

УДК 621.391.27:62.50

В.К. Маригодов, профессор, д-р техн. наук,**Г.А. Тихонов, доцент, канд. техн. наук***Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***РЕШЕНИЕ РЕВЕРСИОННОЙ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ
ОПТИМАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ**

Рассмотрена возможность решения обратной вариационной задачи, заключающейся в нахождении исходного функционала по результату минимального значения среднеквадратической ошибки в теории оптимальной линейной фильтрации сигналов.

Ключевые слова: оптимальная линейная фильтрация, обратная вариационная задача, функционал, уравнение Эйлера–Лагранжа.

Постановка проблемы и ее связь с научно-техническими задачами. При решении задач оптимизации производственных процессов, в измерительных информационных системах, в сетях дистанционного образования возникает задача обеспечения помехоустойчивой обработки информации. Для этой цели широкое применение находят методы оптимального линейного предсказания и оптимальной линейной фильтрации (ОЛФ). Вариационная техника и теоретико-игровой подход позволяют отыскать минимаксное значение среднеквадратической ошибки на выходах оптимальных корректирующего и линейного фильтров.

В некоторых ситуациях представляет также определенный интерес на основе найденного минимального (или минимаксного) значения ошибки фильтрации найти исходный функционал, т. е. решить обратную вариационную задачу или реверсионную в соответствии с терминологией [1]. Заметим, что в некоторых случаях, когда экстремальное значение искомого функционала не содержит варьируемых переменных, реверсионная задача не имеет решения. В таких ситуациях следует пользоваться не прямыми, а косвенными методами поиска исходного функционала, которые исследованы в этой статье.

Обзор публикаций и анализ нерешенных задач. Аппарат оптимальной линейной фильтрации позволяет получить наилучшее решение в случае гауссовских моделей сигналов и помех. Метод ОЛФ широко известен и находит отражение в фундаментальных исследованиях [2 – 4]. Однако в этих работах совершенно не рассматриваются вопросы обратных вариационных задач. Такая задача исследована, например, в [5], которая относится к теории оптимального линейного предсказания и корректирования сигнала. Вполне естественно, что реверсионная задача в теории ОЛФ также представляет теоретический и практический интерес в рамках оптимизации производственных процессов.

Цель исследований. Эта цель состоит в том, чтобы показать возможность решения инверсионной задачи в теории оптимальной линейной фильтрации, связанной с косвенным методом нахождения исходного функционала по полученному экстремальному значению среднеквадратической ошибки фильтрации.

В теоретико-игровой постановке можно говорить об отыскании минимаксных значений (цены игры) при инвертировании варьируемых переменных.

Изложение основных результатов исследования. Среднеквадратическое значение ошибки $\overline{\varepsilon^2}$ при ОЛФ на выходе оптимального линейного фильтра определяется выражением [4]

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[G(\omega) |1 - |K(j\omega)|^2 + N(\omega) K(j\omega)|^2 \right] d\omega, \quad (1)$$

где $G(\omega)$, $N(\omega)$ – спектральные плотности мощности соответственно фильтруемого сигнала и аддитивной помехи, действующей в канале связи; $|K(j\omega)|$ – АЧХ оптимального линейного фильтра.

Если реверсионная задача решается теоретико-игровым методом, то имеет место неравенство [6]

$$\min_K \max_N \overline{\varepsilon^2}(K, N) \geq \max_N \min_K \overline{\varepsilon^2}(K, N), \quad (2)$$

или

$$\min_G \max_N \overline{\varepsilon^2}(G, N) \geq \max_N \min_G \overline{\varepsilon^2}(G, N), \quad (3)$$

где $K = |K(j\omega)|$, $N = N(\omega)$, $G = G(\omega)$ – варьируемые параметры.

В игровой постановке имеет место конфликтная ситуация между оператором системы передачи информации (СПИ), т.е. игроком I, и системой радиопомех (СРП), т.е. игроком II. Стратегия игрока I

состоит в минимизации (1), а стратегия игрока II – в максимизации (1). Для нахождения оптимальных (минимаксных) стратегий игроков введем дополнительные условия, которые заключаются в ограничении средних мощностей сигнала и помехи на входе канала:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega = P_C, \quad (4)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} N(\omega) d\omega = P_{II}. \quad (5)$$

Варьируя функционал (1) по $G(\omega)$ и $N(\omega)$ с учетом (4) и (5), получаем [6]

$$V = \max_N \min_G \overline{\varepsilon^2}(G, N) = \min_G \max_N \overline{\varepsilon^2}(G, N) = \frac{P_C P_{II}}{P_C + P_{II}}, \quad (6)$$

где V – цена игры (функция выигрыша).

Известно, что минимальная среднеквадратическая ошибка на выходе оптимального линейного фильтра равна [2 – 4]

$$\overline{\varepsilon_{\min}^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\omega)N(\omega)}{G(\omega) + N(\omega)} d\omega. \quad (7)$$

Заметим, что такой фильтр, называемый фильтром Колмогорова – Винера, физически нереализуем, поскольку обладает практически бесконечной задержкой сигнала. Тем не менее, в теоретических исследованиях можно использовать (7).

Задача реверсионного исчисления состоит в том, чтобы на основе (7) получить исходный функционал (1). Прямое варьирование (7) при дополнительных условиях (4), (5) к желаемому результату не приводит. В связи с этим здесь предлагается *косвенный метод решения реверсионной задачи*. Он заключается в том, чтобы доказать, что минимаксные значения (7) при инвертировании переменных варьирования дают результат, одинаковый с (6).

