

УДК 519.248

Д.И. Долгин,

В.П. Долгин, канд. техн. наук

Севастопольский национальный технический университет

ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Изложен метод решения задачи определения интенсивностей потоков, обеспечивающих заданные свойства системы массового обслуживания.

Ключевые слова: обслуживание, поток событий, вероятность состояний, обратная задача обслуживания.

Анализ системы массового обслуживания (СМО) обычно сводится к нахождению вероятностей ее состояний, на основании которых определяются характеристики эффективности ее работы [1]. При аналитическом исследовании СМО обычно заданы ее состояния и интенсивности потоков событий, переводящих систему из состояния в состояние. При изменении интенсивностей потоков событий изменяются вероятности состояний, в которых может находиться система. В этой ситуации коррекция свойств СМО возможна итерационными методами, что вызывает затруднения, так как изменение вероятности одного состояния, например, путем изменения интенсивностей потоков, связанных с этим состоянием, ведет к перераспределению вероятностей остальных состояний.

Целью статьи является изложение метода определения интенсивностей потоков по заданным вероятностям состояний СМО, обеспечивающим требуемые характеристики системы.

Рассмотрим систему с дискретными состояниями и непрерывным временем заданной структуры, для которой известно множество ее состояний S , граф состояний и значения некоторых интенсивностей потоков. Необходимо определить значения остальных интенсивностей потоков, обеспечивающих требуемые вероятности состояний системы, считая все потоки простейшими. В этом случае задача может быть сформулирована следующим образом.

Дано:

1. Состояния системы $S = \{S_0, S_1, \dots, S_n\}$.
2. Интенсивности потоков отказов (восстановлений).
3. Требуемые вероятности всех состояний.

Требуется:

Найти значения интенсивностей потоков восстановлений (отказов), обеспечивающих заданные вероятности состояний системы.

Решение будем искать для финальных вероятностей. Финальная вероятность состояния системы, которая определяется как среднее относительное время пребывания системы в том, или ином состоянии, может быть приближена к желаемой путем изменения интенсивностей потоков.

Пусть система состоит из n блоков, каждый из которых может независимо от других отказывать. Отказавший блок начинает сразу же восстанавливаться. Интенсивность потока отказов i -го блока обозначим через λ_i , а интенсивность потока его восстановления – через μ_i , где $i = [1, n]$.

В соответствии с приведенным описанием процесса система может пребывать в одном из следующих состояний: S_0 – исправна (работает), S_1 – неисправна, отказал блок 1 (на ремонте), S_2 – неисправна, отказал блок 2 (на ремонте), ..., S_n – неисправна, отказал блок n (на ремонте).

Размеченный граф состояний, соответствующий состояниям системы, изображен на рисунке 1.

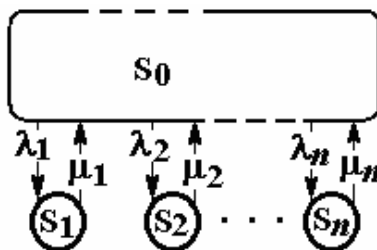


Рисунок 1 – Размеченный граф состояний

Для приведенного на рисунке 1 графа состояний составим систему уравнений Колмогорова по известному правилу [1], устанавливающему баланс между входящими и исходящими потоками каждого состояния. Для любого i -го состояния можно записать

$$\sum_{j=0}^n p_j \gamma_{ji} = p_i \sum_{j=0}^n \gamma_{ij}; i \neq j, \quad (1)$$

где γ_{ij} и γ_{ji} – интенсивности исходящих и входящих потоков соответственно; p_i ; p_j – финальные вероятности, n – номер конечного состояния системы.

