

УДК 517.977.5

А.А. Кабанов*Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: patronne@mail.ru***ОПТИМАЛЬНЫЙ РЕГУЛЯТОР ТОЧНОГО ПРИВЕДЕНИЯ В НОЛЬ ДИСКРЕТНЫХ ОБЪЕКТОВ**

Рассматривается задача точного терминального управления для дискретных систем на основе метода штрафных функций. Доказана равномерная сходимость траекторий и управлений «штрафной» и «вырожденной» задач при неограниченном увеличении коэффициента штрафа. Приведены результаты моделирования в системе Matlab.

Ключевые слова: терминальный регулятор, равномерная сходимость, терминальная ошибка, штрафная функция.

Пусть задан дискретный линейный нестационарный объект управления, описываемый системой разностных уравнений

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A^{(k)}(k)x(k) + B^{(k)}(k)u(k), \quad x(k_0) = x^0, \\ y(k) &= H^{(k)}(k)x(k), \end{aligned} \quad (1)$$

где $x \in R^{n_1}$, $A^{(k)} - n \times n$, $B^{(k)} - n \times r$, $H^{(k)} - m \times n$ – непрерывные и ограниченные по k матрицы указанных размерностей. Уравнения (1) заданы на фиксированном интервале $[k_0, k_N]$.

Рассматривается задача минимизации квадратического функционала качества (далее номер шага k будем писать в виде индекса)

$$\rho_\lambda = \frac{1}{2\lambda_f} y_{k_N}^T F y_{k_N} + \frac{1}{2} \sum_{k=k_N}^{k_N-1} (x_k^T Q_k x_k + 2u_k^T N_k x_k + u_k^T R_k u_k), \quad \lambda_f > 0, \quad (2)$$

на множестве решений системы (1).

I. Матрицы $Q_k - n \times n$ положительно полуопределенная, $F_k - m \times m$ положительно определенная, $R_k - r \times r$ положительно определенная, а $N_k - r \times n$ матрица, причем $\begin{pmatrix} Q_k & N_k^T \\ N_k & R_k \end{pmatrix} - (n+r) \times (n+r)$ положительно полуопределенная матрица для всех $k \in [k_0, k_N]$.

II. Система (1) полностью управляема по выходу.

При выполнении условий I, II задача (1), (2) имеет единственное решение [1, 2]:

$$\begin{aligned} u_k &= -G_k x_k, \\ G_k &= (R_k + B_k^T P_{k+1} B_k)^{-1} (B_k^T P_{k+1} \hat{A}_k + N_k), \\ G_k &= R_k^{-1} (B_k^T \hat{A}_k (P_k - \hat{Q}_k) + N_k). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь P_k является решением матричного разностного уравнения Риккати

$$P_k = \hat{A}_k P_{k+1} (I - B_k (R_k + B_k^T P_{k+1} B_k)^{-1} B_k^T P_{k+1}) \hat{A}_k + \hat{Q}_k, \quad P_{k_N} = \lambda_f^{-1} H^T F H, \quad (4)$$

где $\hat{A}_k = A_k - B_k R_k^{-1} N_k$, $\hat{Q}_k = Q_k - N_k^T R_k^{-1} N_k$, $H = H_{k_N}$.

При малом λ_f штрафной коэффициент $1/\lambda_f$ в терминальном члене (2) неограниченно возрастает, и можно предположить в этом случае, что значение квадратичной формы $x_{k_N}^T H^T F H x_{k_N}$, достигаемое в силу оптимального управления, будет стремиться к нулю на правом конце интервала управления. Это означает точное приведение в ноль соответствующих комбинаций траекторий системы (1). Ставится задача исследования асимптотики оптимального регулятора (3) при $\lambda_f \rightarrow 0$.

Поскольку соотношения (3), (4) нельзя использовать для расчета управления при $\lambda_f \rightarrow 0$ (начальное значение для матрицы P_k неограниченно растет), будем использовать другое представление для матрицы Риккати.

