

УДК 518.5

В.Ф. Ротко, доцент, канд. техн. наук*Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ПОСТРОЕНИЯ ГРАФА С ПРЕДПИСАННОЙ ЦИКЛИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ**

Предлагается эффективный алгоритм построения неориентированного графа с предписанной циклической структурой, который основан на использовании теоремы Уитни о 2-изоморфизме, теоремы о существовании эйлеровой цепи в гипографе и не требует использования сложной структуры данных

Ключевые слова: фундаментальный цикл, гипограф, эйлерова цепь, 2-изоморфизм, преобразование Уитни, активное гипоребро.

Многие задачи из различных предметных областей могут быть сведены к задаче синтеза графа с предписанной циклической структурой. К таковым можно отнести: синтез переключаемых схем в топологическом базисе [1], синтез электрических цепей [2], характеристика планарности графа [3], решение отдельных актуальных задач биофизики [4] и другие. Задача синтеза графа с предписанной структурой фундаментальных циклов (или разрезов) имеет много интерпретаций, поэтому разработка эффективных алгоритмов решения этой задачи представляется актуальной. К настоящему моменту времени известно достаточно много методов решения упомянутой задачи, которые базируются на различных принципах и обладают различными характеристиками временной и пространственной сложности [1, 2, 5–9]. Тем не менее, поиск алгоритмов с менее жесткими требованиями к вычислительным ресурсам (временному и пространственному), а также обладающих простой верифицируемостью продолжается.

В общей постановке рассматриваемая задача может быть сформулирована следующим образом. Заданы взаимно дуальные базисы фундаментальных циклов и разрезов в канонической форме матрицей $[T, H]$, где T интерпретируется как множество ребер (дуг), входящих в остов искомого графа (мультиграфа), а H – как множество ребер (дуг), входящих в коостов искомого графа (мультиграфа). В дальнейшем будем использовать только термин «граф» для понятия как обыкновенного графа, так и мультиграфа. Каждый k -й столбец матрицы описывает фундаментальный цикл f_{cu_k} , где $f_{cu_k} = \{h_k\} \cup T_k$, $h_k \in H$, $T_k \subseteq T$, а каждая k -я строка матрицы – фундаментальный разрез f_{ci_k} , где $f_{ci_k} = \{t_k\} \cup H_k$, $t_k \in T$, $H_k \subseteq H$. Множество $\{T, H\}$ представляет двублочное разбиение множества ребер E (или дуг A) искомого графа $G(V, E)$ ($G(V, A)$).

Требуется либо найти связный граф $G(V, E)$ ($G(V, A)$) с предписанными базисами фундаментальных циклов/разрезов, либо указать, что такого графа не существует.

Целью предлагаемой **статьи** является описание эффективного алгоритма построения графа с предписанной циклической структурой.

Основное внимание будет уделено синтезу связного неориентированного графа $G(V, E)$, так как задача синтеза связного ориентированного графа $G(V, A)$ легко сводится к задаче синтеза соответствующего неориентированного графа $G^*(V, E)$ [9].

Анализ работ, посвященных решению поставленной задачи, показывает, что предложенные в них методы и алгоритмы могут быть классифицированы в соответствии со следующими признаками: 1) интерпретация исходного описания задания на синтез графа (множество фундаментальных циклов [1, 8], множество фундаментальных разрезов [5–7, 9]); 2) характерные особенности метода (согласование фундаментальных циклов [1, 8], преобразование множества фундаментальных разрезов во множество центральных разрезов графа [5, 7, 9], использование теории резистивных электрических цепей [2], использование теории матроидов [6], применение t -декомпозиции [8]); 3) класс синтезируемого графа (неориентированный [1, 2, 5], ориентированный [5, 7, 9]).