Руководствуясь приведенным мнемоническим правилом (1), представим систему уравнений, описывающую возможные состояния системы обслуживания, в упрощенном виде:

$$\begin{aligned} S_0 : \quad & \sum_{j=1}^n p_j \mu_j = p_0 \sum_{i=1}^n \lambda_i; \\ S_1 : \quad & p_1 \mu_1 = p_0 \lambda_1; \\ S_2 : \quad & p_2 \mu_2 = p_0 \lambda_2; \\ & \dots\dots\dots \\ S_n : \quad & p_n \mu_n = p_0 \lambda_n. \end{aligned} \quad (2)$$

Для большинства систем интенсивности потоков отказов практически не могут быть существенно изменены, например, для технических систем они определяются, в основном, технологией изготовления узлов системы, для информационных систем поток заявок на обслуживание, как правило, не является управляемой величиной, но потоки восстановлений зависят от организации процесса обслуживания и могут изменяться в широких пределах. Это делает результат решения физически реализуемым.

Примем в приведенной системе уравнений (2) в качестве неизвестных, подлежащих определению, интенсивности потоков восстановлений μ_j ($j = \overline{1, n}$). Можно заметить, что число уравнений превышает число неизвестных. Это требует применения методов решения переопределенной системы уравнений. Однако для данной задачи можно упростить решение путем исключения любого уравнения из системы уравнений (2), так как уравнение Колмогорова для состояния S_0 является суммой уравнений, описывающих остальные состояния.

Для получения решения необходимо задать интенсивности потоков отказов λ_j ($j = \overline{1, n}$), требуемые значения вероятностей состояний p_j ($j = \overline{1, n}$) и решить линейную систему уравнений относительно μ_j ($j = \overline{1, n}$).

При экспериментальной проверке для определения эффективности метода была решена прямая задача при заданных случайным образом множествах интенсивностей потоков отказов и восстановлений системы

$$\lambda = \{ 0,268; 0,247; 0,316; 0,412; 0,266 \}; \quad (3)$$

$$\mu = \{ 1,50; 4,56; 2,86; 3,28; 3,39 \}.$$

Определена вероятность состояния S_0

$$p_0 = 1 / \left(1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i / \mu_i \right),$$

где n – число неисправных состояний системы, и вероятности остальных состояний ($S_1, S_2, \dots, S_n$) по формуле

$$p_i = p_0 \lambda_i / \mu_i,$$

что составило

$$p = \{ 0,646; 0,115; 0,035; 0,0714; 0,0815; 0,0511 \}. \quad (4)$$

При решении обратной задачи было задано множество λ , множество вероятностей состояний p , а также определено множество μ . Для этого составлена система линейных уравнений Колмогорова (2), алгоритмическая интерпретация которого имеет вид

```
eq[0]:=P[0]*sum('λ[i]',i=1..n)=sum('P[i]*μ[i]',i=1..n);
for i to n do eq[i]:=μ[i]*P[i]=λ[i]*P[0] od;
Sys:={seq(eq[i],i=0..n-1)};
Var:={seq(μ[i],i=1..n)};
Sol:=solve(Sys,Var);
```

и решена относительно $\mu[i]$ ($i = \overline{1, n}$) с помощью математического пакета Maple. В результате получено множество интенсивностей μ с погрешностью, лежащей за пределами разрядной сетки вычислительной системы.

При построении решения по схеме (2), в качестве переменных, подлежащих выбору, могут быть выбраны интенсивности потоков отказов и восстановлений, а также вероятности состояний, в сочетаниях, не нарушающих корректность системы (2). Для примера решена задача коррекции системы при тех же исходных данных при следующей постановке задачи.

Дано:

1. Состояния системы $S = \{S_0, S_1, \dots, S_n\}$.
2. Интенсивности потоков отказов (некоторые значения).
3. Интенсивности потоков восстановлений (некоторые значения).
4. Требуемые вероятности некоторых состояний.

Требуется:

Найти значения интенсивностей потоков, обеспечивающих заданные вероятности состояний системы, и определить вероятности остальных состояний системы.

