

УДК 517.9/519.3(075.8)

А.И. Бохонский, профессор, д-р техн. наук*Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***МНОЖИТЕЛЬ ЛАГРАНЖА В ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИОНАЛА**

Рассмотрено движение несвободного объекта с двумя степенями свободы в среде с существенным сопротивлением, причем движение ограничено нестационарной связью. Оценена роль множителя Лагранжа в задаче вариационного исчисления и дан пример построения поверхности функционала по параметрам вариаций допустимых функций (в линейном нормированном пространстве).

Ключевые слова: функционал, множитель Лагранжа, условный экстремум, поверхность функционала.

Интерес к вариационному исчислению особенно возрос в связи с 300-летием со дня рождения выдающегося математика и механика Леонарда Эйлера [1].

В вариационных задачах на условный экстремум функционалов с конечными связями множители Лагранжа являются функциями, свойства которых и их роль до настоящего времени не достаточно раскрыты [2]. Например, в задаче оптимального управления [3] с ограничениями в алгоритме поиска управления большие трудности возникают в задании начальных приближений для множителей Лагранжа (при $t = 0$), для которых управления обеспечивают выполнение условий в конечный момент времени ($t = T$). Эта задача все еще не нашла своего окончательного решения в современной теории оптимального управления.

Целью исследований является оценка (на характерном примере) роли множителя Лагранжа при нахождении условного экстремума функционала для движущейся механической системы с двумя степенями свободы в среде с сопротивлением.

Условный экстремум функционала

Задан функционал, отражающий принцип действия для движущейся системы с двумя степенями свободы в среде с линейно-вязким сопротивлением

$$I = \int_0^T \left\{ \left(\frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2} n^2 (x_1^2 + x_2^2) \right) e^{2nt} \right\} dt, \quad (1)$$

где $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[0, T]$ с их производными $\dot{x}_1(t)$ и $\dot{x}_2(t)$; коэффициент сопротивления $n = \text{const}$.

Функционал (1) – принцип действия для механической системы с двумя степенями свободы. Функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ удовлетворяют граничным условиям:

$$x_1(0) = -1; \quad x_1(T) = 0; \quad x_2(0) = -2; \quad x_2(T) = 0. \quad (2)$$

Для любого $t \in [0, T]$ функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ таковы, что удовлетворяют еще конечной связи, ограничивающей движение объекта

$$x_1 - x_2 - e^{-3nt} = 0. \quad (3)$$

В соответствии со стратегией поиска решения задачи вариационного исчисления введена функция Лагранжа

$$F^*(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \lambda) = \left\{ \left(\frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2} n^2 (x_1^2 + x_2^2) \right) e^{2nt} \right\} + \lambda(t)(x_1 - x_2 - e^{-3nt}), \quad (4)$$

где $\lambda(t)$ – множитель, подлежащий определению и исследованию в процессе решения.

В данном случае система уравнений Эйлера–Лагранжа $F_{x_i}^* - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}_i}^* = 0$, $i = 1, 2$ записывается следующим образом:

$$(\ddot{x}_1 + 2n\dot{x}_1 + n^2 x_1) e^{2nt} = \lambda, \quad (\ddot{x}_2 + 2n\dot{x}_2 + n^2 x_2) e^{2nt} = -\lambda. \quad (5)$$

Уравнения (5) решаются с учетом ограничения (3). Из системы (5) следует:

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 + 2n(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + n^2(x_1 - x_2)e^{2nt} = 2\lambda. \quad (6)$$

С учетом (3) из (6) получена зависимость $(9n^2 - 6n^2 + n^2)e^{-nt} = 2\lambda$ или

$$\lambda = 2n^2 e^{-nt}.$$

С целью дальнейшего упрощения решения принято $n=1$. Тогда первое уравнение из (5) записывается как

$$\ddot{x}_1 + 2n\dot{x}_1 + n^2 x_1 = 2e^{-3t}.$$

Его общее решение имеет вид:

$$x_1(t) = C_2 e^{-t} + C_1 t e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-3t}.$$

Аналогично общее решение второго уравнения:

$$x_2(t) = D_2 e^{-t} + D_1 t e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-3t}.$$

С учетом принятых граничных условий (2) следует, что

$$x_1(t) = -1.5e^{-t} + 1.43te^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}, \quad x_2(t) = -1.5e^{-t} + 1.43te^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}. \quad (7)$$

Видно, что для функций (7) выполняется условие (3). Функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ удовлетворяют также краевым условиям (2). После подстановки (7) в (1) получено $I \cong 4,78$.