В теоретико-игровом представлении выражение (7) можно записать как

$$\overline{\varepsilon_{\min}^2} = \max_N \min_G \overline{\varepsilon^2} = \min_G \max_N \overline{\varepsilon^2}. \quad (8)$$

При решении обратной вариационной задачи в отличие от (8) необходимо найти $\overline{\varepsilon_{\max}^2}$, т.е. поменять местами варьируемые переменные $G(\omega)$ и $N(\omega)$.

Варьируя функционал (7) при дополнительном условии (4) по $G(\omega)$, получаем следующее уравнение Эйлера – Лагранжа:

$$\frac{\partial}{\partial G(\omega)} \left[\frac{G(\omega)N(\omega)}{G(\omega) + N(\omega)} - \mu G(\omega) \right] = 0, \quad (9)$$

где μ – множитель Лагранжа, который находится из (4).

Из (9) получаем

$$\frac{N^2(\omega)}{[G(\omega) + N(\omega)]^2} - \mu = 0.$$

Решая квадратное уравнение относительно $G(\omega)$, находим

$$\mu = \frac{P_{II}}{P_C + P_{II}}, \quad G(\omega)_{\max} = N(\omega) \frac{P_C}{P_{II}}. \quad (10)$$

Таким образом, спектр сигнала, который максимизирует ошибку, прямо пропорционален спектру помехи.

Аналогичным образом определяем спектр помехи, минимизирующий ошибку

$$\frac{\partial}{\partial N(\omega)} \left[\frac{G(\omega)N(\omega)}{G(\omega) + N(\omega)} + \lambda N(\omega) \right] = 0, \quad (11)$$

где λ – множитель Лагранжа, который определяется из (5).

Из решения квадратного уравнения относительно $N(\omega)$ с учетом (5) получаем

$$\lambda = \frac{P_C + P_{II}}{P_C}, \quad N(\omega)_{\min} = G(\omega) \frac{P_{II}}{P_C}. \quad (12)$$

Из (12) следует, что спектр помехи, минимизирующий ошибку, прямо пропорционален спектру сигнала.

В теории игр справедливы следующие равенства [7]

$$V = \max_G \min_N \overline{\varepsilon_{\min}^2(G, N)} = \min_N \overline{\varepsilon_{\min}^2[G(\omega)_{\max}, N(\omega)]},$$

$$V = \min_N \max_G \overline{\varepsilon_{\min}^2(G, N)} = \max_G \overline{\varepsilon_{\min}^2[G(\omega), N(\omega)_{\min}]}. \quad (13)$$

С учетом этих равенств, а также (10) и (12) получаем следующее выражение для цены игры V в реверсионной задаче:

$$V = \frac{P_C P_{\Pi}}{P_C + P_{\Pi}}. \quad (13)$$

Поскольку выражения (13) и (6) идентичны, то обратной в вариационном смысле функцией для функционала (7) является исходный функционал (1), т.е. реверсионная задача решена. Заметим, что данную задачу можно было бы решать путем нахождения оптимального значения АЧХ оптимального линейного фильтра $|K(j\omega)|$.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Таким образом, показано, что реверсионная задача может быть решена не только для теории оптимального линейного предсказания и корректирования сигналов, но также для оптимальной линейной фильтрации. Формулы (7) – (13) свидетельствуют о том, что для такого результата можно воспользоваться косвенным методом, поскольку прямой метод не позволяет получить требуемый результат.

Задачами дальнейших исследований в данном направлении целесообразно считать, например, исследование возможности решения реверсионной задачи в теории оптимальной нелинейной фильтрации в случае негауссовских спектров сигнала и помехи, а также теоретико-игровой синтез адаптивных линейных и нелинейных фильтров.

Библиографический список использованной литературы

1. Бохонский А.И. Отражение мира в функционалах / А.И. Бохонский // Оптимізація виробничих процесів: зб. наук. пр. — Севастополь, 2010. — № 12. — С. 5–8.
2. Харкевич А.А. Спектры и анализ / А.А. Харкевич. — М: Физматгиз, 1962. — 236 с.
3. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б.Р. Левин. — М.: Сов. радио, 1969. — Кн. 1. — 752 с.
4. Фрэнкс Л.Е. Теория сигналов / Л.Е. Фрэнкс: пер. с англ; под ред. Д.Е. Вакмана. — М.: Сов. радио, 1974. — 344 с.
5. Маригодов В.К. Решение обратной вариационной задачи / В.К. Маригодов, Г.А. Тихонов // Оптимізація виробничих процесів: зб. наук. пр. — Севастополь, 2010. — № 12. — С. 168–170.
6. Маригодов В.К. Теоретико-игровой синтез систем передачи и обработки информации / В.К. Маригодов, Э.Ф. Бабуров, Ю.В. Матвеев; под общ. ред. В.К. Маригодова. — Севастополь: СевНТУ, 2006. — 187 с.
7. Крушевский А.В. Теория игр: учеб. пособие для вузов / А.В. Крушевский. — К.: Вища школа. Головное изд-во, 1977. — 216 с.

Поступила в редакцию 17.11.2010 г.

Марігодов В.К., Тіхонов Г.А. Розв'язання зворотної варіаційної задачі в теорії оптимальної лінійної фільтрації

Розглянуто можливість розв'язання зворотної варіаційної задачі, що полягає в знаходженні початкового функціоналу за результатами мінімального значення середньоквадратичної помилки в теорії оптимальної лінійної фільтрації сигналів.

Ключові слова: оптимальна лінійна фільтрація, зворотна варіаційна задача, функціонал, рівняння Ейлера – Лагранжа.

Marigodov V.K., Tihonov G.A. Solution of the Inverse Variation Task in Optimal Linear Filtering Theory

The article considers the possibility to solve the inverse variation task based on the determination of a primary functional by the results of minimum mean-square error in optimal linear filtering of the signal theory.

Keywords: optimal linear filtering, inverse variation task, functional, Euler–Lagrange equation.