Анализ известных методов решения задачи синтеза связного неориентированного графа с предписанными базисами фундаментальных циклов/разрезов показывает, что определенными преимуществами обладают методы, ориентированные на согласование фундаментальных циклов. Совершенствование этого подхода возможно при эффективной реализации функции согласования графа, реализующего некоторое подмножество множества фундаментальных циклов с очередным фундаментальным циклом.

1. Основные понятия и постановка задачи. Числом вершинной связности (или просто числом связности графа $G(V, E)$) называют наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному или одновершинному графу. Граф будем называть k -разделимым относительно множества

$\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq V$, если $G(V - \{v_1, v_2, \dots, v_k\}, E - \bigcup_{v \in \{v_1, v_2, \dots, v_k\}} E(v))$ является несвязным (или односторонним).

Важную роль играют 2-разделимые графы относительно $\{v, w\} \subseteq V$, где $\{v, w\}$ можно трактовать как гипорребро. В соответствии с теоремой Х. Уитни о 2-изоморфизме, операция «поворота» компонентов связности относительно таких множеств $\{v, w\}$ вершин сохраняет циклы и разрезы графа и, естественно, его фундаментальные циклы и разрезы. Множество неизоморфных графов, обладающих эквивалентными базисами фундаментальных циклов/разрезов будем называть множеством клонов графа. Это множество клонов графа $G(V, E)$ может быть описано ассоциированным с ним гипографом $HG(V, E \cup HE)$, где HE — множество гипорребер. Следует заметить, что если $G(V, E)$ является 1-разделимым относительно $\{v\}$, то он является 2-разделимым относительно $\{v, w\}$, где $w \in V - \{v\}$.

Будем полагать, что с множеством вершин $\{v, w\}$ 2-разделимого графа $G(V, E)$ ассоциировано гипорребро, если удаление этих вершин и инцидентных им ребер приводит к несвязному графу $G(V - \{v, w\}, E - (E_v \cup E_w))$, где E_v и E_w — множества ребер, инцидентных вершинам v и w соответственно.

Гипорребро $\{v, w\}$ характеризуется разбиением графа $G(V - \{v, w\}, E - (E_v \cup E_w))$ на максимальные компоненты связности $G_i(V_i, E_i)$, $V_i \subseteq V - \{v, w\}$, $E_i \subseteq E - (E_v \cup E_w)$. Подграфы $G_i^*(V_i \cup \{v, w\}, E_i^*)$ графа $G(V, E)$ могут подвергаться преобразованию Уитни с сохранением 2-изоморфизма $G(V, E)$. Выполнение этих преобразований порождает множество клонов $G(V, E)$.

Сформулируем задачу синтеза связного неориентированного графа $G(V, E)$ с предписанным базисом фундаментальных циклов.

Постановка задачи. Задано множество $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$, где $C_i \subseteq E$, $\bigcup_i C_i = E$, $E = T \cup H$, $T \cap H = \emptyset$, $C_i = \{h_i\} \cup T_i$, $h_i \in H$, $T_i \subseteq T$, которое интерпретируется как базис фундаментальных циклов некоторого графа $G(V, E)$. Требуется либо найти хотя бы один клон этого графа, либо указать, что множество клонов этого графа пусто.

2. Алгоритм решения задачи. Предлагаемый алгоритм решения поставленной задачи основан на согласовании фундаментальных циклов и отличается от методов [1, 8] способом выполнения согласования текущего графа с очередным фундаментальным циклом. При этом не используются сложные структуры данных, как это предложено в [8].

Пусть согласованы i фундаментальных циклов $C_1, C_2, \dots, C_i$ и результат согласования представлен графом $G_i(V_i, E_i)$.

Требуется согласовать очередной фундаментальный цикл C_{i+1} с графом $G_i(V_i, E_i)$ и представить результат согласования $G_{i+1}(V_{i+1}, E_{i+1})$, если такое согласование возможно. В противном случае указать, что такое согласование невозможно.