Множитель Лагранжа $\lambda(t) = 2e^{-t}$ является решением однородного дифференциального уравнения

$$\ddot{\lambda} - \lambda = 0,$$

которое, в свою очередь, представляет собой уравнение Эйлера для функционала, по смыслу являющегося принципом действия:

$$I_1 = \int_0^T \frac{1}{2} (\dot{\lambda}^2 + \lambda^2) dt. \quad (8)$$

В данном примере вопрос о единственности восстановления функционала (8) по заданной функции $\lambda(t)$ не актуален [4]. Если функция $\lambda(t)$ имеет размерность ускорения $[м/с^2]$, то после однократного интегрирования этой функции получим скорость. Критерии (1) и (8) имеют одинаковую размерность (и близкий физический смысл), т.е. они – принципы действия. При $T=1$ с. получено $I_1 \cong 1,73$. Для данного объекта функционал (принцип действия в форме Лагранжа), у которого подынтегральной функцией является кинетическая энергия, равен

$$I_2 = \int_0^T \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) dt \cong 3,01.$$

Выполняется следующее приближенное равенство:

$$I \cong I_1 + I_2.$$

Важно отметить, что за счет ограничения (3) происходит “регулирование” энергии при движении несвободной системы.

2. Построение поверхности функционала

Предлагается графический подход для оценки достаточности экстремума функционала. Функционал определен на нормированном пространстве с нормой $\max |x(t) - x_*(t)| \leq \varepsilon$ при $t \in [0,1]$ или $\max |x_1(t) - x_1^*(t)| \leq \varepsilon_1$ и $\max |x_2(t) - x_2^*(t)| \leq \varepsilon_2$ при $t \in [0,1]$, где $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ – число, определяющее окрестность нулевого порядка [2]. Функции $x_1(t)$, $x_2(t)$ обеспечивают экстремум функционалу (1).

Определение допустимых и удовлетворяющих краевым условиям функций $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$ осуществлялось по процедуре: при заданном ε и виде функций $x_1^*(a, t)$, $x_1^*(b, t)$ неизвестные множители a , b подлежат определению из уравнений

$$|x_1(t) - x_1^*(a, t)| = \varepsilon, \quad \frac{d}{dt}(x_1(t) - x_1^*(a, t)) = 0,$$

$$|x_2(t) - x_2^*(t)| = \varepsilon, \quad \frac{d}{dt}(x_2(t) - x_2^*(b, t)) = 0,$$

т.е. находятся t^* и a, b . Графики функций $x_1^*(t)$ и функции $x_1(t)$ (средняя кривая) изображены на рисунке 1, а графики функций $x_2^*(t)$ и функции $x_2(t)$ (средняя кривая) изображены на рисунке 2.

Представляет интерес построение поверхности функционала $I = I(\delta_1, \delta_2)$, где δ_1 и δ_2 параметры вариаций функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$; они вычисляются согласно предложенной в [5] методике, т.е. определяются параметры

$$\delta_1 = \int_0^1 [x_1(t) - x_1^*(t)] dt, \quad \delta_2 = \int_0^1 [x_2(t) - x_2^*(t)] dt.$$

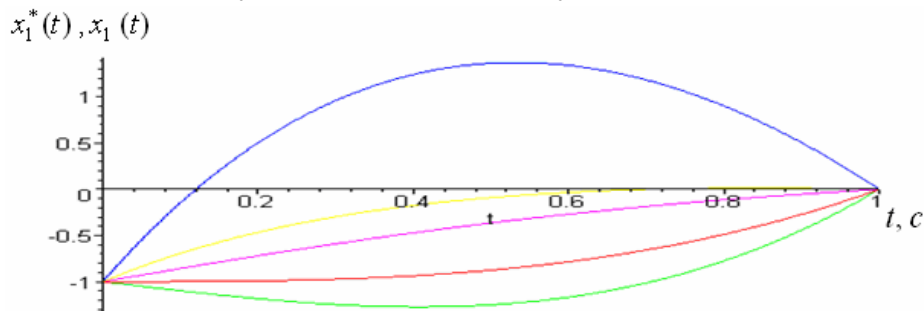


Рисунок 1–Графики функций $x_1^*(t)$ и функции $x_1(t)$

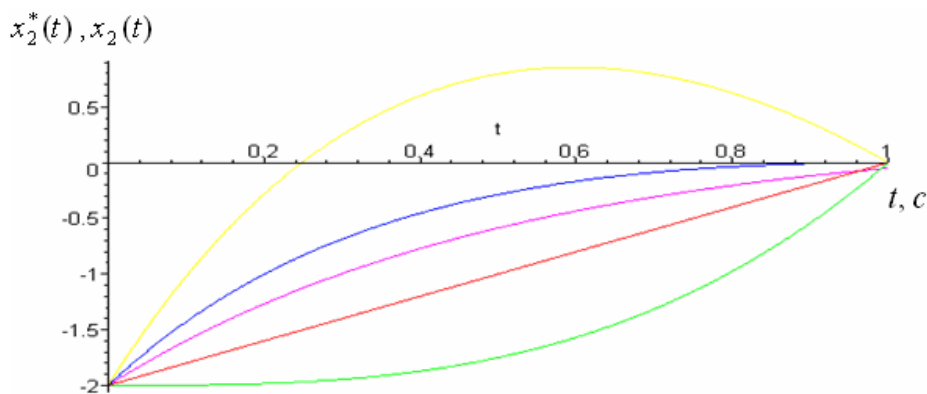


Рисунок 2– Графики функций $x_2^*(t)$ и функции $x_1(t)$

Итак, функции $x_1^*(t)$ и $x_2^*(t)$ близки к функциям $x_1(t)$ и $x_2(t)$ в смысле близости нулевого порядка; для варьирования использовались непрерывные и дифференцируемые функции, удовлетворяющие краевым условиям (таблица 1).