Нетрудно показать, что для матрицы Риккати P_k имеет место представление

$$P_k = V_k + U_k (M_k + \lambda_f F^{-1})^{-1} W_k^T, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} V_k &= \hat{A}_k^T V_{k+1} (I - B_k (R_k + B_k^T V_k B_k)^{-1} B_k^T V_k) \hat{A}_k + \hat{Q}_k, \quad V_{k_N} = 0, \\ U_k &= \hat{A}_k^T (I + V_{k+1} B_k R_k^{-1} B_k^T)^{-1} W_{k+1}, \quad U_{k_N} = H^T, \\ W_k &= \hat{A}_k^T W_{k+1} - \hat{A}_k^T V_{k+1} (I + B_k R_k^{-1} B_k^T V_{k+1})^{-1} B_k R_k^{-1} B_k^T W_{k+1}, \quad W_{k_N} = H^T, \\ M_k &= M_{k+1} + W_{k+1}^T B_k (R_k + B_k^T V_k B_k)^{-1} B_k^T W_{k+1}, \quad M_{k_N} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Справедливость (5) легко проверить простой подстановкой его в уравнение Риккати (4). Следует заметить, что в (5) матрица $(M_k + \lambda_f F^{-1})$ должна быть невырождена, что выполняется для всех $k \in [k_0, k_N]$ и $\lambda_f > 0$ поскольку F – положительно определенная и M_k положительно полуопределенная матрицы. Остается вопрос о существовании матрицы $(M_k + \lambda_f F^{-1})$ при $\lambda_f = 0$.

Известно [3], что матрица M_k , определенная в (6), является положительно определенной для всех $k \in [k_0, k_N - n_c]$, где n_c – индекс управляемости. Значение индекса n_c зависит от ранга матрицы HB_k .

III. $HB_k - m \times r$ матрица полного ранга для всех $k \in [k_0, k_N]$.

Условие III дает два возможных случая: $m \geq r$ и $m < r$. Если $m \geq r$, то $\text{rank}(HB_k) = r$, а индекс управляемости $1 \leq n_c \leq m$. Следовательно, из (5) можно определить матрицу Риккати при $\lambda_f = 0$ на интервале $[k_0, k_N - n_c]$:

$$\bar{P}_k = \lim_{\lambda_f \rightarrow 0} P_k = V_k + U_k M_k^{-1} W_k^T, \quad k \in [k_0, k_N - n_c]. \quad (7)$$

Зная $\bar{P}_k$, можем определить управление из (3):

$$\bar{G}_k = \lim_{\lambda_f \rightarrow 0} G_k = (R_k + B_k^T \bar{P}_{k+1} B_k)^{-1} (B_k^T \bar{P}_{k+1} \hat{A}_k + N_k), \quad k \in [k_0, k_N - n_c - 1]. \quad (8)$$

Решение задачи (1), (2) для $k \in [k_N - n_c + 1, k_N]$ найдем, введя замену:

$$P_k = \frac{K_k}{\lambda_f}. \quad (9)$$

Подставляя в (3), (4) выражение (9), получаем

$$\begin{aligned} G_k &= (\lambda_f R_k + B_k^T K_{k+1} B_k)^{-1} (B_k^T K_{k+1} \hat{A}_k + \lambda_f N_k), \\ K_k &= \hat{A}_k^T K_{k+1} (I - B_k (\lambda_f R_k + B_k^T K_{k+1} B_k)^{-1} B_k^T K_{k+1}) \hat{A}_k + \lambda_f \hat{Q}_k, \quad K_{k_N} = H^T F H. \end{aligned} \quad (10)$$

Далее перейдем к пределу по λ_f в (10):

$$\begin{aligned} \bar{G}_k &= \lim_{\lambda_f \rightarrow 0} G_k = (B_k^T \bar{K}_{k+1} B_k)^{-1} (B_k^T \bar{K}_{k+1} \hat{A}_k), \quad k \in [k_N - n_c, k_N - 1], \\ \bar{K}_k &= \hat{A}_k^T \bar{K}_{k+1} (I - B_k (B_k^T \bar{K}_{k+1} B_k)^{-1} B_k^T \bar{K}_{k+1}) \hat{A}_k, \quad \bar{K}_{k_N} = H^T F H, \quad k \in [k_N - n_c + 1, k_N]. \end{aligned} \quad (11)$$

По аналогии с [4] можно показать, что в условиях I–III выражения (11) справедливы для $k \in [k_N - n_c, k_N - 1]$.