Граф $G_i(V_i, E_i)$ представляет некоторый клон множества клонов ассоциированного гипографа $HG_i(V_i, HE_i)$, где $HE_i = E_i \cup H_i$, H_i — множество гипорребер, указывающих множество $\{v, w\}$, вершин, относительно которых граф $G_i(V_i, E_i)$ 2-разделим. Число гипорребер ассоциированного гипографа может быть достаточно велико. Так, для графа C_n , $n > 2$ число гипорребер равно $n \cdot (n - 3) / 2$.

При согласовании очередного фундаментального цикла C_{i+1} с графом $G_i(V_i, E_i)$ множество ребер C_{i+1} разбивается на два подмножества C'_{i+1} и C''_{i+1} следующим образом: $C'_{i+1} = E_i \cap C_{i+1}$, $C''_{i+1} = C_{i+1} - C'_{i+1}$.

Множество ребер C'_{i+1} называют множеством «помеченных» ребер. Очевидно, что согласование фундаментального цикла C_{i+1} с графом $G(V_i, E_i)$ возможно, если найдется клон $G^*(V_i, E_i)$ ассоциированного гипографа $HG_i(V_i, HE_i)$, в котором C'_{i+1} представляет собой цепь между множеством вершин $\{x, y\} \subseteq V_i$. Присоединение цепи C''_{i+1} к вершинам из множества $\{x, y\}$ позволяет найти $G(V_{i+1}, E_{i+1})$, $E_{i+1} = E_i \cup C''_{i+1}$, $V_{i+1} = V_i \cup V(C''_{i+1})$.

Центральной задачей согласования фундаментального цикла C_{i+1} с графом $G(V_i, E_i)$ является поиск клона $G^*(V_i, E_i)$. В общем случае такой клон может не существовать. Поиск клона $G^*(V_i, E_i)$ путем генерации (и проверки нужного свойства) всего множества 2-изоморфных (но не изоморфных) графов представляется нерациональным. Предлагается вести поиск гипоцепи в множестве $HE_i^* = C'_{i+1} \cup H_i^*$, где $H_i^* \subseteq H_i$ представляет множество «активных» гипорребер, которая описывает «соединение» ребер из C'_{i+1} в цепь. Если такая активная гипоцепь существует, то искомым клон $G^*(V_i, E_i)$ существует и может

быть построен путем выполнения преобразований Уитни (повороты отдельных подграфов относительно вершин $\{v, w\}$ представленных гипорребром).

Гипорребро (или цепь гипорребер) считается активным, если операция Уитни позволяет «соединить» два «помеченных» ребра.

Теперь можно воспользоваться теоремой Эйлера о существовании эйлеровой цепи в графе с множеством ребер $HE_i^* = C'_{i+1} \cup H_i^*$. По этой теореме число вершин нечетной степени должно быть равно 2.

Простейшими случаями согласования фундаментального цикла C_{i+1} с графом $G(V_i, E_i)$ являются:

- 1) $C'_{i+1} = \emptyset$, в этом случае к любой вершине $x \in V_i$ «подсоединяется» цепь из C'_{i+1} ;
- 2) граф $G(V_i, E_i) = G^*(V_i, E_i)$ с вершинами из $\{v, w\}$ нечетной степени на C'_{i+1} ; в этом случае цепь из C'_{i+1} «подсоединяется» к вершинам v и w .

Простейшими случаями несогласования фундаментального цикла C_{i+1} с графом $G(V_i, E_i)$ являются:

- 1) $H_i^* = \emptyset$, а число вершин нечетной степени на C'_{i+1} больше двух;
- 2) не существует $H_i^* \subseteq H_i$, при котором число вершин нечетной степени на HE_i не больше двух.

Число вершин нечетной степени можно уменьшить, если эти вершины можно соединить активным гипорребром (цепью активных гипорребер).

3. Иллюстрация работы алгоритма. Рассмотрим пример, приведенный в работе [8].