На рисунке 3 изображена поверхность эллиптического параболоида для $I = \delta_1^2 / a^2 + \delta_2^2 / b^2 + c$, где a, b, c – константы. Функционал I имеет глобальный минимум.

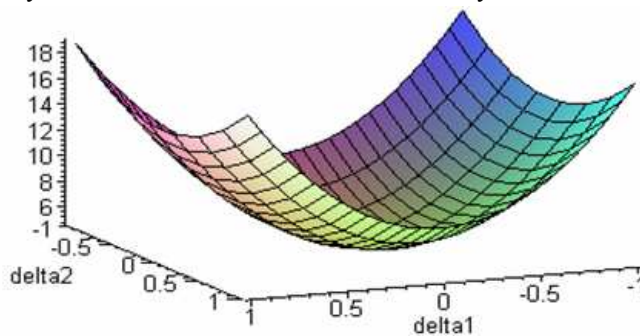


Рисунок 3– График зависимости функционала I от параметров δ_1 и δ_2

График зависимости функционала от параметров (поверхность функционала) дает окончательный ответ на вопрос об экстремуме (здесь минимум) функционала. Следует отметить, что стратегии поиска функционалов по заданной функции и построения поверхностей функционалов до настоящего времени не получили своего должного отражения в современной литературе.

Таблица 1– Функции $x_1^*(t)$ и $x_2^*(t)$, значения параметров δ_1 и δ_2 , значения функционала: I_* – при неизменной $x_2^*(t)$ и I_{**} – при неизменной $x_1^*(t)$.

$x_1^*(t)$	$-1-t+2t^3$	$-1+t^3$	$-1.5e^{-t}+1.43te^{-t}+0.5e^{-3t}$	$-0.12e^t+te^{-t}-0.88e^{-3t}$	$-2e^t+14.64e^{-t}+e^{-3t}$
$x_2^*(t)$	$-2+2t^3$	$-2+2t$	$-1.5e^{-t}+1.43te^{-t}-0.5e^{-3t}$	$-0.1e^{-t}+te^{-t}-1.9e^{-3t}$	$-1.5e^t-11.15te^{-t}-0.5e^{-3t}$
δ_1	0.589	0.339	0	-0.192	-1.161
δ_2	0.772	0.272	0	-0.218	-0.939
I_*	14.41	7.97	4.78	5.1	27.4
I_{**}	17.9	6.22	4.78	5.8	20.55

Выводы

1. Множитель $\lambda(t)$ в системе уравнений (5) играет роль “внутреннего управляющего воздействия”. В известных задачах [3] синтеза управлений множитель $\lambda(t)$ может задаваться заранее как решение уравнения Эйлера для вводимого дополнительного критерия, отражающего характер перераспределения энергетических затрат на достижение цели движения с ограничениями.

2. Процедура восстановления функционала по заданной функции (“реверсионное исчисление”) найдет применение при решении многих актуальных задач техники, в том числе – для оценки реальных процессов, которые можно описать аналитическими функциями [4].

В дальнейших исследованиях предполагается совершенствование процедур восстановления функционалов по заданным функциям с последующим обоснованием существования и единственности решений, а также построение поверхностей искомых функционалов с учетом возможных ограничений.

Библиографический список

1. Спасский Р.А. Классическое вариационное исчисление и вариационные принципы механики: учеб. пособие / Р.А. Спасский. — Севастополь: СевНТУ, 2004. — 176 с.
2. Пантелеев А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. — М.: Высш. шк., 2002. — 544 с.
3. Теория автоматического управления. Ч.П. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления; под. ред. А.А. Воронова. — М.: Высш. шк., 1977. — 288 с.
4. Бохонский А.И. Восстановление функционала по функции / А.И. Бохонский, Л.В. Барашова // Прикладные задачи математики и механики. XVII межд. науч.-техн. конф., 14 – 16 сент. 2009г. — Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2009. — С. 266 – 268.
5. Бохонский А.И. Поиск экстремума функционала в системе аналитических вычислений / А.И. Бохонский, А.В. Исаев // Зб. наук. пр. — Севастополь: Севастопольський ВМІ ім. П.С. Нахімова, 2007. — Вип. 1 (11). — С. 9 – 14.

Поступила в редакцию 26.10.2009 г.