Объединяя полученные результаты, для предельного регулятора окончательно запишем

$$\bar{G}_k = \begin{cases} (R_k + B_k^T \bar{P}_{k+1} B_k)^{-1} (B_k^T \bar{P}_{k+1} \hat{A}_k + N_k), & k \in [k_0, k_N - n_c - 1], \\ (B_k^T \bar{K}_{k+1} B_k)^{-1} (B_k^T \bar{K}_{k+1} \hat{A}_k), & k \in [k_N - n_c, k_N - 1]. \end{cases} \quad (12)$$

В случае, когда $m < r$ и $\text{rank}(HB_k) = m$ индекс управляемости равен $n_c = 1$. Это дает возможность применить формулы (7), (8) для расчета управления на интервале $[k_0, k_N - 2]$.

Чтобы определить управление на шаге $k = k_N - 1$ воспользуемся формулой (3), откуда получим

$$\bar{G}_{k_N-1} = R_{k_N-1}^{-1} (B_{k_N-1}^T H^T M_{k_N-1}^{-1} H A_{k_N-1} + N_{k_N-1}).$$

Объединяя последнее выражение и (7), (8) для случая $m < r$, получаем

$$\bar{G}_k = \begin{cases} (R_k + B_k^T \bar{P}_{k+1} B_k)^{-1} (B_k^T \bar{P}_{k+1} \hat{A}_k + N_k), & k \in [k_0, k_N - 2], \\ R_{k_N-1}^{-1} (B_{k_N-1}^T H^T M_{k_N-1}^{-1} H A_{k_N-1} + N_{k_N-1}), & k = k_N - 1. \end{cases} \quad (13)$$

Теорема 1. При выполнении условий I-III для точного решения (3) задачи (1), (2) и предельного решения (12) для $m \geq r$ (или (13) для $m < r$) для всех $k \in [k_0, k_N]$, $k_N \geq k_0 + n_c$, и $\lambda_f \in (0, \lambda_*)$, λ_* – любое фиксированное положительное число, при $\lambda_f \rightarrow 0$ справедливы следующие асимптотические оценки

$$\|G_k - \bar{G}_k\| \leq \lambda_f O(1), \|x_k - \bar{x}_k\| \leq \lambda_f O(1),$$

где x_k и $\bar{x}_k$ – оптимальные траектории задачи (1), (2) с управлением G_k и $\bar{G}_k$ соответственно; $\|\bullet\|$ – обозначает норму вектора (матрицы).

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $m \geq r$. Рассматриваем интервал $[k_N - n_c, k_N - 1]$. Из (10) следует, что

$$K_k = \hat{A}_k^T K_{k+1} (I - B_k (B_k^T K_{k+1} B_k)^{-1} B_k^T K_{k+1}) \hat{A}_k + \\ + \lambda_f (\hat{Q} + (B_k^T K_{k+1} B_k)^{-1} O(1))_k, K_{k_N} = H^T F H.$$

Учитывая последнее выражение, нетрудно показать, что для матриц K_k и $\bar{K}_k$ справедлива оценка

$$\|K_k - \bar{K}_k\| = \lambda_f O(1), k \in [k_N, k_N - n_c + 1]. \quad (13)$$

Из (10) и (11) определим разность матриц регулятора G_k и $\bar{G}_k$:

$$G_k - \bar{G}_k = (\lambda_f R_k + B_k^T K_{k+1} B_k)^{-1} (B_k^T K_{k+1} \hat{A}_k + \lambda_f N_k) - (B_k^T \bar{K}_{k+1} B_k)^{-1} B_k^T \bar{K}_{k+1} \hat{A}_k = \\ = (B_k^T K_{k+1} B_k)^{-1} B_k^T K_{k+1} \hat{A}_k + \lambda_f (N_k + O(1)) - (B_k^T \bar{K}_{k+1} B_k)^{-1} B_k^T \bar{K}_{k+1} \hat{A}_k.$$

Учитывая оценку (13), для нормы разности матриц регулятора, будем иметь

$$\|G_k - \bar{G}_k\| = \lambda_f O(1), k \in [k_N - n_c, k_N - 1]. \quad (14)$$

Теперь перейдем к интервалу $[k_0, k_N - n_c]$. Получим оценки для матриц P_k и $\bar{P}_k$:

$$\|P_k - \bar{P}_k\| = \|U_k ((M_k + \lambda_f F^{-1})^{-1} - M_k^{-1}) W_k\| = \\ = \|U_k (M_k^{-1} (I + \lambda_f M_k^{-1} F^{-1})^{-1} - M_k^{-1}) W_k\| = \\ = \|U_k M_k^{-1} (I + \lambda_f O(1) - I) W_k\| = \lambda_f O(1),$$