К системе уравнений (2) добавлено уравнение нормировки. В качестве неизвестных, подлежащих определению, выбраны интенсивности потоков и вероятности состояний, образующие множество неизвестных

$$X = \{\lambda_1, p_2, \mu_3, \mu_4, p_5\}.$$

Матрица коэффициентов A и матрица свободных членов B представлены в общем виде:

$$A = \begin{bmatrix} p_0 & -\mu_2 & -p_3 & -p_4 & -\mu_5 \\ p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} p_1\mu_1 - p_0(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) \\ p_1\mu_1 \\ p_0\lambda_2 \\ p_0\lambda_3 \\ p_0\lambda_4 \\ p_0\lambda_5 \\ 1 - p_0 - p_1 - p_3 - p_4 \end{bmatrix}.$$

Решается система линейных уравнений $AX=B$ с переопределенной матрицей методом квадратных корней [2].

На рисунке 2 изображена гистограмма распределения полученных вероятностей состояний рассмотренного примера.

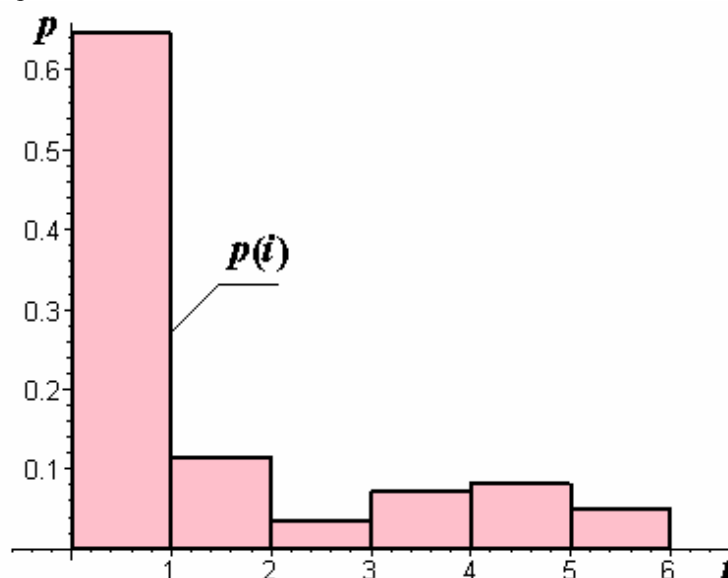


Рисунок 2 – Гистограмма распределения вероятностей состояний

Значения вектора неизвестных X , включая вероятности состояний p_2 и p_5 , в результате решения задачи получены с погрешностью, не превышающей единицы младшего разряда вычислительной

системы, что показано на рисунке 3, на котором нанесены точками значения погрешностей i -го компонента вектора.

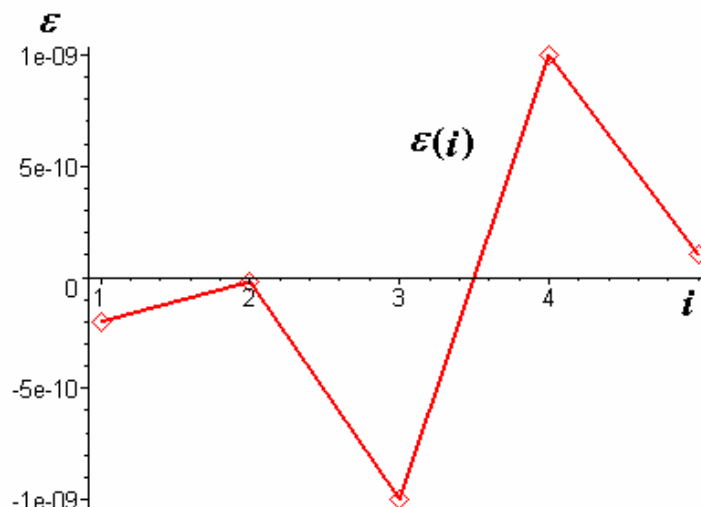


Рисунок 3 – График погрешности

По результатам коррекции можно построить графики текущих значений вероятностей при известных значениях интенсивностей потоков (3). Для этого составим систему уравнений Колмогорова и решим их относительно искомых вероятностей. Уравнения Колмогорова для условий примера имеют вид:

$$\begin{aligned}
 p_0'(t) + p_0(t) \sum_{i=1}^n \lambda_i &= \sum_{i=1}^n p_i(t) \mu_i; \\
 p_1'(t) + p_1(t) \mu_1 &= p_0(t) \lambda_1; \\
 p_2'(t) + p_2(t) \mu_2 &= p_0(t) \lambda_2; \\
 &\dots\dots\dots \\
 p_n'(t) + p_n(t) \mu_n &= p_0(t) \lambda_n.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Запишем условие нормировки

$$\sum_{i=1}^n p_i(t) = 1.$$

Для решения полученной системы уравнений (5) необходимо ввести в систему условие нормировки [1], заменив им одно из уравнений системы (5). Ввод уравнения нормировки в систему уравнений (5) определяет начальное состояние системы. Решение системы линейных дифференциальных уравнений (5) получим с помощью операторного метода. Перейдем к операторной форме, заменив уравнение Колмогорова, описывающее состояние S_0 , уравнением нормировки. В этом случае в качестве начального состояния системы будет состояние S_0 , при котором его вероятность в начальный момент времени ($t=0$) принята равной $p_0(0) = 1$. В качестве метода решения применим операторный метод, для которого система уравнений (5) примет вид:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n p_i(s) &= 1/s; \\
 s p_1(s) + p_1(s) \mu_1 &= p_0(s) \lambda_1; \\
 s p_2(s) + p_2(s) \mu_2 &= p_0(s) \lambda_2; \\
 &\dots\dots\dots \\
 s p_n(s) + p_n(s) \mu_n &= p_0(s) \lambda_n.
 \end{aligned} \tag{6}$$

В результате решения линейной системы уравнений (6) при значениях интенсивностей потоков, совпадающих с заданными (3), получим операторные функции вероятностей состояний:

$$\begin{aligned}
 p_0(s) &= \frac{s^5 + 15,6s^4 + 94,8s^3 + 280s^2 + 399s + 218}{s^6 + 17,1s^5 + 114s^4 + 366s^3 + 568s^2 + 337s}; \\
 p_1(s) &= 0,268 \frac{s^4 + 14,1s^3 + 73,7s^2 + 169s + 145}{s^6 + 17,1s^5 + 114s^4 + 366s^3 + 568s^2 + 337s}; \\
 p_2(s) &= 0,247 \frac{s^4 + 11,0s^3 + 44,5s^2 + 77,1s + 47,7}{s^6 + 17,1s^5 + 114s^4 + 366s^3 + 568s^2 + 337s}; \\
 p_3(s) &= 0,316 \frac{s^4 + 11,3s^3 + 12,7s^2 + 58,4s + 76,1}{s^6 + 17,1s^5 + 114s^4 + 366s^3 + 568s^2 + 337s}; \\
 p_4(s) &= 0,412 \frac{s^4 + 12,3s^3 + 54,4s^2 + 102s + 66,3}{s^6 + 17,1s^5 + 114s^4 + 366s^3 + 568s^2 + 337s}; \\
 p_5(s) &= 0,266 \frac{s^4 + 12,2s^3 + 53,4s^2 + 98,8s + 64,2}{s^6 + 17,1s^5 + 114s^4 + 366s^3 + 568s^2 + 337s}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Применив процедуру обратного преобразования Лапласа, перейдем к оригиналам и получим окончательный результат в виде функций времени вероятностей состояний. Текущие значения вероятностей состояний системы получены с помощью математического пакета интегральных преобразований Maple, которые после упрощения имеют вид:

