

УДК 681.5

Е.А. Шушляпин, профессор, д-р техн. наук,**А.Е. Безуглая, преподаватель,****Е.А. Байздренко***Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: tk@sevgtu.sebastopol.ua**Севастопольский национальный университет ядерной энергии и промышленности**ул. Курчатова 7, г. Севастополь, Украина, 99015***ПОСТРОЕНИЕ РЕЛЕЙНЫХ УПРАВЛЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ
НА ОСНОВЕ ЛИНЕЙНЫХ ЭКВИВАЛЕНТОВ ПО БРУНОВСКОМУ**

Рассматривается задача получения эквивалентных управлений нелинейных систем на основе релейных управлений линейных эквивалентов систем. Исследована возможность применения точного линейного эквивалента по Бруновскому (Brunovsky P.) для решения задачи управления нелинейным объектом с помощью управления релейного типа.

Ключевые слова: *релейное управление, линейный эквивалент, теорема о переключениях.*

В настоящее время существует множество технических объектов, математические модели которых представляют собой системы дифференциальных уравнений высокого порядка. При этом наиболее широко используемые методы расчета управляющих воздействий имеют непрерывный вид, в то время как в ряде приложений, как, например, задача управления космическим летательным аппаратом (КЛА) с двигателем постоянной тяги, управляющий сигнал должен быть ступенчатым. Таким образом, можно говорить об актуальности задачи преобразования непрерывного управляющего сигнала в ступенчатый, оказывающий по своему воздействию эквивалентное влияние на конечный результат управления.

В то же время отметим, что, несмотря на активную работу по разработке эффективных методов построения регуляторов для нелинейных систем, эта проблема еще далека от решения. Тем более заманчивой кажется идея использования хорошо разработанной теории построения регуляторов линейных систем применительно к нелинейным системам. При этом основная проблема возникает в преобразовании нелинейной системы в некоторую аналогичную ей линейную.

Здесь рассматривается задача получения эквивалентных по конечному состоянию управлений нелинейных систем на основе релейных управлений линейных эквивалентов систем.

В [1] рассмотрен метод получения по Бруновскому линейных эквивалентов нелинейных систем. Однако необходимо заметить, что указанный метод может быть применен к ограниченному классу объектов. Во-первых, математическая модель объекта должна относиться к классу так называемых аффинных систем [1], т.е. классу нелинейных динамических систем, линейных по управлению

$$\frac{dx}{dt} = X(x) + uY(x), \quad x \in M^n, \quad u \in R^1, \quad Y(x_0) \neq 0,$$

где M^n – гладкое многообразие размерности n ; x_0 – равновесная точка; $X(x)$, $Y(x)$ – гладкие векторные поля на M^n :

$$X(x) = [\xi_1(x), \dots, \xi_n(x)]^T :$$

$$Y(x) = [\eta_1(x), \dots, \eta_n(x)]^T .$$

Во-вторых, данный подход, фактически, можно применять только для систем, управление которых задано скалярно. Кроме того, указанный метод имеет еще ряд ограничений, формулируемых в виде свойств системы, выполнение которых является необходимым условием существования линейного эквивалента нелинейной системы. Подробно эти условия описаны в [1], и, в принятых обозначениях, записываются следующим образом: 1) система $S = \{ad_X^i Y(x), i = 0, n-2\}$ – инволютивна; 2) $ad_X^{n-1} Y(x) \neq 0$ в точке равновесия и её окрестности; 3) векторы $ad_X^i Y(x), i = 0, n-1$ линейно независимы в точке равновесия и её окрестности.

Здесь $ad_X^i Y(x)$ – производная Ли векторного поля $ad_X^{i-1} Y(x)$ вдоль векторного поля $X(x)$.

Цель статьи – исследование возможности применения точного линейного эквивалента по Бруновскому для решения задачи управления нелинейным объектом с помощью управления релейного типа. В основе предлагаемого подхода, наряду с методом Бруновского, лежит также теорема о переключениях [2], которая кратко может быть сформулирована в следующем виде.