Исходное описание задачи синтеза графа с предписанной циклической структурой представлено следующей матрицей $[T \cdot H]$:

$$[T \cdot H] = \begin{array}{c|cccccccc} & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ \hline 1 & 1 & 1 & . & . & . & . & . & 1 \\ 2 & . & . & 1 & 1 & 1 & . & . & 1 \\ 3 & . & . & 1 & 1 & 1 & . & . & 1 \\ 4 & . & . & 1 & 1 & 1 & . & 1 & 1 \\ 5 & . & . & . & . & . & 1 & 1 & 1 \\ 6 & . & . & 1 & 1 & 1 & 1 & . & . \\ 7 & . & 1 & 1 & 1 & 1 & . & . & . \\ 8 & . & 1 & 1 & . & 1 & . & . & . \\ 9 & . & 1 & . & . & . & . & . & . \end{array}$$

Множество фундаментальных циклов

$$FC = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8\},$$

где $C_1 = \{1, 10\}$, $C_2 = \{1, 7, 8, 9, 11\}$, $C_3 = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 12\}$, $C_4 = \{2, 3, 4, 6, 7, 13\}$, $C_5 = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 14\}$, $C_6 = \{5, 6, 15\}$, $C_7 = \{4, 5, 16\}$, $C_8 = \{1, 2, 3, 4, 5, 17\}$.

Для рассматриваемого примера решение существует; процесс согласования фундаментальных циклов представлен на рисунке 1.

На каждом шаге согласования графа $G_s(V_s, E_s)$ с очередным фундаментальным циклом C_{s+1} множество C'_{s+1} представляется «помеченными» ребрами в G_s и указывается множество C''_{s+1} .

$G_1(V_1, E_1) = C_1$; если решение существует, то $G_n(V_n, E_n)$ представляет искомое решение; иначе процесс согласования завершается с уведомлением, что решение не существует. «Помеченные» ребра отображаются «жирными» линиями, использованные активные гипорребра – пунктирными линиями.

Рассмотрим теперь пример 2 из работы [1]. Исходное описание задачи синтеза графа с предписанной циклической структурой представлено следующей матрицей $[T \cdot H]$.

$$[T \cdot H] = \begin{array}{c|cccc} & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & . & . & 1 \\ 3 & 1 & . & 1 & . \\ 4 & 1 & 1 & . & . \end{array}$$

