty \bar{F}(t) h(t) dt + \int_0^\infty dx \int_0^\infty \pi(x, t) dt \int_0^\infty f(t+s) h(s) ds}.
\end{aligned}$$

Стационарный коэффициент готовности найдем из соотношения:

$$K_T = \frac{T_+}{T_+ + T_-}.$$

Тогда:

$$\begin{aligned}
K_T = & \left[M(\alpha \Lambda \alpha) + 2 \int_0^\infty \bar{F}(t) dt \int_0^\infty \bar{F}(t+y) h(y) dy + 2 \int_0^\infty \bar{F}(t) dt \int_0^\infty h(s) ds \int_0^\infty \Pi(t, y) f(y+s) dy \right] / \\
& \left[M\beta + M\beta \int_0^\infty \bar{F}(y) \bar{F}(y) h_g(y) dy + 2M\beta \int_0^\infty \bar{F}(t) h(t) dt + 2M\beta \int_0^\infty h(t) dt \int_0^\infty \bar{F}(y) \bar{F}(y+t) h_g(y) dy + \right. \\
& \left. + 2M\beta \int_0^\infty h(t) dt \int_0^\infty f(s+t) ds \int_0^\infty \pi(x, s) dx + 2M\beta \int_0^\infty h(t) dt \int_0^\infty f(s+t) ds \int_0^\infty \bar{F}(y) \Pi(y, s) h_g(y) dy \right].
\end{aligned}$$

Здесь $\Pi(y, s) = \int_y^\infty \pi(x, s) dx$.

Рассмотрим случай, когда ФР времени безотказной работы компонентов имеют экспоненциальное распределение $F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$, контроль проводится через время τ , ($\tau = \text{const}$). Подстановкой можно показать, что решение системы уравнений (1) примет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \rho_0 &= \rho(3111), \\ \rho(3111x_1x_2) &= \rho_0 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(e^{\lambda_1 \tau} - 1)(e^{\lambda_2 \tau} - 1)} e^{-\lambda_1 x_1} e^{-\lambda_2 x_2}, \\ \rho(1010x_2z) &= \rho_0 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(e^{\lambda_1 \tau} - 1)(e^{\lambda_2 \tau} - 1)} e^{-\lambda_2 x_2} e^{(\lambda_1 + \lambda_2)z}, \\ \rho(2100x_1z) &= \rho_0 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(e^{\lambda_1 \tau} - 1)(e^{\lambda_2 \tau} - 1)} e^{-\lambda_1 x_1} e^{(\lambda_1 + \lambda_2)z}, \\ \rho(1000z) &= \rho_0 \frac{\lambda_1}{(e^{\lambda_1 \tau} - 1)(e^{\lambda_2 \tau} - 1)} e^{\lambda_1 z} (e^{\lambda_2 \tau} - e^{\lambda_2 z}), \\ \rho(2000z) &= \rho_0 \frac{\lambda_2}{(e^{\lambda_1 \tau} - 1)(e^{\lambda_2 \tau} - 1)} e^{\lambda_2 z} (e^{\lambda_1 \tau} - e^{\lambda_1 z}), \\ \rho(3111x_1) &= \rho_0 \frac{\lambda_1}{(e^{\lambda_1 \tau} - 1)} e^{-\lambda_1 x_1}, \\ \rho(3111x_2) &= \rho_0 \frac{\lambda_2}{(e^{\lambda_2 \tau} - 1)} e^{-\lambda_2 x_2}. \end{aligned} \right. \quad (6)$$

С учетом формул (2), (5) и (6) найдем стационарный коэффициент готовности:

$$K_T = \frac{(e^{(\lambda_1 + \lambda_2)\tau} - 1)^2}{1 - e^{(\lambda_1 + \lambda_2)\tau} + \tau(\lambda_1 + \lambda_2)e^{2(\lambda_1 + \lambda_2)\tau}}. \quad (7)$$

Формула (7) позволяет найти оптимальную периодичность контроля параметрических отказов двухкомпонентной АС, когда время наработки на отказ K_1 и K_2 имеет экспоненциальное распределение.

Полученные результаты позволяют определять стационарные характеристики для различных законов распределения СВ. В дальнейшем планируется нахождение решения системы интегральных уравнений (1) в общем виде, для произвольных ФР. Применение полученной методики предполагает использовать для построения и исследования двухкомпонентных моделей АС с отключением и без отключения работающего компонента с последовательным и параллельным соединением.

Библиографический список

1. Автоматизация процессов в производстве / под ред. А.И. Дашенко. — М.: Высш. шк., 1991. — 480 с.
2. Автоматический контроль радиоэлектронного и электротехнического оборудования / А.И. Мартяшин, А.Г. Рыжевский, К.Н. Чернецов, В.М. Шляндин; под общ. ред. В.М. Шляндина, А.И. Мартяшина. — М: Энергия, 1972. — 264 с.
3. Черкесов Г.Н. Надежность аппаратно-программных комплексов / Г.Н. Черкесов. — СПб.: Изд-во «Питер», 2005. — 479 с.
4. Половко А.М. Основы теории надежности / А.М. Половко, С.В. Гуров. — 2-е изд., перераб. и доп. — СПб.: БХВ-Петербург, 2006. — 704 с.

Поступила в редакцию 17.12.2008 г.