Теорема [2]. Для системы вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = \Phi(t, x(t)) + B(t) \cdot u(t),$$

$$t \in [t_0, t_f], x(t_0) = x^0,$$

$$\Phi(t, x) \equiv A(t) \cdot x + C(t) \cdot f(t)$$

на каждом из интервалов разбиения $t \in [t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \dots, n$, где предполагающиеся непрерывными и определяемые

$$x_{ik}(t_f, t_0) = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n W_{ij}(t_f, t) B_{jk}(t) u_k(t) dt \equiv \int_{t_0}^{t_f} h_i(t) \xi(t) dt,$$

$$h_i(t) \equiv \sum_{j=1}^n W_{ij}(t_f, t) B_{jk}(t), \quad \xi(t) \equiv u_k(t)$$

функции $h_i(t)$, $i = i1, i2$ знакопостоянны, а определяемые

$$\bar{h}_{is}(\theta) = \frac{\bar{h}_i(\theta)}{\bar{h}_s(\theta)}, \quad \bar{h}_s = \bar{h}_{i1} + \bar{h}_{i2}$$

функции $h_{is}(t)$, $i = i1, i2$ монотонны, любое, ограниченное нулем и единицей, управление может быть заменено эквивалентным релейным управлением с двумя переключениями вида:

$$v(t) = \begin{cases} 1, & t \in [\vartheta_1, \vartheta_2], \\ 0, & t \notin [\vartheta_1, \vartheta_2]. \end{cases}$$

В качестве примера объекта, математическая модель которого соответствует этим требованиям, взят электродвигатель постоянного тока с последовательным возбуждением:

$$\begin{cases} \frac{di_A}{dt} = -\frac{r_A}{L_A} i_A - \frac{k_1}{L_A} i_A \omega + \frac{1}{L_A} u, \\ \frac{d\omega}{dt} = -\frac{k_M}{J_M} \omega + \frac{k_2}{J_M} i_A^2. \end{cases}$$

Заметим, что в дальнейшем эта система рассматривается как абстрактный пример аффинной системы. Для упрощения последующих выкладок введем следующие обозначения:

$$i_A = x_0; \quad \omega = x_1; \quad a_{11} = -\frac{r_A}{L_A}; \quad a_{12} = -\frac{k_1}{L_A}; \quad a_{21} = \frac{k_2}{J_M}; \quad a_{22} = -\frac{k_M}{J_M}.$$

В новых обозначениях модель двигателя примет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx_0}{dt} = a_{11} x_0 + a_{12} x_0 x_1 + \frac{1}{L_A} u, \\ \frac{dx_1}{dt} = a_{21} x_0^2 + a_{22} x_1. \end{cases}$$

Данная модель относится к классу аффинных систем, и все указанные ранее условия существования линейного эквивалента выполняются, таким образом, модель может быть линеаризована по Бруновскому. Суть линеаризации сводится к приведению системы к канонической форме Бруновского [1].

В результате преобразований получена система:

$$\begin{cases} \frac{dy_0}{dt} = y_1, \\ \frac{dy_1}{dt} = v(t), \end{cases} \quad (1)$$

где:

$$\begin{aligned} y_0 &= x_1; \\ y_1 &= \frac{k_2}{J_M} x_0^2 - \frac{k_M}{J_M} x_1 = a_{21} x_0^2 + a_{22} x_1; \\ v(t) &= 2a_{21} x_0 \left[a_{11} x_0 + a_{12} x_0 x_1 + \frac{1}{L_A} u(t) \right] + a_{22} [a_{21} x_0^2 + a_{22} x_1]. \end{aligned} \quad (2)$$

Отсюда получаем:

$$x_0 = \sqrt{\frac{y_1 + a_{22}x_1}{a_{21}}}; x_1 = y_0.$$

Поставлена задача получения релейного управления для линеаризованной системы, которое в дальнейшем, после преобразования, может быть применено к исходной нелинейной системе.

Для рассматриваемой эквивалентной линейной системы (1), согласно сформулированной выше теореме о переключениях, может быть получено релейное управляющее воздействие с двумя моментами переключения: $t_1=0,17935$ с, $t_2=0,63361$ с.

На рисунке 1 изображены графики функций $h_i(t)$, $i=i_1, i_2$ и $h_{is}(t)$, $i=i_1, i_2$. Из графиков видно, что условия знакопостоянства и монотонности, указанные для этих функций в приведенной выше теореме, выполнены.