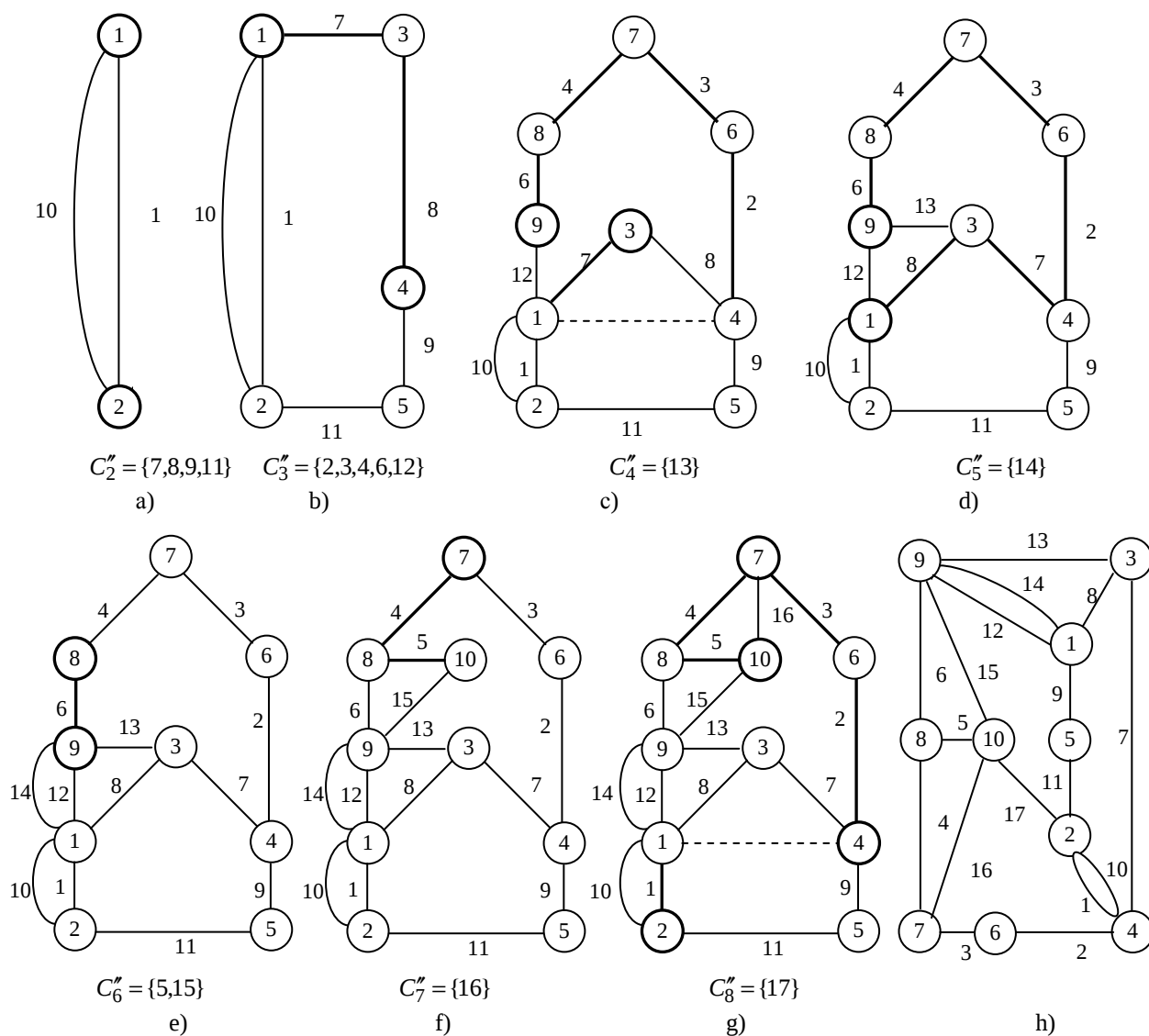


Рисунок 1 – Иллюстрация этапов а) ... г) построения искомого графа г) путем последовательного согласования фундаментальных циклов (решение г) существует)

Множество фундаментальных циклов $FC = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$, где $C_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C_2 = \{1, 4, 6\}$, $C_3 = \{1, 3, 7\}$, $C_4 = \{1, 2, 8\}$. Процесс согласования фундаментальных циклов представлен на рисунке 2. Он показывает, что решения не существует (указанное единственное гипотетическое ребро на этапе с) не является активным).

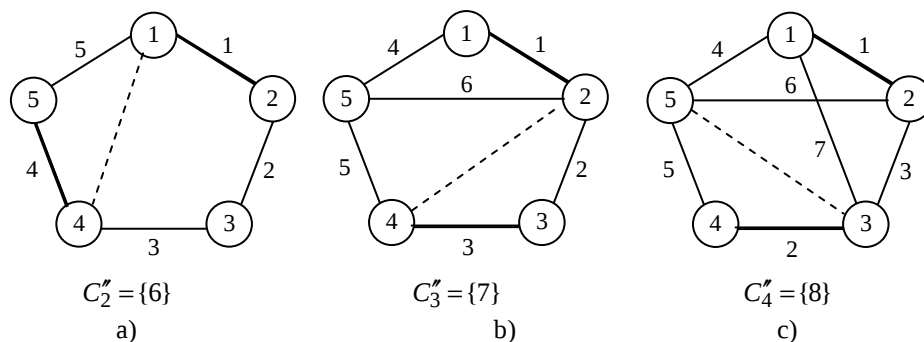


Рисунок 2 – Иллюстрация этапов а) ... г) согласования фундаментальных циклов (решение не существует)