$$\begin{aligned}
 p_0(t) &= 0,348 \sin(1,32t + 1,31) \exp(-5,18t) + 0,185 \sin(0,888t + 0,0846) \exp(-2,57t) + 0,00203 \exp(-1,59t) + 0,647; \\
 p_0(t) &= 0,0193 \sin(1,32t - 1,77) \exp(-5,18t) + 0,0162 \sin(0,888t - 1,86) \exp(-2,57t) + 0,0808 \exp(-1,59t) + 0,115; \\
 p_0(t) &= 0,0557 \sin(1,32t - 2,59) \exp(-5,18t) + 0,0208 \sin(0,888t - 2,78) \exp(-2,57t) + 0,00133 \exp(-1,59t) + 0,035; \\
 p_0(t) &= 0,0357 \sin(1,32t - 2,07) \exp(-5,18t) + 0,0158 \sin(0,888t - 2,1) \exp(-2,57t) + 0,00467 \exp(-1,59t) + 0,0714; \\
 p_0(t) &= 0,0601 \sin(1,32t - 1,97) \exp(-5,18t) + 0,0432 \sin(0,888t - 1,96) \exp(-2,57t) + 0,0143 \exp(-1,59t) + 0,811; \\
 p_0(t) &= 0,0387 \sin(1,32t - 1,99) \exp(-5,18t) + 0,0287 \sin(0,888t - 2,41) \exp(-2,57t) + 0,0036 \exp(-1,59t) + 0,507.
 \end{aligned}$$

На рисунке 4 изображены графики функций вероятностей состояний системы, где график начального состояния S_0 вероятности $p_0(t)$ для наглядности представлен в уменьшенном масштабе. Асимптотами функций являются финальные вероятности (4) состояний системы (на рисунке 4 показаны пунктиром), которые в случае необходимости могут быть вычислены по приведенным выражениям текущих вероятностей состояний (7) как предельные значения при $t \rightarrow \infty$

$$p_i(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t); i=0..n.$$

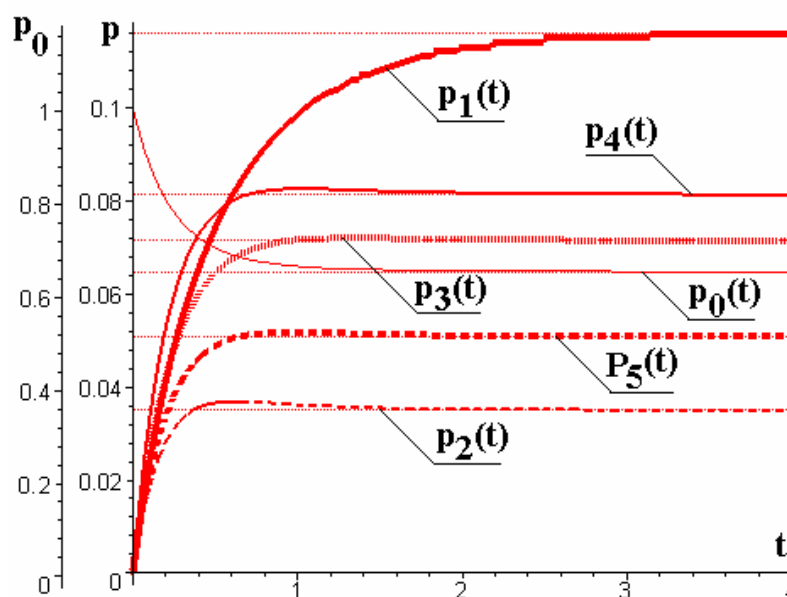


Рисунок 4 – Графики функций текущих вероятностей состояний системы

Таким образом, применив изложенный метод, можно решать задачи комплексной оптимизации процессов, вводя одновременно требования к различным параметрам систем обслуживания. Благодаря возможности введения дополнительных неизвестных, например, таких как вероятности состояний системы, появляется возможность дополнять вектор неизвестных в случае, если число неизвестных меньше числа уравнений, и приводить матрицу коэффициентов к квадратной для решения нормальной системы уравнений. Это упрощает процедуру анализа и синтеза системы.

Перспективы дальнейших исследований состоят в распространении рассмотренного метода решения обратной задачи на системы обслуживания с немарковскими процессами.

Библиографический список

1. Вентцель Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения: учеб. пособие для втузов / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. — 2-е изд., стер. — М.: Высш. шк., 2000. — 383 с.
2. Дьяконов В.П. Справочник по алгоритмам и программам на языке Бейсик для персональных ЭВМ / В.П. Дьяконов. — М.: Наука, 1989. — 240 с.

Поступила в редакцию 25.03.2010 г.