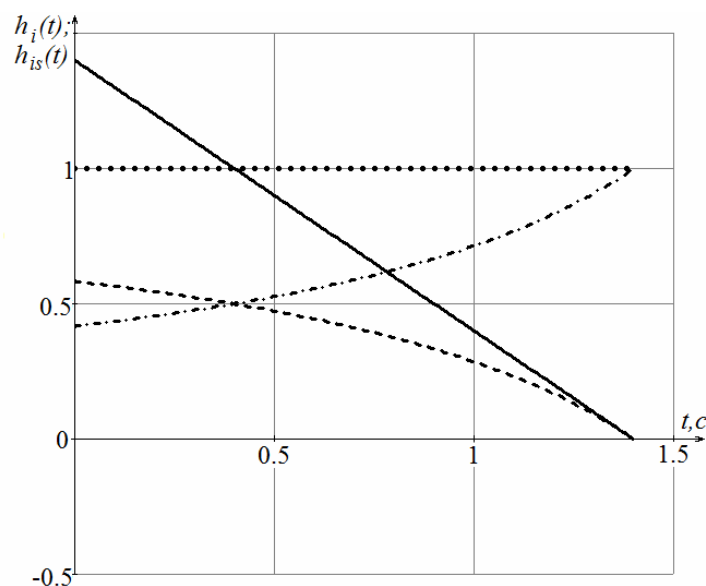


Рисунок 1 – Графики функций $h_i(t)$, $h_{is}(t)$: — $h_0(t)$; ... — $h_1(t)$; --- $h_{0s}(t)$; -.-.- $h_{1s}(t)$

Релейное управление, полученное для системы (1), имеет вид, показанный на рисунке 2.

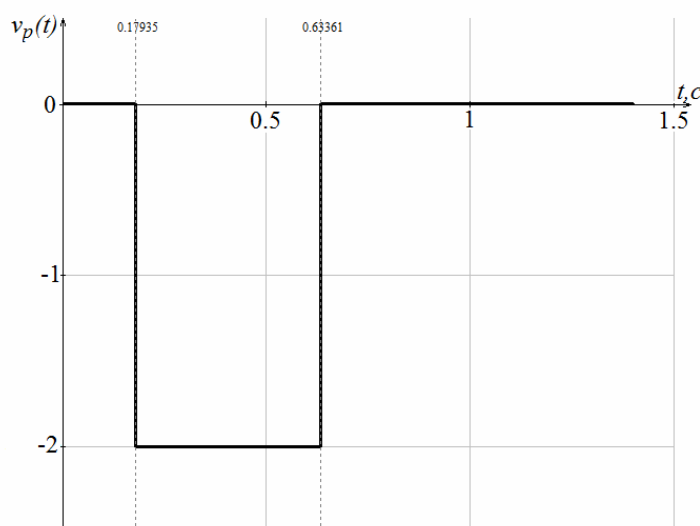


Рисунок 2 – График релейного управления линейной системы

Далее, в соответствии с методом линеаризации по Бруновскому, управляющий сигнал для исходной (нелинейной) системы может быть выражен через управление для линейной системы, полученное на основе (2):

$$u(t, x) = L_A \left[\frac{v(t) - a_{22}(a_{21}x_0^2 + a_{22}x_1)}{2a_{21}x_0} - a_{11}x_0 - a_{12}x_0x_1 \right]. \quad (3)$$

График управляющего воздействия (3) показан на рисунке 3.

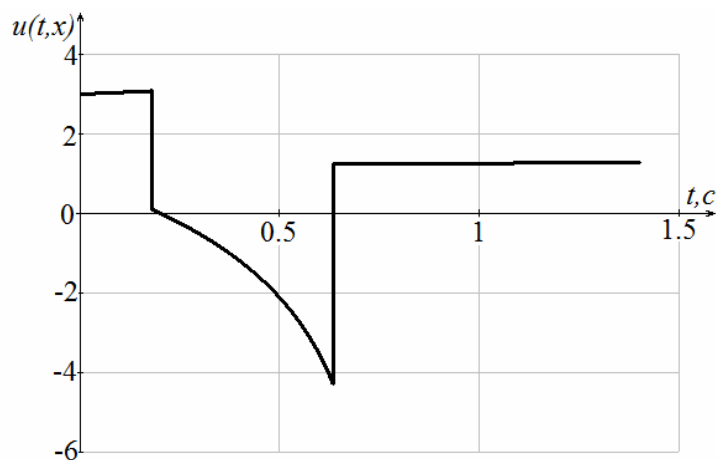


Рисунок 3 – График преобразованного управляющего воздействия нелинейной системы

Таким образом, итоговый управляющий сигнал получен как обратное преобразование от релейного управления для эквивалентной линеаризованной системы:

$$\begin{cases} v = F(u, x), \\ v_{\text{рел}} = E(F(u, x)), \\ u_{\text{л}} = F^{-1}(E(F(u, x)), x), \end{cases}$$

где u – управляющий сигнал, подаваемый на вход исходной нелинейной системы; v – управляющий сигнал эквивалентной линеаризованной системы; $v_{\text{рел}}$ – эквивалентное релейное управление линейной системы; $u_{\text{л}}$ – преобразованный управляющий сигнал, подаваемый на вход нелинейной системы; F, F^{-1} – прямой и обратный операторы; E – оператор эквивалентности по конечному состоянию.