и матриц регулятора G_k и $\bar{G}_k$ на интервале $[k_0, k_N - n_c - 1]$:

$$\|G_k - \bar{G}_k\| = \|(R_k + B_k^T P_{k+1} B_k)^{-1} (B_k^T P_{k+1} \hat{A}_k + N_k) - \\ - (R_k + B_k^T \bar{P}_{k+1} B_k)^{-1} (B_k^T \bar{P}_{k+1} \hat{A}_k + N_k)\| = \\ = \|(R_k + B_k^T \bar{P}_{k+1} B_k)^{-1} (B_k^T \bar{P}_{k+1} \hat{A}_k + N_k) - \\ - (R_k + B_k^T \bar{P}_{k+1} B_k)^{-1} (B_k^T \bar{P}_{k+1} \hat{A}_k + N_k) + \lambda_f O(1)\| = \lambda_f O(1). \quad (15)$$

Объединяя (14), (15) и учитывая непрерывность и ограниченность матриц $\hat{A}_k$, B_k , P_k , получаем утверждение теоремы относительно матриц регулятора.

Для получения асимптотических оценок оптимальных траекторий, запишем уравнение системы (1) с матрицей G_k в обратной связи

$$x_{k+1} = (A_k - B_k G_k) x_k, \quad x_{k_0} = x^0$$

и уравнение системы (1) с матрицей $\bar{G}_k$ в обратной связи

$$\bar{x}_{k+1} = (A_k - B_k \bar{G}_k) \bar{x}_k, \quad \bar{x}_{k_0} = x^0.$$

Вычитая почленно, получаем уравнение для разности

$$\Delta x_{k+1} = (A_k - B_k (G_k - \bar{G}_k)) \Delta x_k + \lambda_f O(1), \quad \Delta x_{k_0} = 0.$$

Из оценок (14), (15) при $\lambda_f \rightarrow 0$ и непрерывности матриц A_k и B_k на интервале $[k_0, k_N]$ и свойства линейной зависимости решений линейной системы от начальных условий следует утверждение теоремы касательно переменных состояния.

Утверждение теоремы для $m < r$ доказывается аналогично случаю, когда $m \geq r$. Теорема доказана.

Теорема 1 дает асимптотические оценки, связывающие между собой решения возмущенной и вырожденной задач, но теорема не дает оценку ошибки терминального наведения. Поэтому можно лишь предполагать, что при $\lambda_f \rightarrow 0$ терминальная ошибка будет стремиться к нулю, но не утверждать. Докажем это предположение.

Запишем уравнение для оптимального движения системы:

$$x_{k+1} = (A_k - B_k G_k) x_k = (A_k - B_k (R_k + B_k^T P_{k+1} B_k)^{-1} (B_k^T P_{k+1} \hat{A}_k + N_k)) x_k, \quad (16)$$

где для матрицы P_k справедливо представление (5). Подставляя в (16) представления (5), (6), после некоторых преобразований получим

$$x_{k+1} = (I - S_k (I + V_{k+1} S_k)^{-1} V_{k+1}) \hat{A}_k x_k - S_k (I + V_{k+1} S_k)^{-1} W_{k+1} (M_k + \lambda F^{-1})^{-1} W_k^T x_k,$$

где $S_k = B_k R_k^{-1} B_k^T$. Обозначим $f_k = (M_k + \lambda F^{-1})^{-1} W_k x_k$. Легко убедиться в том, что функция $f_k \equiv \text{const}$, т.е. $f_k = f_{k+1}$. Покажем это:

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= (M_{k+1} + \lambda F^{-1})^{-1} W_{k+1} x_{k+1} = (M_{k+1} + \lambda F^{-1})^{-1} W_{k+1} ((I - S_k (I + V_{k+1} S_k)^{-1} V_{k+1}) \hat{A}_k x_k - \\ &\quad - S_k (I + V_{k+1} S_k)^{-1} W_{k+1} (M_k + \lambda F^{-1})^{-1} W_k x_k) = \\ &= (M_{k+1} + \lambda F^{-1})^{-1} [M_k + \lambda F^{-1} - W_{k+1}^T S_k (I + V_{k+1} S_k)^{-1} W_{k+1}] (M_k + \lambda F^{-1})^{-1} W_k x_k = \\ &= (M_{k+1} + \lambda F^{-1})^{-1} (M_{k+1} + \lambda F^{-1}) (M_k + \lambda F^{-1})^{-1} W_k^T x_k = (M_k + \lambda F^{-1})^{-1} W_k^T x_k = f_k. \end{aligned}$$

Используя данное свойство, получаем выражение для терминальной ошибки:

$$\begin{aligned} f_{k_0} = f_{k_N} &\Rightarrow (M_{k_0} + \lambda F^{-1})^{-1} W_{k_0} x_{k_0} = (M_{k_N} + \lambda F^{-1})^{-1} W_{k_N} x_{k_N}, \\ W_{k_N} x_{k_N} &= M_{k_N} (M_{k_0} + \lambda F^{-1})^{-1} W_{k_0} x_{k_0} + \lambda F^{-1} (M_{k_0} + \lambda F^{-1})^{-1} W_{k_0} x_{k_0}. \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляя в (17) начальные значения для матриц W_{k_N} и M_{k_N} , получаем

$$H x_{k_N} = \lambda F^{-1} (M_{k_0} + \lambda F^{-1})^{-1} W_{k_0} x_{k_0}$$

или с точностью до членов более высокого порядка

$$H x_{k_N} = \lambda F^{-1} M_{k_0}^{-1} W_{k_0} x_{k_0}, \quad k_0 \leq k_N - n_c. \quad (18)$$

Из оценки (18) становится понятно, что при $\lambda_f = 0$, приведение выхода в ноль становится точным. Таким образом, вырожденное управление (12), (13) приводит выход дискретного объекта точно в ноль за $k \geq n_c$ шагов.

Пример 1. В качестве примера рассмотрим дискретизованную с периодом $T_0 = 0,25$ с задачу наведения летательного аппарата в горизонтальной плоскости [5]. Итак, имеем дискретную линейную систему вида (1) с матрицами состояния

$$A_k = \begin{pmatrix} 1,0 & -2,8455 & 0,0178 & 3,1042 & -0,0263 \\ 0 & 0,9238 & -0,0376 & -1,1741 & -0,0416 \\ 0 & -0,6438 & -0,4844 & -2,8222 & 2,8222 \\ 0 & 0,1155 & -0,0298 & -0,2599 & -0,0688 \\ 0 & 0,4946 & -0,1771 & -2,0868 & -0,1226 \end{pmatrix}, B_k = \begin{pmatrix} -0,0093 \\ -0,2864 \\ -0,6883 \\ -0,3073 \\ -0,5090 \end{pmatrix}, H^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_{k0} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор состояния имеет пять компонентов, а именно: $x = \text{col}(z, \beta, w_y, \phi, \delta)$ – линейное отклонение от линии прямолинейного равномерного движения к неподвижной цели, м, угол скольжения, град, угловую скорость, град/с, и угол рысканья, град, угол отклонения руля направления, град.