Предложенный алгоритм может быть непосредственно использован при синтезе бесповторных схем в топологическом базисе. Дальнейшие исследования, связанные с синтезом переключаемых схем

в топологическом базисе, требуют решение задачи в рамках сети, ребрам которой могут приписываться зависимые метки x_i и $\bar{x}_i$ булевых переменных. Такие схемы называют квазибесповторными. Еще более сложной задачей является синтез оптимальных повторных схем в топологическом базисе, для которых существует более одного ребра, помеченного одним и тем же символом x_i (или $\bar{x}_i$).

Заключение. Предположенный алгоритм построения графа с предписанной циклической структурой требует меньше вычислительных ресурсов, простую структуру данных и основан на более простых математических концепциях, чем известные ранее алгоритмы.

Библиографический список использованной литературы

1. Лёфгрэн Л. Решение проблемы реализуемости неизбыточными булевыми схемами /Л. Лёфгрэн // Кибернетический сборник. — 1962. — № 5. — С. 60–101.
2. Свами М. Графы, сети и алгоритмы / М. Свами, К. Тхуласираман. — М.: Мир, 1984. — 455 с.
3. Маклейн С. Комбинаторное условие для плоских графов /С. Маклейн // Кибернетический сборник. Новая серия. — 1970. — № 7. — С. 133–144.
4. Gusfield D. Haplotyping as Perfect Phylogeny. Conceptual Framework and Efficient Solutions /D. Gusfield // RECOMB. — 2002. — P. 166–175.
5. Mayeda W. Necessary and sufficient conditions for realizability of cut-set matrices / W. Mayeda // IRE Trans. Circuit Theory. — 1960. — Vol. 7. — № 1. — P. 79–81.
6. Tutte W.T. From matrices to graphs / W.T. Tutte // Canad. J. Math. — 1964. — Vol. 16. — P. 108–127.
7. Ротко В.Ф. Эффективные алгоритмы синтеза графов с заданным множеством фундаментальных разрезов или циклов / В.Ф. Ротко // Кибернетика. — 1986. — № 1. — С. 39–45.
8. Bixby R.E. An almost linear-time algorithm for graph realization / R.E. Bixby, D.K. Wagner // Mathematics of Operations Research. — 1988. — Vol. 13. — № 1. — P. 99 — 123.
9. Ротко В.Ф. Особенности синтеза ориентированного графа с заданным множеством фундаментальных циклов или разрезов / В.Ф. Ротко // Логическое проектирование. — Минск: ИТК НАН Беларуси. — 1999. — Вып. 4. — С. 82–90.

Поступила в редакцию 21.05.2010 г.

Ротко В.Ф. Оптимізація процесу побудови графа з наказаною циклічною структурою

Пропонується ефективний алгоритм побудови неорієнтованого графа з наказаною циклічною структурою, який заснований на використанні теореми Уїтні про 2-ізоморфізм, теореми про існування ейлерового ланцюга у гіпографі та не вимагає використання складної структури даних.

Ключові слова: фундаментальний цикл, гіпограф, ейлерів ланцюг, 2-ізоморфізм, перетворення Уїтні, активне гіпорєбро.

Rotko V.F. Optimization of the process of developing a graph with the prescribed cyclical structure

An effective algorithm for developing a non-directed graph with the prescribed set of fundamental cycles that is based on using the Whitney's theorem about 2-isomorphism, the theorem on existence of Eulerian chain in a hipograph, and doesn't require usage of a complicated data structure is proposed.

Keywords: fundamental cycle, hipograph, eulerian hipochain, 2-isomorphism, Whitney's transformation, active hipoedge.