При подаче на вход нелинейной системы полученного эквивалентного управляющего воздействия $u_{\text{л}}$ достигаются такие же конечные значения управляемых координат системы, как и при подаче произвольного, ограниченного нулем и единицей, управления u . Соответствующие подтверждающие результаты для воздействия $u = \sin(k \cdot \pi \cdot t / t_f)$, $t_f = 1,4$, $k = 0,5$, показаны на рисунке 4.

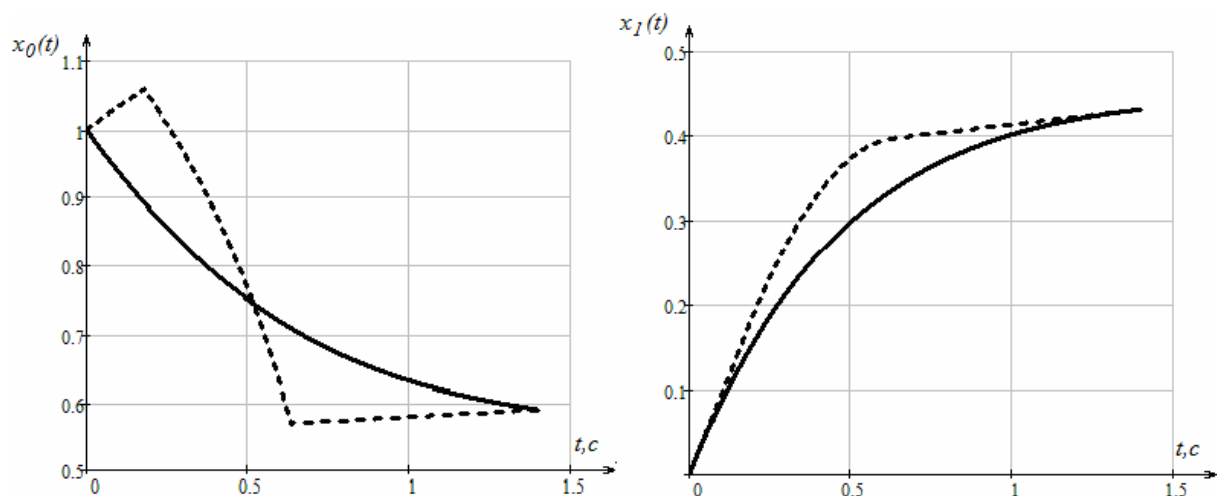


Рисунок 4 – Графики управляемых координат под действием исходного (сплошная кривая) и преобразованного (пунктирная кривая) управляющих сигналов

В дальнейшем полученные результаты могут быть применены, например, в задачах управления космическими летательными аппаратами (КЛА) с двигателями постоянной тяги, как это, например, сделано в работе [3], где оптимальное управление КЛА с электрореактивным двигателем приближенно заменено релейным управлением. На основе предложенного подхода можно поставить задачу не приближенной, а точной замены непрерывных управлений эквивалентными ступенчатыми.

Библиографический список

1. Методы классической и современной теории автоматического управления: учебник в 5-ти т. — 2-е изд., перераб. и доп. — Т.5. Методы современной теории автоматического управления; под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2004. — 784 с.
2. Шушляпин Е.А. Модели конечного состояния и их применение в задачах анализа и синтеза систем управления: дис. д-ра техн. наук: 05.13.03: защищ. 03.10.02: утв. 09.04.03 / Шушляпин Евгений Андреевич. — Севастополь, 2003. — 323 с. — Инв.№ 0408U002219.
3. Кіфоренко Б.М. Метод усереднення в механіці космічного польоту: досягнення і прорахунки / Б.М. Кіфоренко // Матер. 16-й міжнар. конф. з автоматичного управління «Автоматика – 2009». Тези доповідей. — Чернівці: Книга – XXI, 2009. — С. 248 – 249.

Поступила в редакцию 16.02.2010 г.