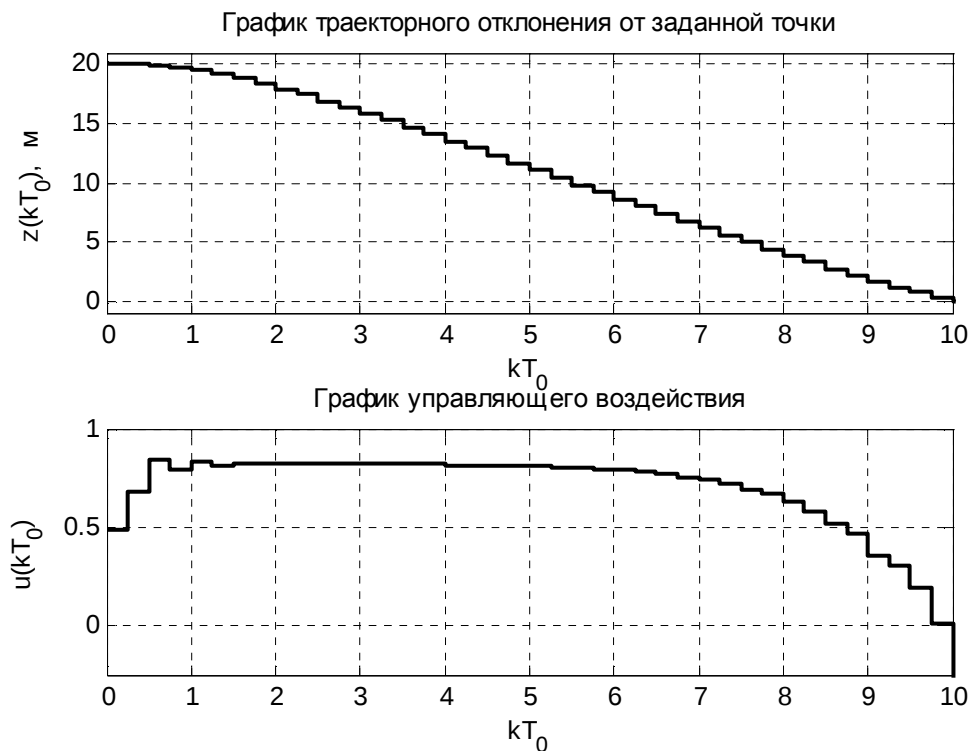


Рисунок 1 – Результаты моделирования

Ставится задача найти управление, приводящее выход системы (1), (16) точно в ноль из начального состояния x_0 при $\lambda_f \rightarrow 0$ за 10 с ($k_N = 40$) в соответствии с критерием (2), в котором матрицы штрафов выбраны такими:

$$Q_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_k = 1, F = 1, N_k = 0.$$

Результаты моделирования изображены на рисунке 1. Результаты моделирования показали, что терминальная ошибка приведения компоненты z равна нулю, управление при этом в конечный момент существует и ограничено.

Замечание 1. Непрерывная задача, аналогичная дискретной задаче (1), (2), была решена в [6, 7]. При этом отличительная особенность дискретного случая заключается в том, что здесь управление в виде обратной связи по состоянию, приводящее выход системы точно в ноль существует и ограничено на всем интервале управления, чего нет в непрерывном случае.

Замечание 2. Дальнейшие исследования асимптотических регуляторов будут направлены на решение задач точного терминального приведения (когда малый параметр стоит в терминальной части критерия качества) и задач с «дешевым» управлением (когда малый параметр стоит в суммарной части критерия качества) для дискретных сингулярно возмущенных систем. Основная сложность при решении

таких задач заключается в проведении асимптотического анализа одновременно по нескольким параметрам.

Библиографический список

1. Куо Б. Теория проектирования цифровых систем управления / Б. Куо: пер. с англ. — М.: Машиностроение, 1986. — 448 с.
2. Ogata K. Discrete-time control system / K.Ogata. — N.Jersey: Upper Saddle River, 1994. — 745 p.
3. Kwon W.H. Receding horizon control: Model predictive control for state models / H.W. Kwon. — London: Springer, 2005 — 380 p.
4. Скороход Б.А. Оценивание состояния в слабонаблюдаемых линейных дискретных системах / А.А. Невинский, Б.А. Скороход // Радиоэлектроника и информатика: сб. науч. тр. Харьковского гос. техн. ун-та радиоэлектроники. — Харьков, 2001. — № 2. — С. 66 – 69.
5. Дубовик С.А. Синтез управления посадкой летательного аппарата с вращающимся вектором тяги / С.А. Дубовик, А.А. Кабанов // Информационно-измерительные и управляющие системы. — 2009. — Т.7. — №2. — С. 41 – 48.
6. Глизер В.Я. Асимптотика решения одной сингулярно возмущенной задачи, связанной с методом штрафных функций / В.Я. Глизер, М.Г. Дмитриев // Дифференциальные уравнения. — 1981. — Т. 18. — № 9. — С.1575 – 1580.
7. Козырев В.Г. Оптимальный регулятор почти точного приведения в ноль / В.Г. Козырев // Вестник СевГТУ. Сер. Автоматизация процессов и управление. — Севастополь, 1998. — Вып. 14. — С.18 – 22.

Поступила в редакцию 02.02.2010 г.